

## Лабораторная работа №11

### *Принятие решений в условиях определенности.*

#### *Метод анализа иерархий*

**Цель работы** – изучение подхода к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений.

#### **Основные сведения**

Принятие решений в условиях определенности характеризуется наличием однозначной или детерминированной связи между принятым решением и его исходом. В наиболее простых случаях каждой альтернативе удастся поставить в соответствие определенный исход, оцениваемый некоторым числом – «полезностью» исхода. При этом возможно установить прямую связь: альтернатива – численное значение соответствующего ей исхода, минуя сами исходы. Эта связь описывается целевой скалярной функцией, определенной на множестве альтернатив. Оптимальным решением считают ту альтернативу, которая доставляет целевой функции наибольшее (наименьшее) значение. Иначе говоря, нахождение оптимального решения равносильно нахождению экстремума функции при некоторых условиях. Рассмотрим подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений – метод анализа иерархий.

**Определение весовых коэффициентов.** Сложность метода анализа иерархий заключается в определении относительных весовых коэффициентов для оценки альтернативных решений. Если имеется  $n$  критериев на заданном уровне иерархии, соответствующая процедура создает матрицу  $\mathbf{A}$  размерности  $n \times n$ , именуемую *матрицей парных сравнений*, которая отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности разных критериев. Парное сравнение выполняется таким образом, что критерий в строке  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) оценивается относительно каждого из критериев, представленных  $n$  столбцами. Обозначим через  $a_{ij}$  элемент матрицы  $\mathbf{A}$ , находящийся на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. В соответствии с методом анализа иерархий для описания упомянутых оценок используются целые числа от 1 до 9. При этом  $a_{ij} = 1$  означает, что  $i$ -й и  $j$ -й критерии *одинаково важны*,  $a_{ij} = 5$  отражает мнение, что  $i$ -й критерий *значительно важнее*, чем  $j$ -й, а  $a_{ij} = 9$  указывает, что  $i$ -й критерий *чрезвычайно важнее*  $j$ -го. Другие промежуточные значения между 1 и 9 интерпретируются аналогично. Согласованность таких обозначений обеспечивается следующим условием: если  $a_{ij}=k$ , то автоматически  $a_{ji} = 1/k$ . Кроме того, все диагональные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  должны быть равны 1, так как они выражают оценку критерия относительно самих себя.

*Относительные веса* (весовые коэффициенты,  $w$ ) вычисляются в виде средних значений элементов соответствующих строк *нормализованной* матрицы

**N.** Для получения нормализованной матрицы делим элементы каждого столбца матрицы сравнений **A** на сумму элементов этого же столбца.

Оценка альтернативных решений основана на вычислении *комбинированного весового коэффициента* для каждого из них

$$F_i = \sum_{j=1}^n w_j w_{ji}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m},$$

где  $n$  – количество критериев,  $m$  – количество альтернативных решений.

Альтернативное решение имеющее наивысший комбинированный вес является наиболее оптимальным выбором.

**Согласованность матрицы сравнений.** Если все столбцы нормализованной матрицы идентичны, то исходная матрица сравнения являются *согласованной*. Согласованность означает, что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев или альтернатив. С математической точки зрения согласованность матрицы **A** означает, что  $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$  для всех  $i, j$  и  $k$ .

Если матрица парных сравнений не является согласованной необходимо выяснить, является ли уровень согласованности "допустимым". Для этого необходимо определить соответствующую количественную меру, т.е. *коэффициент согласованности*.

Коэффициент согласованности находится по формуле:

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

где

$$CI = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} \text{ – коэффициент согласованности матрицы сравнений,}$$

$$RI = \frac{1,98(n - 2)}{n} \text{ – стохастический коэффициент согласованности матрицы.}$$

Стохастический коэффициент согласованности  $RI$  определяется эмпирическим путем как среднее значение коэффициента  $CI$  для большой выборки генерированных случайным образом матриц сравнения **A**.

Коэффициент согласованности  $CR$  используется для проверки согласованности матрицы сравнения **A** следующим образом. Если  $CR < 0,1$ , уровень несогласованности является приемлемым. В противном случае уровень несогласованности матрицы сравнения **A** является высоким, и лицу, принимающему решение, рекомендуется проверять элементы парного сравнения  $a_{ij}$  матрицы **A** в целях получения более согласованной матрицы.

Значение  $n_{\max}$  можно определить путем вычисления вектор-столбца  $A\bar{w}$  ( $\bar{w}$  – вектор относительных весов) с последующим суммированием его элементов.

### **Пример выполнения работы**

Решив купить автомобиль, человек сузил свой выбор до трех модлей: А, В и С. Факторами, влияющими на его решение, являются: стоимость автомобиля

(С) и стоимость обслуживания (О). Следующая таблица содержит необходимые данные, соответствующие трехгодичному сроку эксплуатации автомобиля.

Модель автомобиля	С (долл.)	О (долл.)
А	6000	1800
В	8000	1200
С	10000	600

Определить модель автомобиля, которую следует выбрать.

