Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Кафедра «Прикладная математика»

А. В. Овчинников

Линейная алгебра

**Учебно-методический материал
для подготовки контрольных работ по темам
«Число и вектор Фробениуса», «Модель Леонтьева»,
«Линейное программирование», «Транспортная задача»,
«Разностные уравнения»**

Для подготовки бакалавров направлений

080100.62 «Экономика» и 080500.62 «Менеджмент»

Москва 2010

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Кафедра «Прикладная математика»

УТВЕРЖДАЮ

Ректор

__________М. А. Эскиндаров

«______»____________2010 г.

А. В. Овчинников

Линейная алгебра

**Учебно-методический материал
для подготовки контрольных работ по темам
«Число и вектор Фробениуса», «Модель Леонтьева»,
«Линейное программирование», «Транспортная задача»,
«Разностные уравнения»**

*Рекомендовано Ученым Советом при факультете
«Математические методы и анализ рисков»
(протокол № 7 от 22 июня 2010 г.)*

*Одобрено кафедрой «Прикладная математика»
(протокол № 12 от 19 мая 2010 г.)*

Москва 2010

УДК 519.6 (073)

ББК 22.143

Г 65

Рецензент: В.М. Гончаренко, к.ф.-м.н., доцент

А. В. Овчинников.

Линейная алгебра. Учебно-методический материал для подготовки контрольных работ по темам «Число и вектор Фробениуса», «Модель Леонтьева», «Линейное программирование», «Транспортная задача», «Разностные уравнения». – М: Финуниверситет, кафедра «Прикладная математика», 2010.

В данном издании представлено 30 вариантов контрольных работ по линейной алгебре для студентов первого курса по темам «Число и вектор Фробениуса. Модель Леонтьева. Линейное программирование. Транспортная задача. Разностные уравнения». Последний 30-й вариант приводится с подробными решениями.

УДК 519.6 (073)

ББК 22.143

Г 65

Учебное издание

Алексей Витальевич Овчинников

Линейная алгебра. Учебно-методический материал для подготовки контрольных работы по темам «Число и вектор Фробениуса», «Модель Леонтьева», «Линейное программирование», «Транспортная задача», «Разностные уравнения».

Компьютерный набор, верстка: А. В. Овчинников

Формат 60x90/16. Гарнитура *Times New Roman, Antiqua*
Усл.п.л.0,6. Изд. № -2010. Тираж ___ экз.

Отпечатано в ФГОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Введение

Домашние контрольные работы по математике являются одной из основных форм текущего контроля самостоятельной работы студентов.

В издании представлены материалы для двух домашних контрольных работ по второй части курса линейной алгебры, которая охватывает следующие темы: «Число и вектор Фробениуса», «Модель Леонтьева», «Линейное программирование», «Транспортная задача», «Разностные уравнения». В результате выполнения работы студенты, с одной стороны, демонстрируют умения и навыки, приобретенные в ходе лекций и практических занятий, и получают оценки, являющиеся существенной компонентой аттестации и баллов за работу в семестре. С другой стороны, выполнение заданий домашней контрольной работы является важной частью подготовки к семестровому экзамену (зачету). Задания контрольной работы составлены так, чтобы охватить все основные типы задач по данным темам.

Сроки выполнения и сдачи домашних контрольных работ устанавливаются преподавателем. Оценки выставляются по итогам проверки письменных работ и собеседования (или аудиторной контрольной работы).

В настоящем пособии представлено 30 вариантов домашних контрольных работ. К варианту № 30 приведены подробные решения, в которых продемонстрированы основные приемы и методы решения типовых задач.

В целях экономии места задачи сгруппированы не по вариантам, а по типам: сначала приведены 30 вариантов задачи № 1, затем — 30 вариантов задачи № 2 и т.д. Такая структура пособия объясняется тем, что у многих задач, приведенных в пособии, одинаковая текстовая часть, но различные числовые данные.

Правила оформления домашних контрольных работ

1. Работа должна быть выполняется аккуратно, разборчивым почерком, синей или черной ручкой на листах формата А4. Листы должны быть скреплены неразборным соединением (степлером, клеем и т.п.).
2. Работа снабжается титульным листом, на котором приводятся следующие данные: номер группы, фамилия студента, дата сдачи работы на проверку, ответы ко всем задачам в том же порядке, в котором задачи сформулированы (см. образец титульного листа на следующей странице). Если задача не решена, вместо ответа ставится прочерк.
3. Решения задач внутри работы должны быть приведены в той же последовательности, что их формулировки. Если в задаче предусмотрено несколько заданий, то они также должны быть решены в той последовательности, в которой сформулированы.
4. Перед решением указывается порядковый номер задачи, который необходимо выделить (маркером, рамкой и т.п). Условие переписывать не требуется. В конце решения приводится ответ по форме: «Ответ:. . . ».
5. Числовой ответ должен быть приведен в виде целого числа, или десятичной дроби с 4 знаками после запятой, или обыкновенной дроби, у которой и числитель, и знаменатель которой не превышают 9999. То же требование налагается на элементы матриц.
6. Неверное решение, решение задачи из другого варианта или задачи с измененным условием, отсутствие решения или выписанного на титульном листе ответа приводит к минимальной оценке задачи (0 баллов).
7. Отсутствие обоснования при верном решении влечет снижение оценки на 2 балла.

8. Неверный ответ (в том числе из-за ошибок округления) при верном решении снижает оценку.
9. Оценка также снижается за небрежное оформление работы (зачеркнутый текст, вставки, неаккуратные чертежи и т.п).

Образец оформления титульного листа

Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации

Кафедра «Прикладная математика»

Линейная алгебра

Контрольная работа № 1

Выполнил студент группы ФК-1-1

Бесфамильный И. О.

Работа сдана 29 февраля 2007 г.

Ответы:

Задача № 1.
СЗ: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$; СВ: $\vec{x}_1 = c_1(-9,1)^T$, $\vec{x}_2 = c_2(-37,4)^T$, где $c_1, c_2 \neq 0$.

Задача № 2.

и так далее

Контрольная работа № 1

В состав контрольной работы № 1 входят четыре задачи по темам, изучаемым в первой половине семестра: число и вектор Фробениуса неотрицательной квадратной матрицы, модель Леонтьева, задача линейного программирования об оптимальном использовании ресурсов, а также задача о нахождении собственных значений и собственных векторов матрицы (задача № 1), цель которой — напомнить студентам соответствующие понятия, играющие важную роль в теории Фробениуса.

1. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Найдите все собственные значения и собственные векторы данной матрицы.

1.1. $\begin{pmatrix} 47 & 88 \\ -20 & -37 \end{pmatrix}$.

1.2. $\begin{pmatrix} -27 & -374 \\ 3 & 40 \end{pmatrix}$.

1.3. $\begin{pmatrix} 77 & 456 \\ -12 & -71 \end{pmatrix}$.

1.4. $\begin{pmatrix} 52 & 204 \\ -12 & -47 \end{pmatrix}$.

1.5. $\begin{pmatrix} 23 & 114 \\ -3 & -14 \end{pmatrix}$.

1.6. $\begin{pmatrix} 47 & 88 \\ -20 & -37 \end{pmatrix}$.

1.7. $\begin{pmatrix} 13 & 30 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$.

1.8. $\begin{pmatrix} -19 & -120 \\ 4 & 25 \end{pmatrix}$.

1.9. $\begin{pmatrix} -93 & -700 \\ 14 & 105 \end{pmatrix}$.

1.10. $\begin{pmatrix} 30 & 100 \\ -6 & -19 \end{pmatrix}$.

1.11. $\begin{pmatrix} -19 & -24 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$.

1.12. $\begin{pmatrix} -35 & -42 \\ 36 & 43 \end{pmatrix}$.

1.13. $\begin{pmatrix} 39 & 144 \\ -8 & -29 \end{pmatrix}$.

1.14. $\begin{pmatrix} 43 & 78 \\ -18 & -32 \end{pmatrix}$.

1.15. $\begin{pmatrix} -59 & -372 \\ 10 & 63 \end{pmatrix}$.

1.16. $\begin{pmatrix} -23 & -203 \\ 4 & 34 \end{pmatrix}$.

1.17. $\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$.

1.18. $\begin{pmatrix} -10 & -26 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$.

1.19. $\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$.

1.20. $\begin{pmatrix} 19 & 16 \\ -14 & -11 \end{pmatrix}$.

1.21. $\begin{pmatrix} 157 & 780 \\ -30 & -149 \end{pmatrix}$.

1.22. $\begin{pmatrix} 27 & 66 \\ -7 & -16 \end{pmatrix}$.

1.23. $\begin{pmatrix} -41 & -315 \\ 6 & 46 \end{pmatrix}$.

1.24. $\begin{pmatrix} 97 & 570 \\ -15 & -88 \end{pmatrix}$.

1.25. $\begin{pmatrix} -61 & -576 \\ 7 & 66 \end{pmatrix}$.

1.26. $\begin{pmatrix} -122 & -650 \\ 25 & 133 \end{pmatrix}$.

1.27. $\begin{pmatrix} -88 & -288 \\ 30 & 98 \end{pmatrix}$.

1.28. $\begin{pmatrix} -97 & -735 \\ 14 & 106 \end{pmatrix}$.

1.29. $\begin{pmatrix} -95 & -204 \\ 48 & 103 \end{pmatrix}$.

1.30. $\begin{pmatrix} 76 & 666 \\ -8 & -70 \end{pmatrix}$.

2. Число и вектор Фробениуса

Найдите число Фробениуса и вектор Фробениуса матрицы A. При каких значениях α матрица αA продуктивна?

2.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 4 \\ 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

2.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 8 & 11 & 7 \\ 13 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

2.3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

2.4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 13 \\ 14 & 21 & 8 \end{pmatrix}$

2.5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 10 \\ 11 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

2.6. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 10 & 5 & 9 \\ 12 & 21 & 10 \end{pmatrix}$

2.7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 9 & 11 & 6 \\ 13 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 3 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

2.9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 9 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 9 \end{pmatrix}$

2.10. $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 12 \\ 12 & 9 & 11 \\ 16 & 21 & 12 \end{pmatrix}$

2.11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 12 & 9 \\ 14 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

2.12. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 7 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 7 \end{pmatrix}$

2.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

2.14. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 10 & 8 & 12 \\ 15 & 21 & 10 \end{pmatrix}$

2.15. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 10 & 8 & 4 \\ 11 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

2.16. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \\ 8 & 15 & 6 \end{pmatrix}$

2.17. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 11 \\ 13 & 15 & 7 \end{pmatrix}$

2.18. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ 11 & 10 & 13 \\ 17 & 21 & 11 \end{pmatrix}$

2.19. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 7 \\ 10 & 18 & 9 \end{pmatrix}$

2.20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 8 \\ 10 & 15 & 7 \end{pmatrix}$

2.21. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

2.22. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 11 \\ 11 & 8 & 7 \\ 13 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

2.23. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

2.24. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

2.25. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 7 & 6 & 9 \\ 11 & 15 & 7 \end{pmatrix}$

2.26. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 10 \\ 11 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

2.27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 9 & 8 \\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

2.28. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 7 & 4 & 9 \\ 10 & 18 & 7 \end{pmatrix}$

2.29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 8 & 12 & 6 \\ 13 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

2.30. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 7 \\ 13 & 12 & 10 \end{pmatrix}$

3. Модель Леонтьева

Рассматривается двухотраслевая модель экономики. Задана балансовая таблица за прошедший год.

