

Вопросы к экзамену по математике (2 часть)
для студентов заочной формы обучения 1 курса
института энергетики и транспорта
направление подготовки: 151000.62, 190600.62

Неопределенный и определенный интеграл

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Первообразные основных элементарных функций.
3. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной.
4. Интегрирование дробно-рациональных функций. Простейшие дроби.
5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная подстановка.
6. Определенный интеграл, его свойства.
7. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона- Лейбница, ее применение для вычисления определенного интеграла.
8. Методы вычисления определенного интеграла по частям и подстановкой (заменой переменной)
9. Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление площади плоской фигуры, длины дуги, объема тела вращения.

Ряды

10. Ряд. Сумма ряда Простейшие свойства.
11. Знакоположительные числовые ряды. Необходимый признак сходимости.
12. Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов. Два признака сравнения, признак Даламбера и два признака Коши.
13. Знакопередающиеся числовые ряды. Теорема Лейбница.
14. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
15. Функциональные ряды.
16. Степенные ряды. Интервал сходимости. Действия со степенными рядами.
17. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Интервал сходимости.
18. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\arctg x$, $(1+x)^n$, $\frac{1}{1-x}$.
19. Применения рядов Тейлора к приближенным вычислениям.
20. Ряд Фурье для 2π периодических функций.
21. Ряд Фурье для $2l$ периодических функций.
22. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Дифференциальные уравнения

23. Дифференциальные уравнения. Основные понятия.

24. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
25. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
26. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
27. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
28. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
29. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью специального вида.
30. Метод Лагранжа для решения дифференциальных уравнений второго порядка с произвольной правой частью.

Контрольная работа № 2

Задача 1. Найдите неопределенные интегралы.

- | | |
|--|---|
| <p>1</p> <p>а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$;</p> <p>б) $\int x \ln(x-1) dx$;</p> <p>в) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)^3}$;</p> <p>г) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$;</p> <p>д) $\int \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$.</p> | <p>6</p> <p>а) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$;</p> <p>б) $\int (5x+6) \cos 2x dx$;</p> <p>в) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} dx$;</p> <p>г) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$;</p> <p>д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.</p> |
| <p>2</p> <p>а) $\int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$;</p> <p>б) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$;</p> <p>в) $\int \frac{-3x^2 + x + 19}{(x-4)(x-2)(x+1)} dx$;</p> <p>г) $\int \sin x \cos 3x dx$;</p> <p>д) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}$.</p> | <p>7</p> <p>а) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$;</p> <p>б) $\int x^2 e^{-2x} dx$;</p> <p>в) $\int \frac{x-1}{(x^2-4)(x+1)} dx$;</p> <p>г) $\int \frac{dx}{5+4 \sin x}$;</p> <p>д) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$.</p> |
| <p>3</p> <p>а) $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$;</p> <p>б) $\int x^3 e^x dx$;</p> <p>в) $\int \frac{x}{x^2 - 4x - 5} dx$;</p> <p>г) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$;</p> <p>д) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$.</p> | <p>8</p> <p>а) $\int \frac{x dx}{2x^2+3}$;</p> <p>б) $\int \frac{\arctg x}{x^2} dx$;</p> <p>в) $\int \frac{x+2}{x^2-6x+5} dx$;</p> <p>г) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^7 x}$;</p> <p>д) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx$.</p> |
| <p>4</p> <p>а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}$;</p> <p>б) $\int x \arctg x dx$;</p> <p>в) $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x+2)} dx$;</p> <p>г) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$;</p> <p>д) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx$.</p> | <p>9</p> <p>а) $\int e^{-(x^2+1)} x dx$;</p> <p>б) $\int x^3 \sin x dx$;</p> <p>в) $\int \frac{2x-3}{(x-5)(x+2)} dx$;</p> <p>г) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$;</p> <p>д) $\int \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} - 1} dx$.</p> |

5 а) $\int x \sin(1-x^2) dx$;
 б) $\int x^3 \cos x dx$;
 в) $\int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx$;
 г) $\int \sin x \sin 3x dx$;
 д) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx$.

10 а) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$;
 б) $\int (2x-3) \sin 2x dx$;
 в) $\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} dx$;
 г) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}$;
 д) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Задача 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями.

1 $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$
 2 $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$
 3 $y = x^2 + 1, y = x + 1$
 4 $y = x^2 + 4x, y = x + 4$
 5 $y^2 = x + 1, y = x^2 + 2x + 1$

6 $y = x^2 + 3x, y = -x^2 - 3x$
 7 $y = e^x, y = e^{-x}, x = -2$
 8 $y = x - 1, y = x^2 - 2x + 1$
 9 $y = e^x, y = e^{-x}, x = 2$
 10 $y = x^2 - 3, y = -2x$

Задача 3. Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями.

