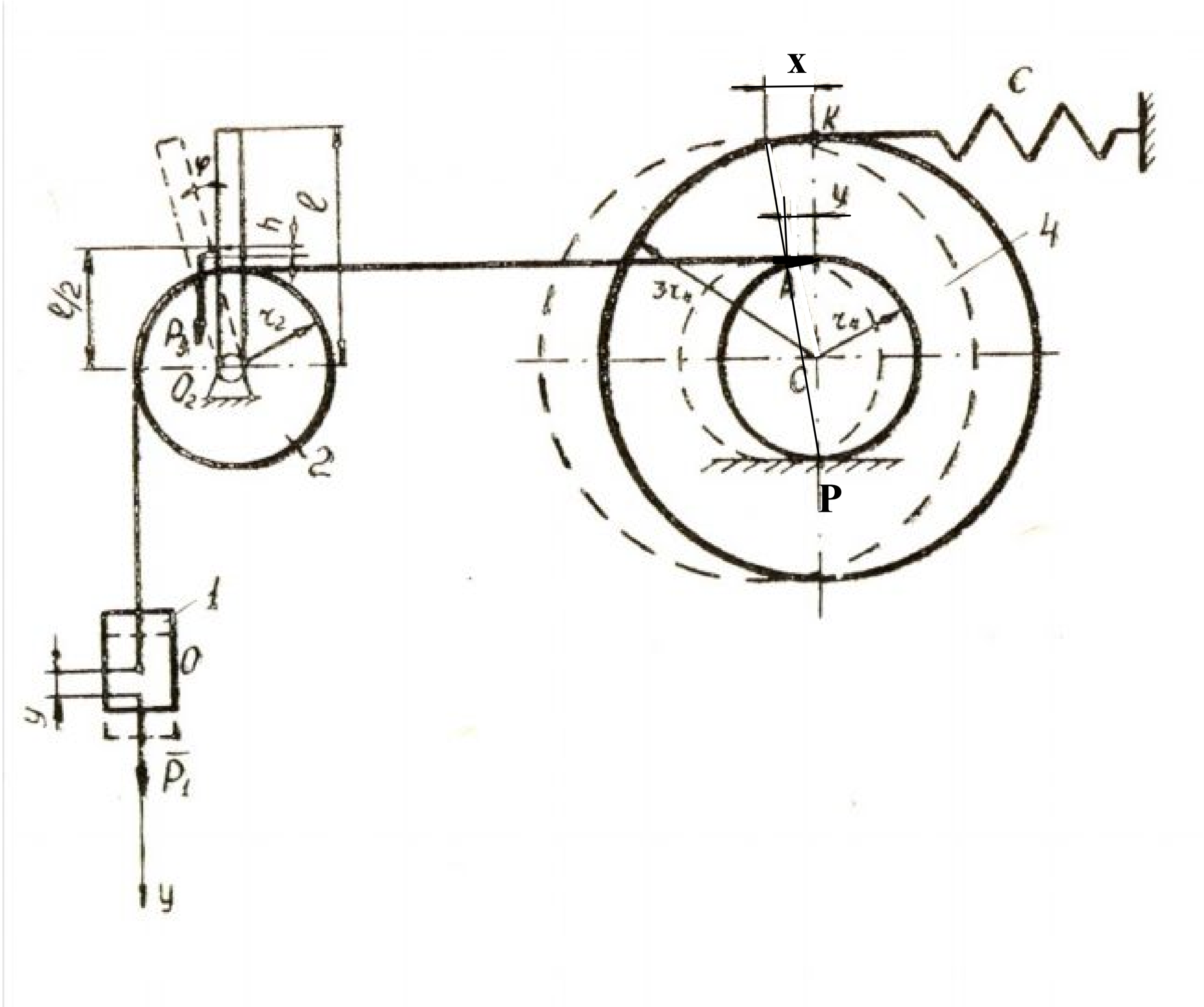
П Р И М Е Р

выполнения РГР по теме
«Малые колебания механической системы с одной степенью свободы»



УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Механическая система состоит из 4-х абсолютно твердых тел: груза 1, блока 2, стержня 3, жестко связанного с блоком 2, и ступенчатого катка 4. Тела между собой соединены невесомыми нерастяжимыми нитями. Каток связан с основанием пружиной. При движении груза 1 по вертикали блок 2, представляющий собой сплошной однородный диск, вместе со стержнем 3 вращается вокруг неподвижной оси, а ступенчатый каток катится без скольжения по шероховатой горизонтальной плоскости. Даны массы тел m_1, m_2, m_3, размеры ℓ, r_2, r_4, радиус инерции катка ρ_4, жесткость пружины c и начальные условия $y_0, \dot{y}_0$.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

m_1=5 кг, m_2=2 кг, m_3=10 кг, m_4=4 кг, c=15 кН/м, ℓ=1 м,
r_2=0,5 м, r_4=0,3 м, ρ_4=0,6 м, y_0,=0,05 м, $\dot{y}_0$=0,05 м/с.

Сплошными линиями на чертеже изображено положение механической системы в положении равновесия, пунктирными – в отклоненном от равновесия состоянии.

ВОПРОСЫ ЗАДАНИЯ

1. Проверить условие устойчивости положения равновесия механической системы.
2. Вычислить статическую деформацию пружины в положении равновесия механической системы.
3. Определить частоту и период малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей.
4. Найти уравнение движения груза 1 *y=y(t)*, приняв за начало отсчета положение равновесия груза 1. Найти также амплитуду колебаний груза 1.

РЕШЕНИЕ

При переходе из отклоненного положения в положение равновесия и обратно:

- груз 1 движется поступательно;
- блок 2 и стержень 3 вращаются вокруг неподвижной оси;
- каток 4 совершает плоскопараллельное движение.

Механическая система имеет одну степень свободы, следовательно, для описания движения всех тел системы можно использовать одну обобщенную координату.

В качестве обобщенной координаты системы принимаем вертикальное смещение y груза 1 от положения равновесия, соответствующего статической деформации пружины.

Для составления дифференциального уравнения движения механической системы в обобщенных координатах воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода для случая консервативной системы (без сил сопротивления):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial \Pi}{\partial y}=0, \tag{1}$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергии системы.

Определим потенциальную и кинетическую энергии системы. При этом, считая отклонения системы от положения равновесия малыми, кинетическую энергию T определим с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной скорости $\dot{y}$, а потенциальную энергию $П$ – с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты y.

Кинетическая энергия системы определяется суммой кинетических энергий тел 1,2,3 и 4:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \tag{2}$$

Для нахождения кинетической энергии как функции от обобщенной скорости $\dot{y}$ необходимо составить выражения для кинематических связей тел системы.

Так скорость груза 1 определяется первой производной по времени от смещения y и равна обобщенной скорости:

$$V_1 = \dot{y} \tag{3}$$

Угловые скорости блока 2 и стержня 3 равны и определяются скоростью движения груза 1:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_1}{r_2}.$$

Окончательно:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{\dot{y}}{r_2} \tag{4}$$

Угловая скорость катка 4 определяется скоростью движения точки А равной скорости движения ведомой нерастяжимой нити, и расстоянием до мгновенно неподвижной точки Р (М.Ц.С., или мгновенный центр скоростей) катка, находящейся в контакте с опорной поверхностью:

$$\omega_4 = \frac{V_A}{2r_4},$$

Учитывая очевидное равенство скоростей: $V_A = V_1 = \dot{y}$, получим:

$$\omega_4 = \frac{\dot{y}}{2r_4} \tag{5}$$

Скорость движения центра масс С катка 4 определим через угловую скорость его вращения и расстояние от М.Ц.С. до точки С:

$$V_C = \omega_4 \cdot r_4 .$$

После подстановки выражения (5) получим:

$$V_C = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{\dot{y}}{2r_4} \cdot r_4 = \frac{\dot{y}}{2} \qquad (6)$$