(1) Найдите валовой выпуск каждой отрасли в прошедшем году; запишите вектор валового выпуска $\vec{d}$ для прошедшего года.
(2) Найдите матрицу Леонтьева A.
(3) Найдите матрицу полных затрат H.
(4) В следующем году конечное потребление продукции отрасли I увеличится на a%, а отрасли II — уменьшится на b%. Найдите конечное потребление продукции каждой отрасли в следующем году. Запишите вектор конечного потребления $\vec{x}\,'$ для следующего года.
(5) Найдите валовой выпуск каждой отрасли в следующем году; запишите вектор валового выпуска $\vec{d}\,'$ для прошедшего года.
(6) На сколько процентов изменился валовой выпуск каждой отрасли в следующем году по сравнению с прошедшим?
(7) Известен вектор норм добавленной стоимости $\vec{v}$ в прошедшем году. Найдите равновесные цены продукции каждой отрасли в прошедшем году. Запишите вектор равновесных цен $\vec{p}$.

3.1.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	6	7	2
II	4	4	1

$a = 20\,\%$, $b = 30\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3.2.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	5	4	5
II	3	3	3

$a = 20\,\%$, $b = 40\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.3.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	1	5	1
II	6	7	7

$a = 50\,\%$, $b = 70\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3.4.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	5	7	3
II	3	6	4

$a = 40\,\%$, $b = 60\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.5.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	5	1	1
II	1	1	1

$a = 50\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.6.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	7	3	6
II	4	5	6

$a = 20\,\%$, $b = 10\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.7.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	4	7	5
II	7	1	5

$a = 10\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.8.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	2	2	3
II	3	7	7

$a = 20\,\%$, $b = 10\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.9.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	3	5	5
II	7	3	6

$a = 70\,\%$, $b = 50\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.10.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	2	1	5
II	3	2	1

$a = 30\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.11.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	2	1	2
II	3	3	5

$a = 50\,\%$, $b = 30\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.12.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	2	2	7
II	1	2	1

$a = 10\,\%$, $b = 70\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.13.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	6	4	2
II	4	3	3

$a = 40\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.14.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	5	5	5
II	1	5	7

$a = 50\,\%$, $b = 10\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.15.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	5	3	2
II	6	7	5

$a = 70\,\%$, $b = 60\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.16.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	2	2	2
II	4	2	2

$a = 60\,\%$, $b = 60\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.17.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	5	3	1
II	5	6	3

$a = 30\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.18.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	3	1	6
II	2	2	3

$a = 40\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.19.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	7	6	1
II	6	6	7

$a = 70\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3.20.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	2	6	1
II	7	1	5

$a = 20\,\%$, $b = 40\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.21.

Отрасли производства	Произв. потребление: отрасль I	Произв. потребление: отрасль II	Конечное потребление
I	3	2	6
II	2	3	3

$a = 30\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.22.

Отрасли производства	Произв. потребление: отрасль I	Произв. потребление: отрасль II	Конечное потребление
I	2	3	1
II	3	1	2

$a = 40\,\%$, $b = 20\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.23.

Отрасли производства	Произв. потребление: отрасль I	Произв. потребление: отрасль II	Конечное потребление
I	6	5	7
II	7	5	2

$a = 40\,\%$, $b = 60\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.24.

Отрасли производства	Произв. потребление: отрасль I	Произв. потребление: отрасль II	Конечное потребление
I	4	4	7
II	1	1	2

$a = 20\,\%$, $b = 30\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.25.

Отрасли производства	Произв. потребление: отрасль I	Произв. потребление: отрасль II	Конечное потребление
I	3	1	5
II	3	4	4

$a = 10\,\%$, $b = 10\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.26.

Отрасли производства	Произв. потребление: отрасль I	Произв. потребление: отрасль II	Конечное потребление
I	3	3	3
II	6	3	2

$a = 30\,\%$, $b = 60\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.27.

Отрасли производства	Произв. потребление: отрасль I	Произв. потребление: отрасль II	Конечное потребление
I	3	4	1
II	6	7	1

$a = 70\,\%$, $b = 70\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3.28.

Отрасли производства	Произв. потребление: отрасль I	Произв. потребление: отрасль II	Конечное потребление
I	2	2	2
II	2	6	2

$a = 70\,\%$, $b = 50\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.29.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	7	7	5
II	5	7	4

$a = 40\,\%$, $b = 30\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.30.

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	1	4	3
II	5	3	7

$a = 70\,\%$, $b = 10\,\%$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4. Задача линейного программирования

Для производства трех видов продукции A, B, C используется три вида сырья I, II, III. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции каждого вида, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице. Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли при условии, что сырье III должно быть полностью израсходовано.

(1) Построить математическую модель задачи.
(2) Привести задачу к стандартной форме.
(3) Решить полученную задачу графическим методом.
(4) Привести задачу к канонической форме.
(5) Решить полученную задачу симплекс-методом.
(6) Проанализировать результаты решения.

4.1.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	6	1	32
II	6	4	1	32
III	2	2	1	12
Прибыль	4	5	1	

4.3.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	6	1	32
II	6	4	1	32
III	2	2	1	12
Прибыль	7	4	1	

4.2.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	6	1	32
II	6	4	1	32
III	2	2	1	12
Прибыль	4	7	1	

4.4.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	6	1	32
II	6	4	1	32
III	2	2	1	12
Прибыль	5	4	1	

4.5.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	12	1	64
II	6	8	1	64
III	2	4	1	24
Прибыль	2	5	1	

4.10.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	8	6	1	64
II	12	4	1	64
III	4	2	1	24
Прибыль	7	3	1	

4.6.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	12	1	64
II	6	8	1	64
III	2	4	1	24
Прибыль	3	7	1	

4.11.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	8	6	1	64
II	12	4	1	64
III	4	2	1	24
Прибыль	10	6	1	

4.7.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	12	1	64
II	6	8	1	64
III	2	4	1	24
Прибыль	7	3	1	

4.12.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	8	6	1	64
II	12	4	1	64
III	4	2	1	24
Прибыль	5	2	1	

4.8.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	12	1	64
II	6	8	1	64
III	2	4	1	24
Прибыль	6	9	1	

4.13.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	9	8	1	66
II	9	4	1	48
III	3	2	1	18
Прибыль	1	5	1	

4.9.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	8	6	1	64
II	12	4	1	64
III	4	2	1	24
Прибыль	2	3	1	

4.14.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	9	8	1	66
II	9	4	1	48
III	3	2	1	18
Прибыль	5	3	1	

4.15.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	9	8	1	66
II	9	4	1	48
III	3	2	1	18
Прибыль	7	5	1	

4.16.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	9	8	1	66
II	9	4	1	48
III	3	2	1	18
Прибыль	5	2	1	

4.17.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	9	1	48
II	8	9	1	66
III	2	3	1	18
Прибыль	1	5	1	

4.18.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	9	1	48
II	8	9	1	66
III	2	3	1	18
Прибыль	5	7	1	

4.19.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	9	1	48
II	8	9	1	66
III	2	3	1	18
Прибыль	10	25	1	

4.20.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	9	1	48
II	8	9	1	66
III	2	3	1	18
Прибыль	7	1	1	

4.21.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	18	1	96
II	6	12	1	96
III	2	6	1	36
Прибыль	1	13	1	

4.22.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	18	1	96
II	6	12	1	96
III	2	6	1	36
Прибыль	5	12	1	

4.23.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	18	1	96
II	6	12	1	96
III	2	6	1	36
Прибыль	5	17	1	

4.24.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	4	18	1	96
II	6	12	1	96
III	2	6	1	36
Прибыль	13	2	1	

4.25.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	12	6	1	96
II	18	4	1	96
III	6	2	1	36
Прибыль	3	13	1	

4.28.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	12	6	1	96
II	18	4	1	96
III	6	2	1	36
Прибыль	9	1	1	

4.26.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	12	6	1	96
II	18	4	1	96
III	6	2	1	36
Прибыль	8	3	1	

4.29.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	16	10	1	112
II	12	4	1	64
III	4	2	1	24
Прибыль	1	6	1	

4.27.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	12	6	1	96
II	18	4	1	96
III	6	2	1	36
Прибыль	10	3	1	

4.30.

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	16	10	1	112
II	12	4	1	64
III	4	2	1	24
Прибыль	15	5	1	

Решение варианта № 30

1. Найдите все собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 76 & 666 \\ -8 & -70 \end{pmatrix}.$$

Решение. (1) Найдем собственные значения матрицы A; они являются корнями ее характеристического многочлена $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, где E — единичная матрица. Имеем

$$\det \begin{pmatrix} 76-\lambda & 666 \\ -8 & -70-\lambda \end{pmatrix} = (76-\lambda)(-70-\lambda) + 8 \cdot 666 = \lambda^2 - 6\lambda + 8;$$

корни этого квадратного трехчлена суть $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 4$.

(2) Собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_0, являются решениями системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda_0 E)\vec{x} = \vec{0}$.

Для собственного значения $\lambda_1 = 2$ матрица $A - \lambda_1 E$ равна

$$\begin{pmatrix} 74 & 666 \\ -8 & -72 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определитель этой матрицы равен нулю, строки ее линейно зависимы (пропорциональны), поэтому соответствующая система состоит из единственного уравнения:

$$74x_1 + 666x_2 = 0 \iff -8x_1 - 72x_2 = 0 \iff x_1 + 9x_2 = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\vec{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c_1 \neq 0$ — произвольная постоянная.

Для собственного значения $\lambda_2 = 4$ аналогично получаем

$$\vec{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -37 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$; соответствующие собственные векторы $\vec{x}_1 = c_1(-9, 1)^T$, $\vec{x}_2 = c_2(-37, 4)^T$, где $c_1, c_2 \neq 0$. $\square$

2. Найдите число Фробениуса и вектор Фробениуса матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 7 \\ 13 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

При каких значениях α матрица αA продуктивна?

Решение. (1) Поскольку сумма элементов каждого столбца матрицы равна 27, то число Фробениуса этой матрицы также равно $\lambda_A = 27$ (см. соответствующую теорему в теоретическом курсе).

