*Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице - по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берет рис. 4 и условия № 6 из таблицы.*

У меня шифр 43

Задача С1

Жесткая рама (рис. С1.0-С1.9, табл. С1) закреплена в точке *А* шарнирно, а в точке *В* прикреплена или к невесомому стержню *ВВ1*, или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами.

На раму действуют пара сил с моментом *М* = 100 Н⋅м и две силы, значения которых, направления и точки приложения указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действуют сила *F1* = 10 Н под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке *К,* и сила *F4* =40 Н под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке *Н).*

Определить реакции связей в точках *А* и *В,* вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять *l* = 0,5 м.

*Указания.* Задача C1 - на равновесие тела под действием плоской системы сил. Составляя уравнения равновесия, учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей (в данном случае относительно точки *А).* При вычислении момента какой-либо силы  часто удобно разложить ее (согласно аксиоме параллелограмма сил) на составляющие  и  (не обязательно параллельно координатным осям), так, чтобы плечи этих составляющих определялись легче, чем плечо силы . После этого воспользоваться теоремой Вариньона в алгебраической форме:

.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
| **Рис. С1.5** |  |
|  |  |
|  |  |

### Таблица С1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Сила |  | |  | |  | |  | |
| Номер условия | F1 = 10 H | | F2 = 20 H | | F3 = 30 H | | F4 = 40 H | |
| Точка прилож. |  | Точка прилож. |  | Точка прилож. |  | Точка прилож. |  |
| 0 | - | - | D | 60 | E | 45 | - | - |
| 1 | K | 30 | - | - | - | - | H | 60 |
| 2 | - | - | H | 45 | K | 30 | - | - |
| 3 | D | 60 | - | - | - | - | E | 30 |
| 4 | - | - | K | 30 | E | 60 | - | - |
| 5 | H | 60 | - | - | D | 30 | - | - |
| 6 | - | - | E | 30 | - | - | K | 45 |
| 7 | D | 45 | - | - | H | 60 | - | - |
| 8 | - | - | H | 60 | - | - | D | 30 |
| 9 | E | 30 | - | - | - | - | K | 60 |

**Пример C1.** Жесткая пластина *ABCD* (рис. C1) имеет в точке *А* неподвижную шарнирную опору, а в точке *В -* подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: *F* = 25 кН, *α* = 60°, *Р* *=* 18 кН, γ = 75°, *М* = 50 кН ⋅ м,  *β* =30°, *l*= 0,5 м.  Определить: реакции в точках *А* и *В,* вызываемые действующими нагрузками. |

**Решение**. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси *ху* и изобразим действующие на пластину силы:

а) активные силы (нагрузки): силу  и пару сил с моментом *М*;

б) реакции связей:

в точке А связью является неподвижная шарнирная опора, ее реакцию изображаем двумя составляющими , параллельными координатным осям;

в точке В связью является подвижная шарнирная опора на катках, ее реакция направлена перпендикулярно плоскости опоры катков;

в точке D связью является трос, реакция троса  направлена вдоль троса от пластины (по модулю *Т = Р)*.

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  относительно точки *А* воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу  на составляющие  и учтем, что *.* Получим

 (1)

 (2)

 (3)

Решение системы уравнений начинаем с уравнения (3), так как оно содержит одну неизвестную :

кН.

Подставляем  в уравнение (1):

.

Подставляем  в уравнение (2):



**Проверка.** Составим, например, уравнение  (или уравнение моментов относительно любой другой точки (кроме А). Если задача решена верно, то эта сумма моментов должна быть равна нулю.





Ответ: *ХА* = -8,5 кН, *YA* = -23,3 кН, *RB* = 7,3 кН. Знаки указывают, что составляющие реакции шарнира **** и **** направлены противоположно показанным на рис. C1.