Напишем выражение (2) для кинетической энергии системы, учитывая, что груз 1 движется поступательно, блок 2 и стержень 3 вращаются относительно оси, проходящей через точку O_2, а каток 4 перемещается поступательно, т.е. его кинетическая энергия состоит из двух компонентов – поступательного, со скоростью движения центра масс, и вращательного относительно оси, проходящей через центр масс катка:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{4C} \omega_4^2 \qquad (7)$$

Используем формулы для моментов инерции сплошного блока 2 ($J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$), однородного стержня 3 ($J_3 = \frac{1}{3} m_3 \ell^2$), ступенчатого катка 4 ($J_{4C} = m_4 \rho_4^2$). Тогда выражения (7) приобретет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_3 \ell^2 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_C^2 + \frac{1}{2} m_4 \rho_4^2 \omega_4^2 \qquad (8)$$

После подстановки кинематических связей (3) - (6) в (8) и очевидных сокращений, получим:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_3 \frac{\ell^2}{r_2^2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_4 \frac{1}{4} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_4 \frac{\rho_4^2}{4r_4^2} \dot{y}^2 ,$$

или окончательно:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2}{r_2^2} m_3 + \frac{1}{4} (1 + \frac{\rho_4^2}{r_4^2}) m_4 \right) \dot{y}^2 = \frac{1}{2} a_0 \cdot \dot{y}^2 , \qquad (9)$$

Здесь введен коэффициент инерции a_0, или **приведенная инертность** механической системы, равная:

$$a_0 = m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^2}{r_2^2}m_3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{r_4^2+\rho_4^2}{r_4^2}m_4 \tag{10}$$

Определим потенциальную энергию системы как работу консервативных сил системы (сил тяжестей и силы упругости) по перемещению системы из отклоненного положения, характеризующегося обобщенной координатой y, в равновесное положение, при котором y=0.

Потенциальная энергия, соответствующая силам тяжести груза 1 (P_1=m_1g) и стержня 3 (P_3=m_3g) при указанном перемещении[1]:

$$\Pi(m\vec{g}) = -m_1 g\cdot y - m_3 g\cdot h\,, \tag{11}$$

где h – вертикальное смещение центра тяжести стержня 3.

Величину h можно найти как разницу между высотой центра тяжести стержня относительно т. O_2 в равновесном и отклоненном состоянии:

$$h = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\cos\varphi = \frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi) \tag{12}$$

Раскладывая косинус в ряд Тейлора, получим:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - ... \tag{13}$$

Ограничимся только двумя первыми членами в разложении, учитывая, что рассматриваются только малые колебания системы. Угол отклонения φ можно выразить через смещение y:

$$\varphi = \frac{y}{r_2} \tag{14}$$

Тогда после подстановки первых двух слагаемых из (13) в (12), с учетом (14) получим:

$$h = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{\varphi^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{2r_2^2}y^2 \tag{15}$$

Таким образом, выражение (11) приобретает вид:

[1] Силы тяжести блока и катка не входят в выражение для потенциальной энергии в силу того, что точки их приложения не перемещаются в вертикальном направлении

$$\Pi(m\vec{g}) = -m_1 g \cdot y - \frac{1}{2} m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2} y^2 \tag{16}$$

Потенциальная энергия деформированной пружины при указанном перемещении системы равна:

$$\Pi(\vec{F}_{упр}) = \frac{1}{2} c\lambda^2 - \frac{1}{2} c\lambda_{ст}^2 \ , \tag{17}$$

где λ – растяжение пружины из своего недеформированного состояния, $\lambda_{ст}$ – растяжение пружины до положения, соответствующего равновесному состоянию системы.