(2) Чтобы найти вектор Фробениуса, необходимо решить систему линейных однородных уравнений $(A - \lambda_A E)\vec{x} = \vec{0}$. Матрица $A - \lambda_A E$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -23 & 6 & 10 \\ 10 & -18 & 7 \\ 13 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы с этой матрицей метод Гаусса не очень удобен; поступим следующим образом. Поскольку определитель матрицы $A - \lambda_A E$ равен нулю, строки ее линейно зависимы, так что одна из строк является линейной комбинацией остальных и может быть удалена из матрицы. Удалим первую строку;

оставшиеся две строки линейно независимы (поскольку они не пропорциональны), а соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 10x_1 - 18x_2 + 7x_3 = 0, \\ 13x_1 + 12x_2 - 17x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x_1 - 18x_2 = -7x_3, \\ 13x_1 + 12x_2 = 17x_3. \end{cases} \tag{1}$$

Положив $x_3 = 1$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 10x_1 - 18x_2 = -7, \\ 13x_1 + 12x_2 = 17, \end{cases}$$

решение которой легко получить с помощью формул Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -18 \\ 17 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -18 \\ 13 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{222}{354} = \frac{37}{59}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 13 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -18 \\ 13 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{261}{354} = \frac{87}{118}.$$

Таким образом, все решения системы (7) имеют вид

$$\vec{x} = c \begin{pmatrix} 37/59 \\ 87/118 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c — произвольная постоянная. Согласно определению собственный вектор ненулевой, поэтому все собственные векторы матрицы A, отвечающие собственному значению $\lambda_A = 27$, описываются формулой

$$\vec{x}_{\text{С.В.}} = s \begin{pmatrix} 74 \\ 87 \\ 118 \end{pmatrix},$$

где $s \neq 0$, а все векторы Фробениуса матрицы A — формулой

$$\vec{x}_A = p \begin{pmatrix} 74 \\ 87 \\ 118 \end{pmatrix},$$

где $p > 0$, поскольку по определению вектор Фробениуса неотрицателен.[1]

(3) Согласно второму критерию продуктивности матрица продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы. Поскольку собственные значения матрицы αA отличаются от собственных значений матрицы A в α раз, число Фробениуса матрицы αA равно 27α. Для продуктивности матрицы αA необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha < 1/27$ (условие $\alpha > 0$ требуется для неотрицательности матрицы αA).

[1] Обратите внимание на различие понятий общего решения системы линейных однородных уравнений (в данном контексте), собственного вектора и вектора Фробениуса.

Ответ: число Фробениуса $\lambda_A = 27$, вектор Фробениуса $\vec{x}_A = p(74, 87, 118)^T$, где $p > 0$. Матрица αA продуктивна при $0 < \alpha < 1/27$. □

3. Рассматривается двухотраслевая модель экономики. Задана балансовая таблица за прошедший год:

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление
	отрасль I	отрасль II	
I	1	4	3
II	5	3	7

(1) Найдите валовой выпуск каждой отрасли в прошедшем году; запишите вектор валового выпуска $\vec{x}$ для прошедшего года.
(2) Найдите матрицу Леонтьева A.
(3) Найдите матрицу полных затрат H.
(4) В следующем году конечное потребление продукции отрасли I увеличится на 70 %, а отрасли II — уменьшится на 10 %. Найдите конечное потребление продукции каждой отрасли в следующем году. Запишите вектор конечного потребления $\vec{d}'$ для следующего года.
(5) Найдите валовой выпуск каждой отрасли в следующем году; запишите вектор валового выпуска $\vec{x}\,'$ для следующего года.
(6) На сколько процентов изменился валовой выпуск каждой отрасли в следующем году по сравнению с прошедшим?
(7) Известен вектор норм добавленной стоимости $\vec{v} = (5, 5)^T$ в прошедшем году. Найдите равновесные цены продукции каждой отрасли в прошедшем году. Запишите вектор равновесных цен $\vec{p}$.

Решение. (1) Валовой выпуск продукции по каждой из отраслей получается сложением объемов производственного и конечного потребления по каждой из отраслей:

Отрасли производства	Произв. потребление		Конечное потребление	Валовой выпуск
	отрасль I	отрасль II		
I	1	4	3	$1+4+3=8$
II	5	3	7	$5+3+7=15$

Таким образом, вектор валового выпуска для прошедшего года равен $\vec{x} = (8, 15)^T$.

(2) Элементы a_{ij} матрицы Леонтьева вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},$$

где x_{ij} — объем производственного потребления продукции отрасли i отраслью j, x_j — валовой выпуск отрасли j. Имеем:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{1}{8} = 0.125, \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{4}{15} = 0.267,$$
$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{5}{8} = 0.625, \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{3}{15} = 0.2,$$
$$A = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.267 \\ 0.625 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(3) Матрицу полных затрат H найдем по формуле $H = (E - A)^{-1}$; имеем

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 - 0.125 & -0.267 \\ -0.625 & 1 - 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.875 & -0.267 \\ -0.625 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Обращение матрицы второго порядка удобно провести с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Согласно этой формуле

$$H = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.875 & -0.267 \\ -0.625 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{0.875 \cdot 0.8 - 0.267 \cdot 0.625} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.267 \\ 0.625 & 0.875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1.17 & 1.64 \end{pmatrix}.$$

(4) Конечное потребление в следующем году изменяется по сравнению с прошедшим годом; объем конечного потребления продукции отрасли I увеличивается на 70% и становится равным

$$d_1' = 3 \cdot \left(1 + \frac{70\%}{100\%}\right) = 5.1;$$

аналогично для второй отрасли

$$d_2' = 7 \cdot \left(1 - \frac{10\%}{100\%}\right) = 6.3.$$

Таким образом, вектор конечного потребления для следующего года равен $\vec{d}\,' = (5.1, 6.3)^T$.

(5) Вектор валового выпуска $\vec{x}$ связан с вектором конечного потребления $\vec{d}$ уравнением Леонтьева:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{d},$$

откуда

$$(E - A)\vec{x} = \vec{d} \iff \vec{x} = (E - A)^{-1}\vec{d} = H\vec{d}.$$

Поэтому вектор валового выпуска $\vec{x}\,'$ для следующего года равен

$$\vec{x}\,' = H\vec{d}\,' = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1.17 & 1.64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.1 \\ 6.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.8 \\ 16.3 \end{pmatrix}.$$

(6) Найдем, на сколько процентов изменился валовой выпуск по каждой отрасли:

$$\%\Delta x_1 = \frac{x_1' - x_1}{x_1} \cdot 100\% = \frac{10.8 - 8}{8} \cdot 100\% = 35\%,$$
$$\%\Delta x_2 = \frac{x_2' - x_2}{x_2} \cdot 100\% = \frac{16.3 - 15}{15} \cdot 100\% = 8.7\%;$$

валовой выпуск обеих отраслей увеличился.

(7) Вектор равновесных цен $\vec{p}$ находим с помощью «двойственного» уравнения Леонтьева

$$\vec{p} = A^T\vec{p} + \vec{v},$$

где $\vec{v}$ — вектор норм добавленной стоимости. Имеем

$$\vec{p} = H^T\vec{v} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.17 \\ 0.5 & 1.64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.4 \\ 10.7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$, (2) $A = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.267 \\ 0.625 & 0.2 \end{pmatrix}$, (3) $H = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1.17 & 1.64 \end{pmatrix}$,
(4) $\vec{d}\,' = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 6.3 \end{pmatrix}$,
(5) $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 10.8 \\ 16.3 \end{pmatrix}$, (6) $\%\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 35\% \\ 8.7\% \end{pmatrix}$, (7) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 13.4 \\ 10.7 \end{pmatrix}$. □

4. Для производства трех видов продукции A, B, C используется три вида сырья I, II, III. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции каждого вида, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице:

Сырье	Продукция			Запас сырья
	A	B	C	
I	16	10	1	112
II	12	4	1	64
III	4	2	1	24
Прибыль	15	5	1	

Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли при условии, что сырье III должно быть полностью израсходовано.

(1) Построить математическую модель задачи.
(2) Привести задачу к стандартной форме.
(3) Решить полученную задачу графическим методом.
(4) Привести задачу к канонической форме.
(5) Решить полученную задачу симплекс-методом.
(6) Проанализировать результаты решения.

Решение. (1) Обозначив через x_1, x_2, x_3 неотрицательные[2] объемы выпуска продукции вида A, B, C соответственно, видим, что прибыль, полученная при реализации 15 единиц продукции A, 5 единиц продукции B и 1 единицы продукции C, равна $15x_1 + 5x_2 + x_3$, так что задача состоит в максимизации целевой функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = 15x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max .$$

Ограниченность ресурсов сырья I и II приводит к неравенствам

$$16x_1 + 10x_2 + x_3 \leqslant 112, \quad 12x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 64.$$

Ограниченность ресурсов сырья III вместе с требованием, чтобы сырье III было полностью израсходовано, приводит к уравнению

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 24.$$

Итак, математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 15x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max, \tag{2a}$$

$$16x_1 + 10x_2 + x_3 \leqslant 112, \tag{2b}$$

$$12x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 64, \tag{2c}$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 24, \tag{2d}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \tag{2e}$$

(2) Приведем задачу к стандартной форме, т.е. к виду, где все ограничения имеют форму неравенств. Выразив из ограничения-уравнения (2d) одну из переменных, например x_3,

$$x_3 = 24 - 4x_1 - 2x_2, \tag{3}$$

поставим полученное выражение в целевую функцию (2a):

$$f(x_1, x_2, x_3) = 15x_1 + 5x_2 + (24 - 4x_1 - 2x_2) = 11x_1 + 3x_2 + 24,$$

в ограничения-неравенства:

$$16x_1 + 10x_2 + (24 - 4x_1 - 2x_2) \leqslant 112 \iff 12x_1 + 8x_2 \leqslant 88 \iff 3x_1 + 2x_2 \leqslant 22,$$
$$12x_1 + 4x_2 + (24 - 4x_1 - 2x_2) \leqslant 64 \iff 8x_1 + 2x_2 \leqslant 40 \iff 4x_1 + x_2 \leqslant 20.$$

Кроме того, учтем тот факт, что $x_3 \geqslant 0$ (см. (2e)), откуда получаем еще одно ограничение неравенство

$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \iff 2x_1 + x_2 \leqslant 12.$$

[2] Очевидно, должны выполняться неравенства $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

Итак, получена стандартная форма задачи:

$$f^*(x_1, x_2) = 11x_1 + 3x_2 + 24 \to \max, \tag{4a}$$
$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 22, \tag{4b}$$
$$4x_1 + x_2 \leqslant 20, \tag{4c}$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 12, \tag{4d}$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{4e}$$

(3) Решим полученную задачу графическим методом; это возможно, так как число неизвестных в ней равно двум. Сначала изобразим на координатной плоскости Ox_1x_2 область допустимых значений неизвестных. Нетривиальные ограничения-неравенства определяют полуплоскости, содержащие начало координат и имеющие в качестве границ прямые

$$3x_1 + 2x_2 = 22 \iff \frac{x_1}{22/3} + \frac{x_2}{11} = 1, \tag{5a}$$
$$4x_1 + x_2 = 20 \iff \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{20} = 1, \tag{5b}$$
$$2x_1 + x_2 + 12 \iff \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} = 1; \tag{5c}$$

при построении чертежа учтем, что прямая на плоскости, задаваемая уравнением вида

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1,$$

пересекает координатные оси Ox_1 и Ox_2 в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$ соответственно.