*В примерах выполнения последующих задач решение уравнений и проверка не приводятся, но это необходимо делать при выполнении каждой задачи контрольной работы.*

Задача К1

Точка *В* движется в плоскости *ху* (рис. К1.0-К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: *х = f1* (*t*)*, у* = *f2* (*t*)*,* где *х* и *у* выражены в сантиметрах, *t -*в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени *t1* = 1с определить координаты, скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Выполнить рисунок на странице в клетку или на вклеенном листке миллиметровой бумаги, на котором изобразить:

а) траекторию точки и ее координаты для заданного момента времени (в масштабе координат);

б) проекции скорости точки на оси координат и вектор скорости точки для заданного момента времени (в масштабе скоростей), причем полученный вектор скорости должен быть направлен по касательной к траектории;

в) проекции ускорения точки на оси координат и вектор ускорения точки для заданного момента времени (в масштабе ускорений), причем полученный вектор ускорения должен быть направлен в сторону вогнутости траектории (для прямолинейной траектории – вдоль этой прямой);

г) проекции вектора ускорения на касательную и нормаль (касательное и нормальное ускорения), определить их значения с помощью масштаба ускорений и сравнить со значениями, вычисленными по формулам.

д) отложить по нормали радиус кривизны в масштабе координат и показать центр кривизны траектории для данной точки (если позволяют размеры рисунка, в противном случае указать, что центр кривизны находится за пределами рисунка.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

# Таблица К1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Условия | *y* = *f2*(*t*) | | |
| Рис. 1-2 | Рис.3-6 | Рис.7-9 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 |  |  |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  |  |

Зависимость *х* = *f1*, (*t*) указана непосредственно на рисунках, а зависимость *у* = *f2* (*t*) дана в табл. К1 (для рис. О-2 в столбце 2, для рис. 3-6 в столбце 3, для рис. 7-9 в столбце 4). Как и в задачах C1, C2, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 - по последней.

*Указания.* Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени *t1* = 1 с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: cos 2α= 1 – 2sin2α = 2 cos2α- 1; sin 2α = 2sin α⋅cos α*.*

**Пример К-1**. Уравнения движения точки в плоскости заданы координатным способом и имеют вид:

, (1)

, (2)

где время *t* задано в секундах, координаты  *x, y* – в метрах.

Найти: уравнение траектории точки; положение точки на траектории при  (начальное положение) и при  c ; скорость  точки; ускорение  точки; касательное , нормальное  ускорения точки и радиус кривизны траектории . В каждом пункте выполнить соответствующие построения на рисунке.

**Решение.** 1. Найдем уравнение траектории, исключив из (1) и (2) параметр *t* - время. Способ исключения *t* зависит от вида функций в правых частях (1), (2). В данном случае найдем из (1), (2) соответственно

.

Возводя полученные соотношения в квадрат, после этого складывая их и учитывая, что , найдем :



Из этого уравнения следует, что траекторией точки является эллипс, полуоси которого равны 4 м и 6 м, а центр имеет координаты (0, 0).

Выберем масштаб координат и выполним рисунок. Следует заметить, что приведенный рисунок (Рис. 1) имеет вид, соответствующий уже окончанию решения; свой рисунок рекомендуется делать по мере продвижения решения. Это позволяет контролировать получаемые результаты и делает их более наглядными.

2. Находим положение точки при , подставляя это значение *t* в (1) и (2):



3. Находим положение точки при , подставляя это значение *t* в (1) и (2):



Указываем на рисунке точки  и , учитывая масштаб координат.

4. Найдем скорость точки. Из теории следует, что при координатном способе задания движения определяются сначала проекции скорости на оси координат. Используя (1) и (2) - уравнения движения точки - находим

 , (3)

 . (4)

Модуль скорости . Подставляя сюда (3), (4), получим

. (5)

При  с : , ,

. (6)

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 1 | Выберем масштаб для скоростей (рис.1), проведем в точке *M*1 линии парал-лельные осям *x* и *y*, и на этих линиях в масштабе скоростей отложим отрезки: 5,44 по оси *x*  и - 4,71 по оси *y*, что соответствует величи-нам и знакам найденных проекций скорости. На этих составляющих строим пара-ллелограмм (прямоуголь-ник), диагональ которого по величине и направлению соответствует вектору .  Проверьте следующее: длина построенного вектора должна получиться равной найденному значению |

(с учетом масштаба скоростей). Вектор  направлен по касательной к траектории в точке  и показывает направление движения точки по траектории.