Составим матрицу парных сравнений для критериев. С точки зрения человека, стоимость обслуживания значительно важнее стоимости автомобиля. Следовательно, приписываем элементу (2,1) матрицы А значение 5, т.е.  $a_{21}=5$ . Это автоматически предполагает, что  $a_{12} = 1/5$ . Тогда матрицу сравнения можно записать следующим образом.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & C & O \\ \hline C & 1 & 1/5 \\ \hline O & 5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

На основании таблицы, содержащей данные, соответствующие трехгодичному сроку эксплуатации автомобиля, строим матрицы сравнений альтернативных решений:

$$A_c = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & A & B & C \\ \hline A & 1 & 1/2 & 1/5 \\ \hline B & 2 & 1 & 1/2 \\ \hline C & 5 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$A_o = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & A & B & C \\ \hline A & 1 & 2 & 3 \\ \hline B & 1/2 & 1 & 3/2 \\ \hline C & 1/3 & 2/3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

1. В диапазоне A4:M7 введем исходные данные (рис. 11.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Метод анализа иерархий												
2													
3	Матрицы сравнений												
4					A <sub>c</sub>	A	B	C		A <sub>o</sub>	A	B	C
5	A	C	O		A	1	1/2	1/5		A	1	2	3
6	C	1	1/5		B	2	1	1/2		B	1/2	1	1 1/2
7	O	5	1		C	5	2	1		C	1/3	2/3	1

Рис. 11.1 Исходные данные задачи

2. Определим нормализованные матрицы путем деления элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца. Для этого введем формулы:

Ячейка	Формула	Примечание
B8	=СУММ(B6:B7)	
C8	=СУММ(C6:C7)	
F8	=СУММ(F5:F7)	Копируем в диапазон F8:H8
K8	=СУММ(K5:K7)	Копируем в диапазон K8:M8
B13	=B6/\$B\$8	Копируем в диапазон B13:B14
C13	=C6/\$C\$8	Копируем в диапазон C13:C14
F12	=F5/\$F\$8	Копируем в диапазон F12:F14
G12	=G5/\$G\$8	Копируем в диапазон G12:G14
H12	=H5/\$H\$8	Копируем в диапазон H12:H14
K12	=K5/\$K\$8	Копируем в диапазон K12:K14
L12	=L5/\$L\$8	Копируем в диапазон L12:L14
M12	=M5/\$M\$8	Копируем в диапазон M12:M14

Нормализованные матрицы имеют вид (рис. 11.2):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
10	Нормализованные матрицы												
11					Nc	A	B	C		No	A	B	C
12	N	C	O		A	0,125	0,143	0,118		A	0,545	0,545	0,545
13	C	0,167	0,167		B	0,250	0,286	0,294		B	0,273	0,273	0,273
14	O	0,833	0,833		C	0,625	0,571	0,588		C	0,182	0,182	0,182
15													
16													

Рис. 11.2. Нормализованные матрицы

3. Определим относительные веса критериев и альтернативных решений (рис. 11.3).

Вводим формулы:

Ячейка	Формула	Примечание
B20	=СРЗНАЧ(B13:C13)	
C20	=СРЗНАЧ(B14:C14)	
B23	=СРЗНАЧ(F12:H12)	Копируем в диапазон B23:B25
C23	=СРЗНАЧ(K12:M12)	Копируем в диапазон C23:C25

	A	B	C
16			
17	Относительные веса		
18			
19		C	O
20		0,167	0,833
21			
22		C	O
23	A	0,129	0,545
24	B	0,277	0,273
25	C	0,595	0,182
26			

Рис. 11.3. Относительные веса

4. Определим комбинированный весовой коэффициент для каждого альтернативного решения:

В ячейку **B29** введем формулу

$$=B\$20*B23+\$C\$20*C23$$

и скопируем ее в диапазон B29:B31.

Результаты представлены на рис. 11.4.

	A	B	C	D	E
27	<b>Комбинированные весовые коэффициенты</b>				
28					
29	FA	0,47596			
30	FB	0,27337			
31	FC	0,25066			
32					

Рис. 11.4. Комбинированные весовые коэффициенты

На основе этих вычислений модель А получает наивысший комбинированный вес и, следовательно, является наиболее оптимальным выбором человека.

5. Оценим согласованность матриц. Исходные матрицы сравнения **A** и **Ao** являются согласованными. Матрица **Ac** не является таковой.

Выясним, является ли уровень согласованности «допустимым».

Ячейка	Формула	Примечание
F18	3	Размер матрицы <b>Ac</b>
F19	=МУМНОЖ(F5:H7;B23:B25)	вводим формулу; Enter; выделяем область 1x3 с началом в ячейке, содержащей формулу; F2; CTRL+SHIFT+ENTER одновременно
F22	=СУММ(F19:F21)	$n_{\max}$
F23	=(F22-F18)*F18/((F18-1)*1,98*(F18-2))	Коэффициент согласованности
F24	=ЕСЛИ(F23<=0,1;"уровень несогласованности приемлемый";"уровень несогласованности неприемлемый")	

Результаты представлены на рис. 11.5.