Выполнив построение, получаем пятиугольник $OABCD$ с вершинами

$$O(0,0), \quad A(0,11), \quad B(2,8), \quad C(4,4), \quad D(5,0).$$

Точки A и D использовались при построении чертежа, так что их координаты очевидны. Точка B является пересечением прямых (5a) и (5c), а точка C — пересечением прямых (5b) и (5c), так что координаты этих точек вычисляются как решения линейных систем

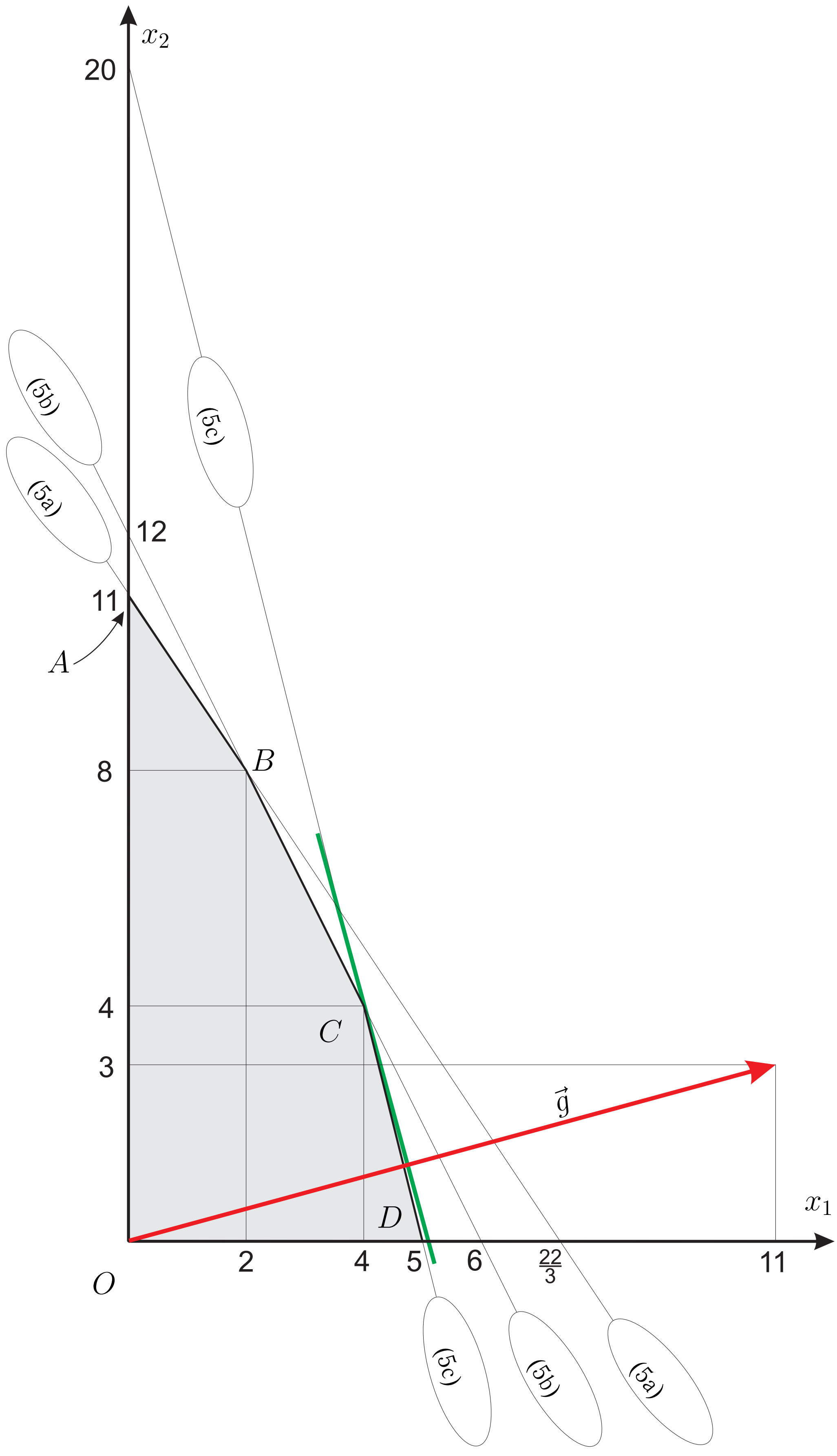
$$B : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 22, \\ 2x_1 + x_2 = 12, \end{cases} \qquad C : \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 20, \\ 2x_1 + x_2 = 12. \end{cases}$$

Вектор градиента целевой функции (4a) равен $\vec{g} = (11, 3)^T$; также изобразим его на чертеже. Значения целевой функции (4a) во всех точках любой прямой, перпендикулярной этому вектору, одинаковы, а при сдвиге указанной прямой в направлении вектора $\vec{g}$ значения целевой функции увеличиваются. Используя чертеж, находим, что наибольшее значение целевой функции в пятиугольнике $OABCD$ достигается в точке $C(4, 4)$ и равно

$$f^*(4, 4) = 11 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 24 = 80.$$

Соответствующее значение переменной x_3 вычисляется с помощью (3) и равно

$$x_3 = 24 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 0.$$



Итак, максимальное значение целевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ достигается при $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$ и равно 80.

Отметим, что использование одного лишь чертежа в данной задаче приводит к затруднению при выборе точки максимума целевой функции: отрезок CD на чертеже выглядит перпендикулярным вектору градиента $\vec{g}$. В этом случае приходится прибегать к методу перебора вершин, вычисляя значения целевой функции $f^*(x_1, x_2)$ в точках C и D и выбирая наибольшее из этих значений:

$$f^*(C) = f^*(4,4) = 80, \quad f^*(D) = f^*(5,0) = 79.$$

(4) Приведем задачу (2) к канонической форме, т.е. к виду, где все нетривиальные ограничения имеют форму уравнений. Для этого достаточно ввести в неравенства (2b) и (2c) балансовые переменные x_4 и x_5 соответственно. Задача принимает вид

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 15x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max, \tag{6a}$$

$$16x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 = 112, \tag{6b}$$

$$12x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 64, \tag{6c}$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 24, \tag{6d}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \tag{6e}$$

(5) Решим полученную задачу симплекс-методом. Сначала необходимо получить начальный опорный план задачи, т.е. неотрицательное базисное решение системы нетривиальных ограничений-уравнений (6b)–(6d). Запишем расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 16 & 10 & 1 & 1 & 0 & 112 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 1 & 64 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right).$$

Вычитая третью строку из первой и второй, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 8 & 0 & 1 & 0 & 88 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right).$$

Очевидно, неизвестные x_3, x_4, x_5 являются базисными, x_1 и x_2 — свободными; взяв значения свободных неизвестных равными нулю, для базисных получаем $x_3 = 24$, $x_4 = 88$, $x_5 = 40$. Итак, найден начальный опорный план

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 24, \quad x_4 = 88, \quad x_5 = 40.$$

Выразим целевую функцию (6a) через свободные неизвестные x_1 и x_2. Из (6d) получаем $x_3 = 24 - 4x_1 - 2x_2$ (ср. (3)); подставляя это выражение в (6a), получим

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 11x_1 + 3x_2 + 24$$

(ср. (4a)); запишем это выражение в виде

$$f - 11x_1 - 3x_2 = 24.$$

Теперь можно заполнить первую симплекс-таблицу:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	С.Ч.
x_3	4	2	1	0	0	24
x_4	12	8	0	1	0	88
x_5	8	2	0	0	1	40
f	$\boxed{-11}$	-3	0	0	0	24

В f-строке имеются отрицательные элементы (не считая свободного члена); следовательно, начальный опорный план не является оптимальным. Найдем минимальный отрицательный элемент f-строки: это -11 в столбце «x_1»; этот столбец будет ведущим, т.е. в следующей симплекс-таблице неизвестная x_1 будет включена в базис вместо одной из x_3, x_4, x_5.

Так как среди элементов ведущего столбца «x_1» имеются положительные, то существует новый опорный план, более близкий к оптимальному. Для его построения определим, какую из неизвестных x_3, x_4, x_5 нужно исключить из базиса. Для этого вычисляем симплексные отношения (отношения свободных членов к соответствующим положительным элементам ведущего столбца) и выбираем среди них минимальное:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	С.Ч.	Симпл. отн.
x_3	4	2	1	0	0	24	$24/4 = 6$
x_4	12	8	0	1	0	88	$88/12 = 22/3$
x_5	$\boxed{8}$	2	0	0	1	40	$40/8 = 5$
f	-11	-3	0	0	0	24	

Минимальное симплексное отношение, равное 5, получилось в строке «x_5», т.е. переменную x_5 нужно исключить из базиса.

Проведем одну итерацию метода Гаусса. Столбцы «x_3» и «x_4» останутся базисными и в новой симплекс-таблице, а столбец «x_1» следует сделать единичным. Сначала сделаем единичным ведущий элемент (он выделен в предыдущей таблице), для чего разделим на 8 ведущую строку:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	С.Ч.
x_3	4	2	1	0	0	24
x_4	12	8	0	1	0	88
x_5	$\boxed{1}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	5
f	-11	-3	0	0	0	24

Теперь выполняем следующие элементарные преобразования матрицы:

(i) к строке «x_3» прибавляем строку «x_5», умноженную на -4;

(ii) к строке «x_4» прибавляем строку «x_5», умноженную на -12;

(iii) к строке «f» прибавляем строку «x_5», умноженную на 11.

В результате получается вторая симплекс-таблица:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	С.Ч.
x_3	0	1	1	0	-4	4
x_4	0	5	0	1	-12	28
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	5
f	0	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	0	0	$\frac{11}{8}$	79

В f-строке все еще имеются отрицательные элементы, так что план не является оптимальным. Единственный минимальный отрицательный элемент f-строки равен $-1/4$; он находится в столбце «x_2». Этот столбец — ведущий, т.е. в следующей симплекс-таблице неизвестная x_2 будет включена в базис вместо одной из x_3, x_4, x_1.

Так как среди элементов ведущего столбца «x_2» имеются положительные, то существует новый опорный план, более близкий к оптимальному. Вычислим симплексные отношения и выбираем среди них минимальное:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	С.Ч.	Симпл. отн.
x_3	0	$\boxed{1}$	1	0	-4	4	$4/1 = 1$
x_4	0	5	0	1	-12	28	$28/5$
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	5	$5/\frac{1}{4} = 20$
f	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{11}{8}$	79	

Ведущей строкой является строка «x_3»; ведущий элемент равен 1. Столбцы «x_1», «x_4» по-прежнему остаются базисными, а вместо «x_3» базисным станет столбец «x_2»; для этого нужно сделать столбец «x_2» единичным. Выполним следующие элементарные преобразования:

(i) к строке «x_4» прибавляем строку «x_3», умноженную на -5;
(ii) к строке «x_1» прибавляем строку «x_3», умноженную на $-1/4$;
(iii) к строке «f» прибавляем строку «x_3», умноженную на $1/4$.

В результате получается следующая симплекс-таблица:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	С.Ч.
x_2	0	1	1	0	-4	$\boxed{4}$
x_4	0	0	-5	1	8	8
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{8}$	$\boxed{4}$
f	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	$\boxed{80}$

Теперь в f-строке нет отрицательных элементов, так что оптимальный план найден. Согласно этому плану максимальное значение целевой функции, равное 80, достигается при значениях базисных переменных $x_1 = 4$ и $x_2 = 4$ (значение $x_4 = 8$ игнорируем, поскольку x_4 — балансовая переменная, отсутствующая в исходной постановке задачи) и значении $x_3 = 0$ свободной переменной (значение x_5 также игнорируется).