1 $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}$
 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
 2 $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases}$
 $0 \leq t \leq 3\pi$
 3 $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$
 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
 4 $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases}$
 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
 5 $\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$
 $0 \leq t \leq \pi$

6 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$
 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
 7 $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$
 $\pi \leq t \leq 2\pi$
 8 $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$
 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
 9 $\begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$
 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
 10 $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}$
 $0 \leq t \leq \pi$

Задача 4. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций. В вариантах **1-5** ось вращения Ox , в вариантах **6-10** ось вращения Oy .

- | | | | |
|----------|---------------------------------------|-----------|----------------------------------|
| 1 | $y = x^2, x = -1, y = 0$ | 6 | $y = x^2, x = 2, y = 0$ |
| 2 | $2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0$ | 7 | $y = x^3, y = x$ |
| 3 | $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0$ | 8 | $y = x^3, y = x^2$ |
| 4 | $y = 2x - x^2, y = -x + 2$ | 9 | $y = x^2, y = 1, x = 0$ |
| 5 | $y = x^2, y^2 - x = 0$ | 10 | $y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0$ |

Задача 5. Найдите общее решение дифференциального уравнения.

- | | | | |
|----------|--|-----------|--|
| 1 | а) $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$; | 6 | а) $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$; |
| | б) $y' - \frac{y}{x} = x^2$; | | б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$; |
| | в) $(x+2y)dx - xdy = 0$; | | в) $x dy + (2y-x)dx = 0$; |
| | г) $y'' + 9y = 6e^{3x}$. | | г) $y'' - 7y' + 12y = x$. |
| 2 | а) $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$; | 7 | а) $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$; |
| | б) $y' + \frac{y}{2x} = x^2$; | | б) $y' + 2xy = -2x^3$; |
| | в) $(x^2 + y^2)dx - 2xy dy = 0$; | | в) $y' = -\frac{x+y}{x}$; |
| | г) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$. | | г) $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$. |
| 3 | а) $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$; | 8 | а) $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx$; |
| | б) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$; | | б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$; |
| | в) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy dy = 0$; | | в) $(x+y)dx + xdy = 0$; |
| | г) $y'' + 4y = 2 \sin 2x$. | | г) $y'' - 4y' + 3y = 12 \sin x - 4 \cos x$. |
| 4 | а) $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$; | 9 | а) $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$; |
| | б) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$; | | б) $y' - 4xy = -4x^3$; |
| | в) $(x^2 + 2xy)dx + xy dy = 0$; | | в) $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$; |
| | г) $y'' - 9y = x + 1$. | | г) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$. |
| 5 | а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0$; | 10 | а) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$; |
| | б) $y' + \frac{y}{x} = 3x$; | | б) $y' + xy = -x^3$; |
| | в) $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$; | | в) $x dy = (x+2y)dx$; |
| | г) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. | | г) $4y'' - 12y' + 9y = e^x$. |

Задача 6. Исследуйте сходимость ряда.

1	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$.	6	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3}$.
2	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$;	б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\pi}{n \ln n}$.	7	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$;	б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$.
3	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.	8	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2-2}$.
4	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$.	9	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$.
5	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$;	б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.	10	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{3n \cdot 5^n}$;	б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln n}}$.

Задача 7. Найдите область сходимости степенного ряда.

1	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n!}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-9)^n$.	6	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-10)^n}{2^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+4)^n$.
2	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-9)^n}{7^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+2)^n$.	7	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n!}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+9)^n$.
3	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-4)^n$.	8	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{7^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-6)^n$.
4	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{5^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+6)^n$.	9	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-10)^n}{n!}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-7)^n$.
5	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-10)^n$.	10	a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{5^n}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+10)^n$.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.– М.: Наука, 1984.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.– М.: Наука, 1984.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.– М.: Наука, 1985.
4. Ерилова Е.Н. Определенный интеграл: Методические рекомендации по выполнению расчетно-графической (контрольной) работы.- Архангельск: Изд-во АГТУ, 2008–37 с. (<http://narfu.ru/math/depart/maths/education/books/>)

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1, 2.– М.: Наука, 1985.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1, 2 ч.- М.: Рольф, 2001.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1, М: Высшая школа –2003, 304с.,
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2, М: Высшая школа, 2003.- 415 с.
9. Кручкович Г.И., Гутарина Н.И., Дюбюк П.Е. Сборник задач по курсу высшей математики.- М.: Высшая школа, 1973.- 576 с.
10. Хотенова О.А. Ряды: методические рекомендации по выполнению расчетно-графической (контрольной) работы.- Архангельск: АГТУ, 2008.- 35 с.
(<http://narfu.ru/math/depart/math/education/books/>)

Составила: Архипова О. В.

Утверждаю:

Зав. кафедрой математики

В.Н. Попов

1.12.2011 г.