Удобно сейчас построить в точке  естественные оси: касательную  и главную нормаль  (они потребуются позже). Касательную  проводим вдоль  ; главную нормаль  проводим перпендикулярно  в плоскости рисунка и направляем к центру кривизны траектории в точке  (в сторону вогнутости траектории).

5. Находим ускорение точки, используя (3), (4):

 , (7)

. (8)

Модуль ускорения . Из (7), (8) получим

. (9)

Подставляя в (7) - (9) , найдем

, ,

. (10)

В точке  строим в масштабе проекции ускорений , учитывая их величины и знаки, а затем строим вектор ускорения . Построив , следует проверить, получилось ли на рисунке  (c учетом масштаба ускорений), и направлен ли вектор  в сторону вогнутости траектории (вектор  проходит через центр эллипса, но это есть особенность данной задачи, связанная с конкретным видом функций (1) и (2)).

6. Находим касательное ускорение  , характеризующее изменение модуля .

Учитывая (5), получим .

При 

. (11)

Касательное ускорение можно также найти, дифференцируя по времени равенство  Получим

, откуда следует



Нормальную составляющую  ускорения, характеризующую изменение направления , можно найти по формуле

, (12)

если  - радиус кривизны траектории заранее известен, или (учитывая, что,  и, следовательно, ) по формуле

. (13)

Так как в данной задаче радиус  заранее неизвестен, то используем (13). Подставляя (10), (11) в (13), получим

. (14)

Вернемся к рис. 1. Ранее на этом рисунке вектор  был построен по составляющим , . С другой стороны, этот вектор можно разложить на составляющие по естественным осям  и  (пользуясь правилом параллелограмма). Выполним это разложение и построим на рисунке векторы  и . Далее следует провести проверку: с учетом масштаба ускорений определить по рисунку величины ,  и убедиться, что они совпадают с (11), (14).

Заметим, что движение точки ускоренное, т.к. направления векторов  и  совпадают (рис. 1).

Найдем радиус кривизны , используя (12), откуда следует, что . Подставляя в последнее соотношение  и  из (6) и (14), получим радиус кривизны траектории в точке : . Отложим на рисунке от точки  по оси  отрезок  длины  (в масштабе длин); полученная точка  есть центр кривизны траектории в точке .

Объединяя полученные результаты, запишем ответ:

1. траектория точки - эллипс, имеющий уравнение ;

2.  3.

4. ;

5. ;

6. ; ;

.

# Задача Д1

Груз *D* массой *т,* получив в точке *А* начальную скорость *υ*0, движется в изогнутой трубе *АВС,* расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные,или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0-Д1.9, табл. Д1). На участке *АВ* на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды *R,* зависящая от скорости  груза (направлена против движения).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## Таблица Д1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер условия | *m*, кг | *υ0*, м/с | *Q*, H | *R, H* | *l,* м | *t*1, с | *Fx,H* |
| 0 | 2,4 | 12 | 5 | 0,8*υ*2 | 1,5 | - | 4sin(4*t*) |
| 1 | 2 | 20 | 6 | 0,4*υ* | - | 2,5 | -5 cos(4*t*) |
| 2 | 8 | 10 | 16 | 0,5*υ*2 | 4 | - | 6t2 |
| 3 | 1,8 | 24 | 5 | 0,3*υ* | - | 2 | -2 cos(2*t*) |
| 4 | 6 | 15 | 12 | 0,6*υ*2 | 5 | - | -5sin(2*t*) |
| 5 | 4,5 | 22 | 9 | 0,5*υ* | - | 3 | 3*t* |
| 6 | 4 | 12 | 10 | 0,8*υ*2 | 2,5 | - | 6 cos(4*t*) |
| 7 | 1,6 | 18 | 4 | 0,4*υ* | - | 2 | -3sin(4*t*) |
| 8 | 4,8 | 10 | 10 | 0,2*υ*2 | 4 | - | 4 cos(2*t*) |
| 9 | 3 | 22 | 9 | 0,5*υ* | - | 3 | 4sin(2*t*) |