Ответ: Максимальное значение целевой функции равно $f_{\max} = f(4, 4, 0) = 80$.

□

Контрольная работа № 2

1. Симплекс-метод

Дана задача линейного программирования.

(1) Составьте для данной задачи двойственную.

(2) Решите двойственную задачу графическим методом.

(3) Используя теоремы двойственности, найдите решение исходной задачи.

1.1. $\begin{cases} f = 26x_1 + x_2 + 44x_3 \to \min \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 - 5x_2 + 8x_3 \geqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} f = 44x_1 + 58x_2 + 3x_3 \to \min \\ -7x_1 + 10x_2 - 3x_3 \geqslant 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} f = 19x_1 - 22x_2 + 64x_3 \to \min \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geqslant 3 \\ -x_1 - 6x_2 + 7x_3 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} f = 19x_1 - 18x_2 + 53x_3 \to \min \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geqslant 2 \\ -x_1 - 6x_2 + 7x_3 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} f = 28x_1 + 68x_2 + 8x_3 \to \min \\ -3x_1 + 9x_2 - 6x_3 \geqslant 3 \\ -4x_1 - 4x_2 + 8x_3 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} f = 71x_1 + 80x_2 + 66x_3 \to \min \\ -7x_1 + 10x_2 - 3x_3 \geqslant 7 \\ -4x_1 - 5x_2 + 9x_3 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} f = 15x_1 + 24x_2 + 13x_3 \to \min \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 \geqslant 1 \\ -3x_1 - 4x_2 + 7x_3 \geqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} f = 72x_1 + 78x_2 + 71x_3 \to \min \\ -7x_1 + 14x_2 - 7x_3 \geqslant 7 \\ -5x_1 - x_2 + 6x_3 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} f = 91x_1 + 63x_2 + 92x_3 \to \min \\ -3x_1 + 7x_2 - 4x_3 \geqslant 3 \\ -7x_1 - 5x_2 + 12x_3 \geqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} f = 48x_1 + 42x_2 + 75x_3 \to \min \\ -6x_1 + 11x_2 - 5x_3 \geqslant 6 \\ -3x_1 - 6x_2 + 9x_3 \geqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} f = 41x_1 + 37x_2 + 17x_3 \to \min \\ -6x_1 + 7x_2 - x_3 \geqslant 6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} f = 18x_1 + 12x_2 + 30x_3 \to \min \\ -7x_1 + 10x_2 - 3x_3 \geqslant 7 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.13. $$\begin{cases} f = 48x_1 + 60x_2 + 45x_3 \to \min \\ -5x_1 + 11x_2 - 6x_3 \geqslant 5 \\ -2x_1 - 7x_2 + 9x_3 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.14. $$\begin{cases} f = 41x_1 + 16x_2 + 78x_3 \to \min \\ -5x_1 + 11x_2 - 6x_3 \geqslant 5 \\ -3x_1 - 4x_2 + 7x_3 \geqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.15. $$\begin{cases} f = 113x_1 + 151x_2 + 52x_3 \to \min \\ -6x_1 + 12x_2 - 6x_3 \geqslant 6 \\ -7x_1 - x_2 + 8x_3 \geqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.16. $$\begin{cases} f = 8x_1 + 10x_2 + 9x_3 \to \min \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 \geqslant 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.17. $$\begin{cases} f = 77x_1 + 107x_2 + 29x_3 \to \min \\ -3x_1 + 8x_2 - 5x_3 \geqslant 3 \\ -7x_1 - x_2 + 8x_3 \geqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.18. $$\begin{cases} f = 85x_1 + 101x_2 + 50x_3 \to \min \\ -3x_1 + 9x_2 - 6x_3 \geqslant 3 \\ -7x_1 - x_2 + 8x_3 \geqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.19. $$\begin{cases} f = 30x_1 + 42x_2 + 30x_3 \to \min \\ -4x_1 + 7x_2 - 3x_3 \geqslant 4 \\ -2x_1 - 7x_2 + 9x_3 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.20. $$\begin{cases} f = 40x_1 + 48x_2 + 24x_3 \to \min \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geqslant 2 \\ -7x_1 - 2x_2 + 9x_3 \geqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.21. $$\begin{cases} f = 25x_1 + 2x_2 + 61x_3 \to \min \\ -5x_1 + 8x_2 - 3x_3 \geqslant 5 \\ -x_1 - 6x_2 + 7x_3 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.22. $$\begin{cases} f = 26x_1 + 26x_2 + 26x_3 \to \min \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geqslant 2 \\ -5x_1 - 3x_2 + 8x_3 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.23. $$\begin{cases} f = 17x_1 + 19x_2 + 11x_3 \to \min \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 2 \\ -x_1 - 5x_2 + 6x_3 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.24. $$\begin{cases} f = 38x_1 + 42x_2 + 32x_3 \to \min \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 \geqslant 2 \\ -4x_1 - 6x_2 + 10x_3 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.25. $$\begin{cases} f = 32x_1 + 51x_2 + 11x_3 \to \min \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 \geqslant 2 \\ -4x_1 - 3x_2 + 7x_3 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.26. $$\begin{cases} f = 95x_1 + 55x_2 + 115x_3 \to \min \\ -7x_1 + 8x_2 - x_3 \geqslant 7 \\ -5x_1 - 5x_2 + 10x_3 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.27. $$\begin{cases} f = 95x_1 + 91x_2 + 65x_3 \to \min \\ -5x_1 + 8x_2 - 3x_3 \geqslant 5 \\ -7x_1 - x_2 + 8x_3 \geqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.28. $$\begin{cases} f = 105x_1 + 90x_2 + 120x_3 \to \min \\ -7x_1 + 12x_2 - 5x_3 \geqslant 7 \\ -7x_1 - 3x_2 + 10x_3 \geqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.29. $\begin{cases} f = 20x_1 + 60x_2 - 20x_3 \to \min \\ -2x_1 + 8x_2 - 6x_3 \geqslant 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} f = 74x_1 + 106x_2 + 20x_3 \to \min \\ -6x_1 + 10x_2 - 4x_3 \geqslant 6 \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

2. Транспортная задача

Имеется три склада, содержащих некоторое количество однотипной продукции, а также четыре потребителя, нуждающиеся в определенном количестве данной продукции. При перевозке одной единицы продукции со склада i потребителю j возникают издержки. Запасы продукции на складах a_i, потребности потребителей b_j и тарифы перевозок c_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, приведены в таблице. Требуется найти такой план перевозок, при котором общие затраты на перевозку будут минимальны.

(1) Проверьте задачу на сбалансированность.
(2) Постройте опорный план методом минимального элемента.
(3) С помощью метода потенциалов найдите оптимальное решение задачи.

2.1.

$a_i \backslash b_j$	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

2.6.

$a_i \backslash b_j$	12	6	8	4
10	2	3	5	1
5	4	2	6	5
15	7	10	3	6

2.2.

$a_i \backslash b_j$	20	30	30	20
23	4	3	6	5
38	3	4	5	6
39	2	5	4	7

2.7.

$a_i \backslash b_j$	10	20	40	30
31	7	2	3	1
19	4	10	5	2
50	1	3	4	5

2.3.

$a_i \backslash b_j$	40	40	30	50
40	3	1	5	4
60	6	1	2	3
60	4	4	5	7

2.8.

$a_i \backslash b_j$	100	150	30	20
120	4	1	2	3
100	7	5	3	4
80	10	2	4	5

2.4.

$a_i \backslash b_j$	20	20	30	30
20	2	4	8	2
30	4	6	10	3
50	2	5	9	7

2.9.

$a_i \backslash b_j$	200	100	50	150
200	2	4	5	7
200	1	8	9	10
100	3	2	4	6

2.5.

$a_i \backslash b_j$	100	100	150	150
100	2	1	3	4
150	4	3	1	7
250	5	8	9	15

2.10.

$a_i \backslash b_j$	10	15	13	17
15	3	1	3	9
35	10	2	4	5
5	9	1	5	6

2.11.

$a_i \backslash b_j$	200	200	50	150
300	7	5	4	3
100	1	2	5	4
200	3	2	4	5

2.12.

$a_i \backslash b_j$	10	15	23	17
20	10	5	4	2
25	2	3	4	5
20	7	8	6	4

2.13.

$a_i \backslash b_j$	100	50	170	30
100	3	8	2	1
180	9	7	6	5
70	2	3	4	4

2.14.

$a_i \backslash b_j$	13	17	23	27
30	3	2	4	5
25	6	1	4	3
25	7	5	3	5

2.15.

$a_i \backslash b_j$	110	130	70	90
100	4	2	3	5
200	5	4	1	3
100	4	3	4	4

2.16.

$a_i \backslash b_j$	23	19	18	10
30	1	3	4	5
20	10	8	2	2
20	3	3	6	5

2.17.

$a_i \backslash b_j$	100	200	100	150
150	10	3	2	3
200	3	4	1	3
200	5	2	3	4

2.18.

$a_i \backslash b_j$	7	8	9	6
7	3	2	2	2
10	2	1	3	4
13	3	2	3	5

2.19.

$a_i \backslash b_j$	105	115	95	85
150	9	8	5	4
160	7	4	3	2
90	6	2	2	3

2.20.

$a_i \backslash b_j$	200	300	300	400
500	5	9	2	1
400	3	4	5	3
300	7	4	4	5

2.21.

$a_i \backslash b_j$	20	35	15	30
30	7	2	3	4
50	6	3	1	5
20	5	2	2	3

2.22.

$a_i \backslash b_j$	150	250	300	100
400	3	1	4	5
250	5	2	7	4
150	9	2	5	2

2.23.

$a_i \backslash b_j$	9	11	13	7
17	3	2	5	4
16	2	1	4	3
7	3	4	2	2

2.24.

$a_i \backslash b_j$	110	220	130	140
250	9	8	7	6
200	5	4	3	1
150	6	5	2	4

2.25.

$a_i \backslash b_j$	25	35	46	24
65	10	8	9	7
45	4	3	4	1
20	6	4	2	2

2.26.

$a_i \backslash b_j$	11	9	17	13
23	8	2	6	7
16	7	1	8	6
11	6	8	4	1

2.27.

$a_i \backslash b_j$	105	205	195	95
300	10	9	7	8
200	3	2	4	6
100	7	4	1	5

2.29.

$a_i \backslash b_j$	200	300	400	500
450	9	10	8	4
550	8	7	5	3
400	8	2	3	4

2.28.

$a_i \backslash b_j$	20	30	40	60
40	9	2	5	4
60	8	3	1	3
50	3	4	5	4

2.30.

$a_i \backslash b_j$	4	6	8	6
6	1	2	4	3
8	4	3	8	5
10	2	7	6	3

3. Разностное уравнение-1

Решите разностное уравнение.