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	<b>Метод анализа иерархий</b>												
3	<b>Матрицы сравнений</b>												
4					<b>Ac</b>	A	B	C		<b>Ao</b>	A	B	C
5	A	C	O		A	1	1/2	1/5		A	1	2	3
6	C	1	1/5		B	2	1	1/2		B	1/2	1	1 1/2
7	O	5	1		C	5	2	1		C	1/3	2/3	1
8	сумма	6,0	1,2		сумма	8,00	3,50	1,70		сумма	1,83	3,67	5,50
9	<b>Нормализованные матрицы</b>												
10					<b>Nc</b>	A	B	C		<b>No</b>	A	B	C
11	<b>N</b>	C	O		A	0,125	0,143	0,118		A	0,545	0,545	0,545
12	C	0,167	0,167		B	0,250	0,286	0,294		B	0,273	0,273	0,273
13	O	0,833	0,833		C	0,625	0,571	0,588		C	0,182	0,182	0,182
14	<b>Относительные веса</b>												
15	<b>Согласованность матриц</b>												
16	<b>п</b>												
17		C	O			3							
18		0,167	0,833			0,38578							
19						0,83106							
20						1,79062							
21		C	O		<b>пmax</b>	3,00746							
22	A	0,129	0,545		<b>CR</b>	0,00565							
23	B	0,277	0,273		<b>Вывод</b>	уровень несогласованности приемлемый							
24	C	0,595	0,182										
25	<b>Комбинированные весовые коэффициенты</b>												
26													
27	FA	0,47596											
28	FB	0,27337											
29	FC	0,25066											
30													
31													
32													
33													

Рис. 11.5. Результаты метода анализа иерархий.

### Порядок выполнения работы

1. По заданным критериям, соответствующим вашему варианту, создать матрицу парных сравнений и определить относительные веса критериев.
2. Определить относительные веса альтернативных решений.
3. Определить комбинированный весовой коэффициент для каждого альтернативного решения.
4. Оценить согласованность данных.
5. Отчет должен содержать все формулы вычислений.

### Варианты заданий

#### Вариант 1.

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л.с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг.
1	180	67	850
2	176	70	1000
3	176	68	860
4	181	67	820
5	177	68	860
6	180	66	800

Найти оптимальный вариант двигателя.

**Вариант 2.**

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий		
	Прибыль, д.е.	Себестоимость единицы продукции, д.е.	Доходы, д.е.
1	30	40	20
2	25	20	30
3	40	45	54
4	28	30	35
5	15	12	20
6	50	30	40

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

**Вариант 3.**

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л.с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг.
1	180	67	850
2	179	38	870
3	176	67	850
4	181	67	820
5	177	68	860
6	179	66	800

Найти оптимальный вариант двигателя.

**Вариант 4.**

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий		
	Прибыль, д.е.	Себестоимость единицы продукции, д.е.	Фондоотдача, у.е.
1	30	40	0,2
2	25	20	0,3

3	40	45	0,1
4	28	30	0,4
5	15	12	0,25
6	50	30	0,21

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

### Вариант 5.

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в следующей таблице:

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л.с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг.
1	180	67	850
2	180	68	880
3	176	68	860
4	179	38	870
5	175	67	820
6	180	66	800

Найти оптимальный вариант двигателя.

### Вариант 6.

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий		
	Прибыль, д.е.	Производительность, у.е.	Фондоотдача, у.е.
1	30	300	0,2
2	25	200	0,3
3	40	250	0,1
4	28	160	0,4
5	15	280	0,25
6	50	120	0,21

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

### Вариант 7.

Показатели эффективности работы предприятий приведены в следующей таблице:



№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий		
	Прибыль, д.е.	Себестоимость единицы продукции, д.е.	производительность, у.е.
1	30	40	300
2	25	20	200
3	40	45	250
4	28	30	160
5	15	12	280
6	50	30	120

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

**Вариант 8.**

Показатели эффективности выбора квартиры приведены в следующей таблице:

вариант	Показатели эффективности выбора квартиры		
	метраж, м <sup>2</sup>	Время поездки на работу, мин	Время поездки в зону отдыха, мин
1	60	50	30
2	50	45	25
3	45	30	20
4	60	40	30
5	42	20	10
6	45	30	15

Выберите наиболее эффективный выбор квартиры.

**Вариант 9.**

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Варианты оборудования	Показатели эффективности работы предприятий		
	Производительность , д.е.	Стоимость оборудования, д.е.	Объем памяти, у.е.
1	100	5	5
2	150	6	8

3	120	4	6
4	200	7	7
5	140	6	6
6	160	4	5

### Вариант 10.

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

Варианты оборудования	Показатели эффективности работы предприятий		
	Производительность, д.е.	Надежность, у.е.	Объем памяти, у.е.
1	100	8	5
2	150	5	8
3	120	6	6
4	200	4	7
5	140	5	6
6	160	6	5