В точке *В* груз, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок *ВС* трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила *,* проекция которой *Fx* на ось *х* задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние *АВ* = *l* или время *t*1 движения груза от точки *А* до точки *В,* найти закон движения груза на участке *ВС,* т.е. *x=f(t),* где *х* = *BD.* Трением груза о трубу пренебречь.

*Указания.* Задача Д1 - на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке *АВ,* учтя начальные условия. Затем, зная время движения на участке *АВ* или его длину, определить, какую скорость будет иметь груз в точке *В.* Эта скорость будет начальной для движения груза на участке *ВС.* После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке *ВС* тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке *В,* и полагая, что в этот момент времени *t* = 0. При интегрировании уравнения движения на участке *АВ* в случае, когда задана длина *l* участка, целесообразно перейти в уравнении к переменному *х,* учтя, что



**Пример Д1**. На вертикальном участке *АВ* трубы (рис. Д1) на груз *D* массой *т* действуют сила тяжести и сила сопротивления *;* расстояние от точки *А*, где *υ* = *υ*0*,* до точки *В* равно *l*. На наклонном участке *ВС* на груз действуют сила тяжести и переменная сила *F* = *F (t),* заданная в ньютонах.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: *т =* 2 кг, *R* = *μυ*2,  где *μ* = 0,4 кг/м, *υ*0 = 5 м/с,  *l* = 2,5 м, *fх =* 16 sin (4*t*).  Определить: *х = f (t) -* закон движения груза на участке *ВС.* |

**Решение. 1.** Рассмотрим движение груза на участке *АВ,* считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы  Проводим ось *Az* и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

 (1)

Далее находим: *Рz = Р = mg, Rz* = *-R* = -*μυ*2; подчеркиваем, Что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что *υz* = *υ*, получим

 (2)

Введем для сокращения записей обозначения

 (3)

где при подсчете принято *g* ≈ 10 м/с2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

 (4)

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

 (5)

По начальным условиям при *z* *=* 0 *υ* *= υ*0, что дает *С*1 =, и из равенства (5) находим





 (6)

Полагая в равенстве (6) z = *l*= 2,5 м и заменяя *k* и *п*их значениями (3), определим скорость *υ*B груза в точке *В* (*υ0* = 5 м/с, число *е* = 2,7) :

 (7)

2. Теперь рассмотрим движение груза на участке *ВС;* найденная скорость *υ*B будет для движения на этом участке начальной скоростью (*υ*0 = *υ*B). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы 

Проведем из точки *В* ось *Вх* и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

 (8)

Так как *Рх = Р* sin 30° = 0,5 *mg, Nx*= 0, *Fx* = 16 sin (4*t*), то уравнение (8) примет вид

 (9)

Разделив обе части равенства на *т* = 2 кг и полагая опять *g* ≈ 10 м/с2, получим

 (10)

Умножая обе части уравнения (10) на *dt* и интегрируя, найдем

 (11)

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке *В,* считая в этот момент *t* = 0. Тогда при *t = 0* , где *υ*B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

*C*2 = *υ*B + 2 cos 0 *=* 6,4 + 2 = 8,4.

#### При найденном значении *C*2 , уравнение (11) дает

 (12)

Умножая здесь обе части на *dt* и снова интегрируя, найдем

 (13)

Так как при *t* = 0 х = 0, то *С*3 = 0, и искомый закон движения груза будет

*х =* 2,5*t*2 + 8,4*t* - 0,5 sin (4*t*), (14)

где *х* - в метрах, *t* - в секундах.