3.1. $x_{n+2} - 14x_{n+1} + 98x_n = 340n^2 - 691n + 639.$

3.2. $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 32x_n = -164n^2 + 166n + 258.$

3.3. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 32x_n = 125n^2 - 135n - 52.$

3.4. $x_{n+2} - 14x_{n+1} + 98x_n = 510n^2 + 26n + 341.$

3.5. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 18x_n = 175n^2 + 162n - 14.$

3.6. $x_{n+2} - 10x_{n+1} + 50x_n = -287n^2 + 235n - 23.$

3.7. $x_{n+2} + 10x_{n+1} + 50x_n = 305n^2 + 486n - 163.$

3.8. $x_{n+2} + 10x_{n+1} + 50x_n = 61n^2 + 329n + 379.$

3.9. $x_{n+2} + 14x_{n+1} + 98x_n = -226n^2 - 629n + 336.$

3.10. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 18x_n = 125n^2 + 255n + 181.$

3.11. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 18x_n = 150n^2 - 4n - 122.$

3.12. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 18x_n = -75n^2 - 23n + 53.$

3.13. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 8x_n = -13n^2 + 79n + 99.$

3.14. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 15n^2 + 59n + 16.$

3.15. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = -3n^2 - n - 12.$

3.16. $x_{n+2} - 14x_{n+1} + 98x_n = 85n^2 + 146n + 476.$

3.17. $x_{n+2} + 14x_{n+1} + 98x_n = 452n^2 + 467n + 7.$

3.18. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 18x_n = -175n^2 - 37n + 54.$

3.19. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = -6n^2 + 5n - 17.$

3.20. $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 32x_n = -123n^2 - 142n - 302.$

3.21. $x_{n+2} + 10x_{n+1} + 50x_n = 183n^2 + 316n + 273.$

3.22. $x_{n+2} - 10x_{n+1} + 50x_n = 123n^2 + 198n + 57.$

3.23. $x_{n+2} + 14x_{n+1} + 98x_n = 226n^2 - 727n + 150.$

3.24. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 8x_n = 52n^2 + 113n + 114.$

3.25. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 18x_n = 150n^2 + 171n + 109.$

3.26. $x_{n+2} + 10x_{n+1} + 50x_n = -122n^2 - 170n - 418.$

3.27. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 3n^2 - 7n + 7.$

3.28. $x_{n+2} + 10x_{n+1} + 50x_n = -61n^2 - 329n + 109.$

3.29. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 32x_n = 50n^2 - 49n + 23.$

3.30. $x_{n+2} - 10x_{n+1} + 50x_n = -82n^2 - 173n - 235.$

4. Разностное уравнение-2

Решите разностное уравнение.

4.1. $x_{n+2} + x_{n+1} - 20x_n = 2 \cdot 9^n + 6\,(-5)^n.$

4.2. $x_{n+2} + 12x_{n+1} + 35x_n = -2 \cdot 2^n - 5\,(-5)^n.$

4.3. $x_{n+2} + x_{n+1} - 20x_n = -3 \cdot 9^n - 4 \cdot 4^n.$

4.4. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 21x_n = 2 \cdot 10^n + 5\,(-7)^n.$

4.5. $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 24x_n = -5 \cdot 10^n - 3 \cdot 4^n.$

4.6. $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 4x_n = 4 \cdot 3^n - 6\,(-4)^n.$

4.7. $x_{n+2} + 6x_{n+1} - 7x_n = 2 \cdot 8^n - 3\,(-7)^n.$

4.8. $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = -3 \cdot 6^n + 6\,(-1)^n.$

4.9. $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 18x_n = -4 \cdot 9^n + 6 \cdot 6^n.$

4.10. $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 4 \cdot 5^n + 4 \cdot 3^n.$

4.11. $x_{n+2} + x_{n+1} - 42x_n = 6 \cdot 13^n - 7\,(-7)^n.$

4.12. $x_{n+2} - 11x_{n+1} + 28x_n = 3 \cdot 3^n + 5 \cdot 7^n.$

4.13. $x_{n+2} - x_{n+1} - 42x_n = -4 \cdot 13^n - 3\,(-6)^n.$

4.14. $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 15x_n = -5 \cdot 8^n - 4\,(-5)^n.$

4.15. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 8x_n = 2^n + 5\,(-2)^n.$

4.16. $x_{n+2} + 7x_{n+1} + 10x_n = 3 \cdot 3^n - 2\,(-5)^n.$

4.17. $x_{n+2} - x_{n+1} - 20x_n = 9^n + 4 \cdot 5^n.$

4.18. $x_{n+2} - 9x_{n+1} + 14x_n = 3 \cdot 5^n - 7 \cdot 2^n.$

4.19. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 12x_n = 3 \cdot 8^n + 6 \cdot 2^n$.

4.20. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 12x_n = -4^n + 6^n$.

4.21. $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 3 \cdot 5^n + 4 \cdot 2^n$.

4.22. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n$.

4.23. $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 6x_n = 5^n + 2 \cdot 6^n$.

4.24. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 12x_n = -2 \cdot 4^n - 5 \cdot 2^n$.

4.25. $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 15x_n = 7 \cdot 8^n - 3^n$.

4.26. $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 8x_n = -6 \cdot 6^n + 5\,(-2)^n$.

4.27. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 5x_n = -2 \cdot 4^n - 7\,(-5)^n$.

4.28. $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 8x_n = -2 \cdot 6^n + 4\,(-4)^n$.

4.29. $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 14x_n = 3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n$.

4.30. $x_{n+2} - x_{n+1} - 30x_n = 7 \cdot 11^n + 3 \cdot 6^n$.

5. Разностное уравнение-3

Решите разностное уравнение.

5.1. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 4\,(-2)^n - 4 \cdot 2^n$.

5.2. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 6 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n$.

5.3. $x_{n+2} - 12x_{n+1} + 36x_n = 6 \cdot 3^n + 6^n$.

5.4. $x_{n+2} - 12x_{n+1} + 36x_n = 7\,(-3)^n - 2 \cdot 6^n$.

5.5. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 4 \cdot 7^n + 3 \cdot 2^n$.

5.6. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 5 \cdot 2^n - 2 \cdot 4^n$.

5.7. $x_{n+2} - 12x_{n+1} + 36x_n = -5\,(-7)^n + 5 \cdot 6^n$.

5.8. $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 16x_n = 3\,(-6)^n + (-4)^n$.

5.9. $x_{n+2} + 14x_{n+1} + 49x_n = 2 \cdot 6^n + 2\,(-7)^n$.

5.10. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = -3\,(-2)^n + 2^n$.

5.11. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 7 \cdot 3^n - 2\,(-2)^n$.

5.12. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2 \cdot 2^n + 3^n$.

5.13. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 3 \cdot 5^n + 4\,(-1)^n$.

5.14. $x_{n+2} + 10x_{n+1} + 25x_n = -4 \cdot 2^n + 7\,(-5)^n$.

5.15. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 3^n + 2\,(-1)^n$.

5.16. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = -5 \cdot 2^n + 4\,(-1)^n$.

5.17. $x_{n+2} + 14x_{n+1} + 49x_n = 3\,(-6)^n - 3\,(-7)^n$.

5.18. $x_{n+2} - 14x_{n+1} + 49x_n = -4 \cdot 3^n - 3 \cdot 7^n$.

5.19. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = -7 \cdot 4^n - 3\,(-1)^n$.

5.20. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = -7\,(-4)^n + 6 \cdot 4^n$.

5.21. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 5^n - 4 \cdot 4^n$.

5.22. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = -4 \cdot 3^n + 6\,(-1)^n$.

5.23. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 2 \cdot 3^n + 6 \cdot 4^n$.

5.24. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = -5 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n$.

5.25. $x_{n+2} + 14x_{n+1} + 49x_n = 6 \cdot 6^n + 2\,(-7)^n$.

5.26. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = -\,(-4)^n + 2\,(-1)^n$.

5.27. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = -7\,(-4)^n + 3 \cdot 2^n$.

5.28. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2 \cdot 7^n + 6 \cdot 3^n$.

5.29. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 5 \cdot 2^n - (-3)^n$.

5.30. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 7 \cdot 2^n + 5\,(-3)^n$.

Решение варианта № 30

1. Дана задача линейного программирования

$$f = 74x_1 + 106x_2 + 20x_3 \to \min, \tag{7a}$$

$$-6x_1 + 10x_2 - 4x_3 \geqslant 6, \tag{7b}$$

$$-4x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geqslant 4, \tag{7c}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \tag{7d}$$

(1) Приведите задачу к каноническому виду. Введите искусственные переменные, необходимые для начала работы по симплекс-методу.
(2) Решите задачу симплекс-методом (методом искусственного базиса).
(3) Составьте для данной задачи двойственную.
(4) Используя теоремы двойственности, найдите решение двойственной задачи.
(5) Решите двойственную задачу графическим методом. Сравните результат с ответом, полученным в предыдущем пункте.

Решение. (1) Чтобы привести данную задачу к каноническому виду, введем в нетривиальные ограничения-неравенства (7b), (7c) балансовые переменные x_4, x_5, после чего задача примет вид

$$f = 74x_1 + 106x_2 + 20x_3 \to \min, \tag{8a}$$
$$-6x_1 + 10x_2 - 4x_3 - x_4 = 6, \tag{8b}$$
$$-4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_5 = 4, \tag{8c}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0. \tag{8d}$$

В системе линейных ограничений (8b), (8c) базисными переменными являются x_4, x_5, однако базисное решение

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = -6, \quad x_5 = -4$$

не является допустимым, поскольку не удовлетворяет неравенствам (8d). Чтобы получить допустимое базисное решение, введем в ограничения (8b), (8c) искусственные переменные y_1, y_2, образующие базис:

$$f = 74x_1 + 106x_2 + 20x_3 \to \min, \tag{9a}$$
$$-6x_1 + 10x_2 - 4x_3 - x_4 + y_1 = 6, \tag{9b}$$
$$-4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_5 + y_2 = 4, \tag{9c}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0. \tag{9d}$$

Линейные ограничения (9b), (9c) имеют допустимое базисное решение

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad y_1 = 6, \quad y_2 = 4.$$

Введем вспомогательную целевую функцию $F = y_1 + y_2$ и решим симплекс-методом задачу

$$F = y_1 + y_2 \to \min$$

при ограничениях (9b)–(9d). Если эта задача имеет решение $F_{\min} = 0$, то система ограничений (8b), (8c) (не содержащая искусственных переменных y_1, y_2) имеет допустимое (неотрицательное) базисное решение.

Целевая функция $f = 74x_1 + 106x_2 + 20x_3$ выражена только через свободные переменные; запишем

$$f - 74x_1 - 106x_2 - 20x_3 = 0.$$

Выразим целевую функцию F через свободные переменные; для этого из (9b), (9c) находим

$$y_1 = 6 + 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 + x_4, \quad y_2 = 4 + 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_5,$$

так что

$$F = y_1 + y_2 = 10 + 10x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5$$

и далее

$$F - 10x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 10.$$

Итак, исходная задача приведена к виду, допускающему применение метода искусственного базиса:

$$
\begin{aligned}
&f = 74x_1 + 106x_2 + 20x_3 \to \min,\\
&F = y_1 + y_2 = 10 + 10x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \to \min,\\
&-6x_1 + 10x_2 - 4x_3 - x_4 + y_1 = 6,\\
&-4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_5 + y_2 = 4,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

(2) Решим полученную пару задач симплекс-методом.