Найдем **статическое смещение пружины**.

Оно соответствует условию равновесия катка 4 под действием двух моментов сил – момента силы натяжения ведущей нити, равной весу тела 1, и момента силы упругости пружины при ее статическом растяжении:

$$M_P(m_1\vec{g}) + M_P(\vec{F}_{упр}) = 0; \text{ или } m_1 g \cdot 2r_4 - c\lambda_{ст}(r_4 + 3r_4) = 0, \tag{18}$$

откуда:

$$\lambda_{ст} = \frac{m_1 g}{2c} \tag{19}$$

Обозначим добавочное смещение пружины (перемещение т. К пружины) символом x: $x = \lambda - \lambda_{ст}$. Из чертежа задачи легко увидеть, что $\frac{x}{y} = \frac{PK}{PA} = \frac{r_4 + 3r_4}{2r_4}$, откуда:

$$x = 2y \tag{20}$$

В этом случае выражение (17) преобразуется в следующий вид:

$$\begin{aligned}\Pi(\vec{F}_{упр}) &= \frac{1}{2} c(x + \lambda_{ст})^2 - \frac{1}{2} c\lambda_{ст}^2 = \frac{1}{2} c(2y + \lambda_{ст})^2 - \frac{1}{2} c\lambda_{ст}^2 = \\ &= \frac{1}{2} 4cy^2 + 2c\lambda_{ст} y + \frac{1}{2} c\lambda_{ст}^2 - \frac{1}{2} c\lambda_{ст}^2 = \frac{1}{2} 4cy^2 + 2c\lambda_{ст} y\end{aligned} \tag{21}$$

Полная потенциальная энергия системы, согласно (16) и (19), будет:

$$\Pi = \Pi(m\vec{g}) + \Pi(\vec{F}_{упр}) = -m_1 g \cdot y - \frac{1}{2} m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2} y^2 + \frac{1}{2} 4cy^2 + 2c\lambda_{ст} y =$$
$$= \frac{1}{2}(4c - m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2}) y^2 + (2c\lambda_{ст} - m_1 g) y = \frac{1}{2} c_0 y^2 + (2c\lambda_{ст} - m_1 g) y, \qquad (22)$$

здесь введен **обобщенный коэффициент жесткости** c_0, равный:

$$c_0 = 4c - m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2} \qquad (23)$$

Как следует из (19), выражение в скобках в последнем слагаемом (22) равно нулю, откуда потенциальная энергия системы приобретет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_0 y^2 \qquad (24)$$

Исследуем **устойчивость положения равновесия**.

По теореме Лагранжа – Дирихле состояние равновесия консервативной системы является устойчивым, если потенциальная энергия системы – минимальна. Математически это означает, что в этом положении:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y}\Big|_0 = 0; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\Big|_0 > 0. \qquad (25)$$

По первому условию, продифференцировав (20), получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y}\Big|_0 = c_0 y \qquad (26)$$

равенство в (25) будет выполняться только при $y = 0$, т.е. при указанном на чертеже положении системы.

Второе условие в (24) – условие строго минимума. Продифференцировав выражение (25) еще раз, получим:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\Big|_0 = c_0 = 4c - m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2},$$

Подставим численные значения в соответствии с исходными данными задания:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\Big|_0 = 4\cdot 15000 - 10\cdot 9{,}8\frac{1}{2\cdot(0{,}5)^2} = 60000 - 196 = 59804\, H\ /\ м$$

Как видно из полученной числовой оценки, это – положительная величина. Следовательно, **механическая система в изображенном на рисунке положении будет находиться в устойчивом равновесии**.

Подставим потенциальную (24) и кинетическую (9) энергии в уравнение Лагранжа второго рода (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(a_0\dot{y}\right) = a_0\ddot{y}; \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}} = c_0 y\,,$$

тогда уравнение приобретет вид:

$$a_0\ddot{y} + c_0 y = 0 \tag{27}$$