Заполняем первую симплекс-таблицу:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	С.Ч.
y_1	-6	$\boxed{10}$	-4	-1	0	1	0	6
y_2	-4	-2	6	0	-1	0	1	4
f	-74	-106	-20	0	0	0	0	0
F	-10	$\boxed{8}$	2	-1	-1	0	0	10

Целевая функция F исследуется на минимум, поэтому нужно уничтожить положительные оценки в оценочной строке F; начнем с оценки 8, стоящей в столбце x_2. В качестве разрешающего элемента можно выбрать только число 10, стоящее в строке y_1. После итерации по методу Гаусса переменная y_1 выходит из базиса, а ее место занимает x_2; получаем очередную симплекс-таблицу:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	С.Ч.
x_2	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{5}$
y_2	$-\frac{26}{5}$	0	$\boxed{\frac{26}{5}}$	$-\frac{1}{5}$	-1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{26}{5}$
f	$-\frac{688}{5}$	0	$-\frac{312}{5}$	$-\frac{53}{5}$	0	$\frac{53}{5}$	0	$\frac{318}{5}$
F	$-\frac{26}{5}$	0	$\boxed{\frac{26}{5}}$	$-\frac{1}{5}$	-1	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{26}{5}$

Для уничтожения очередной положительной оценки $26/5$ в оценочной строке F выбираем в качестве разрешающего элемента единственный возможный элемент $26/5$ в строке y_2. После итерации по методу Гаусса переменная y_2 выходит из базиса, а ее место занимает x_3; получаем очередную симплекс-таблицу:

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	С.Ч.
x_2	-1	1	0	$-\frac{3}{26}$	$-\frac{1}{13}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{1}{13}$	1
x_3	-1	0	1	$-\frac{1}{26}$	$-\frac{5}{26}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{5}{26}$	1
f	-200	0	0	-13	-12	13	12	126
F	0	0	0	0	0	-1	-1	0

В этой таблице нет положительных оценок в строке F. Вспомогательная задача $F \to \min$ решена, $F_{\min} = 0$, и мы получили допустимое базисное решение задачи (8):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

Удаляя из последней таблицы строку F и столбцы y_1 и y_2, получаем исходную симплекс-таблицу для задачи (8):

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	С.Ч.
x_2	-1	1	0	$-\frac{3}{26}$	$-\frac{1}{13}$	1
x_3	-1	0	1	$-\frac{1}{26}$	$-\frac{5}{26}$	1
f	-200	0	0	-13	-12	126

В оценочной строке f нет положительных оценок, так что эта таблица является одновременно окончательной симплекс-таблицей, из которой получаем решение задачи (8):

$$f_{\min} = f(0, 1, 1) = 126.$$

(3) Составим задачу, двойственную (7), следуя обычному правилу:

$$\left\{\begin{array}{l} f = C^T X \to \min, \\ AX \geqslant B, \\ X \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi = B^T Z \to \max, \\ A^T Z \leqslant C, \\ Z \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

Поскольку в исходной задаче целевая функция исследуется на минимум, двойственная задача представляет собой задачу на максимум. Количество нетривиальных ограничений исходной задачи равно количеству неизвестных двойственной задачи, так что в двойственной задаче будет фигурировать 2 неизвестных z_1, z_2. Коэффициенты целевой функции φ двойственной задачи равны правым частям ограничений исходной задачи:

$$\varphi = 6z_1 + 4z_2 \to \max\,.$$

Количество неизвестных исходной задачи равно количеству нетривиальных ограничений двойственной задачи, так что двойственная задача будет содержать 3 нетривиальных ограничения; матрица левых частей ограничений получается из соответствующей матрицы исходной задачи транспонированием, а правые части ограничений в двойственной задаче равны коэффициентам целевой функции исходной задачи:

$$\begin{aligned} -6z_1 - 4z_2 &\leqslant 74, \\ 10z_1 - 2z_2 &\leqslant 106, \\ -4z_1 + 6z_2 &\leqslant 20. \end{aligned}$$

Таким образом, двойственная задача имеет вид:

$$\varphi = 6z_1 + 4z_2 \to \max, \tag{10a}$$
$$-6z_1 - 4z_2 \leqslant 74, \tag{10b}$$
$$10z_1 - 2z_2 \leqslant 106, \tag{10c}$$
$$-4z_1 + 6z_2 \leqslant 20, \tag{10d}$$
$$z_1 \geqslant 0, \;\; z_2 \geqslant 0. \tag{10e}$$

(4) Найдем решение двойственной задачи, используя теоремы двойственности. Согласно первой теореме двойственности, максимум двойственной задачи равен минимуму исходной задачи, т.е.

$$\varphi_{\max} = f_{\min} = 126.$$

Для нахождения точки минимума двойственной задачи воспользуемся второй теоремой двойственности (теоремой равновесия): оптимальные решения (x_1, x_2, x_3) и (z_1, z_2) пары взаимно двойственных задач связаны соотношениями

$$(-6x_1 + 10x_2 - 4x_3 - 6)z_1 = 0, \tag{11a}$$
$$(-4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4)z_2 = 0, \tag{11b}$$
$$(-6z_1 - 4z_2 - 74)x_1 = 0, \tag{11c}$$
$$(10z_1 - 2z_2 - 106)x_2 = 0, \tag{11d}$$
$$(-4z_1 + 6z_2 - 20)x_3 = 0. \tag{11e}$$

Подставляя в эту систему $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$, получаем, что уравнения (11a), (11b), (11c) выполнены, а уравнения (11d), (11e) имеют вид

$$\begin{aligned} 10z_1 - 2z_2 &= 106, \\ -4z_1 + 6z_2 &= 20. \end{aligned}$$

Решение этой системы $z_1 = 13$, $z_2 = 12$. Итак, решение двойственной задачи (10) имеет вид

$$\varphi_{\max} = \varphi(13, 12) = 126.$$

(5) Для решения двойственной задачи графическим методом изобразим на плоскости переменных (z_1, z_2) область, определенную неравенствами (10b)–(10e), и вектор градиента целевой функции (10a). Из чертежа ясно, что максимум целевой функции достигается в точке пересечения прямых

$$\begin{aligned} 10z_1 - 2z_2 &= 106, \\ -4z_1 + 6z_2 &= 20. \end{aligned}$$

Полученное решение совпадает с результатом, найденным при помощи теоремы равновесия. □

2. Имеется три склада, содержащих некоторое количество однотипной продукции, а также четыре потребителя, нуждающиеся в определенном количестве данной продукции. При перевозке одной единицы продукции со склада i потребителю j возникают издержки. Запасы продукции на складах a_i, потребности потребителей b_j и тарифы перевозок c_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, приведены в таблице:

$a_i \backslash b_j$	4	6	8	6
6	1	2	4	3
8	4	3	3	5
10	2	7	6	3

Требуется найти такой план перевозок, при котором общие затраты на перевозку будут минимальны.

(1) Проверьте задачу на сбалансированность.
(2) Постройте опорный план методом минимального элемента.
(3) С помощью метода потенциалов найдите оптимальное решение задачи.

Решение. (1) Проверим задачу на сбалансированность. Суммарный объем продукции на складах равен сумме потребностей потребителей:

$$6 + 8 + 10 = 24 = 4 + 6 + 8 + 6,$$

так что задача сбалансирована.

Условимся об обозначениях. В центре клетки транспортной таблицы указывается объем соответствующей перевозки, в правом верхнем углу — тариф перевозки, в левом нижнем углу — оценка оптимальности плана перевозки (см. ниже).

(2) Составим начальный опорный план данной задачи методом наименьшего элемента. Найдем в таблицы наименьший тариф: $c_{11} = 1$. В соответствующую

клетку $(1;1)$ таблицы впишем число $4 = \min\{a_1; b_1\} = \min\{4, 6\}$:

	4	6	8	6
6	**1** *4*	2	4	3
8	4	3	8	5
10	2	7	6	3

В матрице исключим из рассмотрения первый столбец. Запасы первого поставщика при этом уменьшаются на 4 и становятся равными 2:

	0	6	8	6
2	1 4	**2** *2*	4	3
8	4	3	8	5
10	2	7	6	3

Следующим после $c_{11} = 1$ тарифом в таблице является $c_{12} = 2$. Максимальный объем перевозки, который можно поставить в клетку $(1;2)$, равен $\min\{1;2\} = 2$.

Исключаем из рассмотрения первую строку, так как запасы первого поставщика полностью распределены:

	0	4	8	6
0	1 4	2 2	4	3
8	4	**3** *4*	8	5
10	2	7	6	**3**

В полученной таблице снова выбираем наименьший тариф: $c_{34} = c_{22} = 3$. В клетку $(2;2)$ поставим число $4 = \min\{8;4\}$ и исключим из рассмотрения второй столбец:

	0	0	8	6
0	1 4	2 2	4	3
4	4	3 4	8	5
10	2	7	6	**3** *6*

В клетку $(3;4)$ поставим число $6 = \min\{10;6\}$ и исключим из рассмотрения четвертый столбец:

	0	0	8	0
0	1 4	2 2	4	3
4	4	3 4	8	5
4	2	7	**6** *4*	3 6

Снова выбираем минимальный тариф: $c_{33} = 6$. Клетку $(3;3)$ заполняем числом $4 = \min\{4;6\}$ и исключаем третью строку:

	0	0	4	0
0	1 4	2 2	4	3
4	4	3 4	8	5
0	2	7	6 4	3 6

Наконец, оставшуюся клетку $(2;3)$ заполним числом $4 = \min\{4;4\}$. В результате получаем опорный план

	0	0	0	0
0	(1) 4	(2) 2	(4)	(3)
0	(4)	(3) 4	(8) 4	(5)
0	(2)	(7)	(6) 4	(3) 6

Целевая функция на этом плане имеет значение

$$z = 4\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4\cdot 3 + 4\cdot 8 + 4\cdot 6 + 6\cdot 3 = 94.$$

(3) Найдем оптимальный план с помощью метода потенциалов.

Найдем потенциалы u_i, v_j, используя условия $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и полагая $u_1 = 0$:

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 7$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	(1) 4	(2) 2 −	(4) 3 +	(3) 1
$u_2 = 1$	(4) −2	(3) 4 +	(8) 4 −	(5) 0
$u_3 = -1$	(2) −2	(7) −6	(6) 4	(3) 6

Проверим оптимальность опорного плана, вычислив оценки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ для всех занятых клеток:

$$\Delta_{13} = 0 + 7 - 4 = 3, \quad \Delta_{14} = 0 + 4 - 3 = 1, \quad \Delta_{21} = 1 + 1 - 4 = -2,$$
$$\Delta_{24} = 1 + 4 - 5 = 0, \quad \Delta_{31} = -1 + 1 - 2 = -2, \quad \Delta_{32} = -1 + 2 - 7 = -6.$$

(Эти оценки записаны в левых нижних углах клеток транспортной таблицы.)

Для клеток $(1;3)$ и $(1;4)$ величины Δ_{ij} положительны, поэтому начальный опорный план не оптимален. Выберем одну из указанных клеток, например клетку $(1;3)$, и присоединим эту клетку к занятым, поставив в нее знак «+». Образуем цикл с вершинами в занятых клетках и клетке со знаком «+». Этот цикл состоит из клеток $(1;3)$, $(2;3)$, $(2;2)$, $(1;2)$. В клетках цикла поочередно расставляем знаки «+» и «−». Среди клеток со знаком «−» выберем клетку с наименьшей величиной груза. Это клетка $(1;2)$. Делаем ее незанятой, а находящуюся в ней величину груза, равную 2, добавляем ко всем клеткам со знаком «+» и вычитаем из всех клеток со знаком «−».

Для получившегося нового опорного плана также находим потенциалы и в результате получаем следующую таблицу:

	$v_1 = 1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 4$	$v_4 = 1$
$u_1 = 0$	^{1} 4 $\ominus$	^{2} −3	^{4} 2 $\oplus$	^{3} −2
$u_2 = 4$	^{4} 1	^{3} 6	^{8} 2	^{5} 0
$u_3 = 2$	^{2} $\oplus$ 1	^{7} −6	^{6} $\ominus$ 4	^{3} 6

Целевая функция принимает на этом (втором) плане принимает значение

$$z = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 88.$$

Исследуем этот план на оптимальность. Для этого вычислим оценки Δ_{ij}. Условие оптимальности не выполняется для клеток $(2;1)$ и $(3;1)$. Выбираем любую из них, например, клетку $(3;1)$, и с помощью цикла, построенного для этой клетки, исправляем план. Так как освобождаются одновременно две клетки $(1;1)$ и $(3;2)$, то в одну из них, например, в клетку $(1;1)$, ставим ноль, чтобы количество занятых клеток равнялось $m+n-1=3+4-1=6$. Для получившегося третьего опорного плана вычисляем потенциалы. Приведем полученные данные в виде следующей таблицы:

	$v_1=1$	$v_2=-1$	$v_3=4$	$v_4=2$
$u_1=0$	1 0 $\ominus$	2 –3	4 6 $\oplus$	3 –1
$u_2=4$	4 1 $\oplus$	3 6	8 2 $\ominus$	5 1
$u_3=1$	2 4	7 –7	6 –1	**3** 6

При этом плане стоимость всех перевозок $z=84$. Вычислим оценки Δ_{ij}. Условие оптимальности плана не выполняется для клеток $(2;1)$ и $(4;2)$. Для клетки $(2;1)$ строим цикл, по которому перераспределяем величину груза, равную 0. Получаем четвертый опорный план, для которого находим потенциалы и оценки:

	$v_1=0$	$v_2=-1$	$v_3=4$	$v_4=1$
$u_1=0$	1 –1	2 –3	4 6	3 –2
$u_2=4$	4 0	3 6	8 2	5 0
$u_3=2$	2 4	7 –6	6 0	**3** 6

Все оценки неположительны, следовательно, четвертый опорный план является оптимальным. Стоимость всех перевозок по этому плану составляет величину $z = 84$. □

3. Решите разностное уравнение

$$x_{n+2} - 10x_{n+1} + 50x_n = -82n^2 - 173n - 235. \tag{12}$$

Решение. Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$x_{n+2} - 10x_{n+1} + 50x_n = 0. \tag{13}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 50 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения отрицателен:

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 50 = -100,$$

так что корни комплексные (комплексно сопряженные):

$$\lambda_{1,2} = 5 \pm 5i.$$

Представим корень $\lambda_1 = 5 + 5i$ в тригонометрической форме; модуль λ_1 равен

$$|5 + 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2},$$

а косинус и синус аргумента $\theta = \arg \lambda_1$ равны

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re}\lambda_1}{|\lambda_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{\operatorname{Im}\lambda_1}{|\lambda_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

так что $\theta = \pi/4$. Итак,

$$\lambda_1 = 5 + 5i = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому общее решение однородного уравнения (13) имеет вид

$$\mathring{x}_n = (5\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos\frac{\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{\pi n}{4}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Обратимся к неоднородному уравнению (12). Правая часть представляет собой многочлен

$$f(n) = -82n^2 - 173n - 235,$$

так что частное решение неоднородного уравнения (12) будем искать также в виде многочлена

$$X_n = An^2 + Bn + C, \tag{14}$$

где A, B, C — постоянные, подлежащие определению. Из (14) находим

$$X_{n+1} = A(n+1)^2 + B(n+1) + C, \quad X_{n+2} = A(n+2)^2 + B(n+2) + C.$$

Подставляя эти соотношения и (14) в уравнение (12), получим

$$X_{n+2} - 10X_{n+1} + 50X_n =$$
$$= [A(n+2)^2 + B(n+2) + C] - 10[A(n+1)^2 + B(n+1) + C] + 50[An^2 + Bn + C] =$$
$$= 41An^2 + n(-16A + 41B) + (-6A - 8B + 41C)$$
$$= -82n^2 - 173n - 235.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получаем систему уравнений

$$41A = -82, \quad -16A + 41B = -173, \quad -6A - 8B + 41C = -235,$$

решение которой

$$A = -2, \quad B = -5, \quad C = -7.$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения (12) имеет вид

$$X_n = -2n^2 - 5n - 7,$$

а общее решение, являющееся суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения,

$$x_n = (5\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos\frac{\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{\pi n}{4}\right) - 2n^2 - 5n - 7.$$

□

4. Решите разностное уравнение

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 30x_n = 7 \cdot 11^n + 3 \cdot 6^n. \tag{15}$$

Решение. Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 30x_n = 0. \tag{16}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda - 30 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 6$, так что общее решение однородного уравнения (16) имеет вид

$$\mathring{x}_n = C_1(-5)^n + C_2 6^n.$$

Обратимся к неоднородному уравнению (15). Его правая часть представляет собой сумму двух слагаемых

$$f(n) = 7 \cdot 11^n, \quad g(n) = 3 \cdot 6^n,$$

для каждой из которых частное решение уравнения (15) ищется отдельно.

Поскольку основание показательной функции $f(n) = 7 \cdot 11^n$, равное 11, не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, соответствующее частное решение ищем в виде $X_n = A \cdot 11^n$. Подставляя соотношения

$$X_n = A \cdot 11^n, \quad X_{n+1} = A \cdot 11^{n+1}, \quad X_{n+2} = A \cdot 11^{n+2}$$

в уравнение

$$X_{n+2} - X_{n+1} - 30X_n = 7 \cdot 11^n$$

получаем

$$X_{n+2} - X_{n+1} - 30X_n =$$
$$= [A \cdot 11^{n+2}] - [A \cdot 11^{n+1}] - 30[A \cdot 11^n] =$$
$$= 11^n(121A - 11A - 30A) = 80A \cdot 11^n = 7 \cdot 11^n,$$

откуда $A = 7/80$, так что

$$X_n = \frac{7}{80} \cdot 11^n.$$

Обращаясь к показательной функции $g(n) = 3 \cdot 6^n$, видим, что ее основание 6 совпадает с одним из корней характеристического уравнения, поэтому соответствующее частное решение ищем в виде $Y_n = An \cdot 6^n$. Подставляя соотношения

$$Y_n = An \cdot 6^n \quad Y_{n+1} = A(n+1) \cdot 6^{n+1}, \quad Y_{n+2} = A(n+2) \cdot 6^{n+2}$$

в уравнение

$$Y_{n+2} - Y_{n+1} - 30Y_n = 3 \cdot 6^n,$$

получаем

$$Y_{n+2} - Y_{n+1} - 30Y_n =$$
$$= [A(n+2) \cdot 6^{n+2}] - [A(n+1) \cdot 6^{n+1}] - 30[An \cdot 6^n] =$$
$$= 66A \cdot 6^n = 3 \cdot 6^n,$$

откуда $A = 1/22$, так что соответствующее частное решение имеет вид

$$Y_n = \frac{1}{22} n \cdot 6^n.$$

Общее решение неоднородного уравнения (15) представляет собой сумму общего решения $\overset{\circ}{x}_n$ однородного уравнения и двух частных решений X_n, Y_n неоднородного уравнения, соответствующих правым частям $f(n)$, $g(n)$ неоднородного уравнения:

$$x_n = C_1(-5)^n + C_2 6^n + \frac{7}{80} 11^n + \frac{1}{22} n \cdot 6^n.$$

□

5. Решите разностное уравнение

$$x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 7 \cdot 2^n + 5\,(-3)^n\,. \tag{17}$$

Решение. Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0. \tag{18}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 3)^2 = 0$$

имеет два совпадающих корня (двойной корень) $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, так что общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\overset{\circ}{x}_n = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n.$$

Правая часть неоднородного уравнения (17) представляет собой сумму двух показательных функций,

$$f(n) = 7 \cdot 2^n, \quad g(n) = 5\,(-3)^n\,;$$

частное решение неоднородного уравнения ищем для каждого слагаемого отдельно.

Поскольку основание показательной функции $f(n) = 7 \cdot 2^n$, равное 2, не совпадает с корнем характеристического уравнения, решение уравнения ищем в виде $X_n = A \cdot 2^n$. Подставляя выражения

$$X_n = A \cdot 2^n, \quad X_{n+1} = A \cdot 2^{n+1}, \quad X_{n+2} = A \cdot 2^{n+2}$$

в уравнение

$$X_{n+2} + 6X_{n+1} + 9X_n = 7 \cdot 2^n,$$

получаем

$$X_{n+2} + 6X_{n+1} + 9X_n = A \cdot 2^{n+2} + 6A \cdot 2^{n+1} + 9A \cdot 2^n = 25A \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n,$$

так что $A = 7/25$, а соответствующее частное решение

$$X_n = \frac{7}{25} 2^n.$$

Основание показательной функции $g(n) = 5 \cdot (-3)^n$, равное -3, совпадает с *двойным* корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения ищем в виде $Y_n = An^2 \cdot (-3)^n$. Подставляя выражения

$$Y_n = An^2 \cdot (-3)^n, \quad Y_{n+1} = A(n+1)^2 \cdot (-3)^{n+1}, \quad Y_{n+2} = A(n+2)^2 \cdot (-3)^{n+2}$$

в уравнение

$$Y_{n+2} + 6Y_{n+1} + 9Y_n = 5 \cdot (-3)^n,$$

получаем

$$\begin{aligned} Y_{n+2} + 6Y_{n+1} + 9Y_n &= \\ &= A(n+2)^2 \cdot (-3)^{n+2} + 6A(n+1)^2 \cdot (-3)^{n+1} + 9An^2 \cdot (-3)^n = \\ &= 18A \cdot (-3)^n = 5 \cdot (-3)^n, \end{aligned}$$

так что $A = 5/18$, а соответствующее частное решение

$$Y_n = \frac{5}{18} n^2 \cdot (-3)^n.$$

Общее решение неоднородного уравнения (17) представляет собой сумму общего решения $\mathring{x}_n$ однородного уравнения и частных решений X_n, Y_n неоднородного уравнения, соответствующих слагаемым $f(n)$, $g(n)$ в правой части уравнения (17):

$$x_n = (-3)^n\,(C_1 + C_2 n) + \frac{7}{25} 2^n + \frac{5}{18} n^2\,(-3)^n\,.$$

$\square$

Содержание