Задача 2

Энергетический спектр случайного процесса X(t) равен G(ω) (таблица 2.1).

Определить:

1 Корреляционную функцию B(τ) этого процесса.

2 Рассчитать и построить графики функций G(ω) и B(τ) с указанием масштаба по осям.

3 Найти эффективную ширину энергетического спектра и интервал корреляции случайного процесса. Установить связь между ними;

4 Записать выражения для функции плотности вероятности w(x) случайного процесса, рассчитать и построить ее график;

5 Определить вероятность того, что мгновенные значения случайного процесса будут меньше a; будут больше b; будут находиться внутри интервала [c, d].

Исходные данные к задаче

G_0□10^{-5} ,$в^2$□сек	400
α , рад/сек	150
a, В	1
b, В	4
c, В	2
d, В	5

Модулированный синхронный телеграфный сигнал	$G(\omega) = G_0 \dfrac{\sin^2\left[(\omega-\omega_0)/\alpha)\right]}{\left[(\omega-\omega_0)/\alpha\right]^2}$

Указания к решению задачи №2

Для решения задачи необходимо проработать §§2.1, 2.2 [1]. При вычислении корреляционной функции B(τ) стационарного случайного процесса X(t), имеющего энергетический спектр G(ω), следует воспользоваться известной теоремой Винера - Хинчина, связывающей функции B(τ) и G(ω) парой преобразования Фурье.

Прямое преобразование Фурье:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\int_{0}^{\infty} B(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad (2.1)$$

и обратное преобразование Фурье:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} G(\omega)\cos\omega\tau d\omega \qquad (2.2)$$

Для низкочастотного СП (варианты 0, 2, 4, 6, 8) в формулу 2.2 следует подставить спектральную плотность G(ω), заданный в таблице 2.2.

Для высокочастотного СП (варианты 1, 3, 5, 7,9) справедливо соотношение $\omega_0 >> \alpha$, (энергетический спектр смещен в область высоких частот на частоту ω_0 и симметричен относительно этой частоты). Для таких СП функция корреляции имеет вид:

$$B(\tau) = \left[\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} G(\Omega)\cos\Omega\tau d\tau\right]\cos\omega_0\tau = B_0(\tau)\cos\omega_0\tau, \qquad (2.3)$$

где $B_0(\tau)$ - функция корреляции огибающей СП, т.е. огибающая функции корреляции высокочастотного СП имеет такой же вид, как и для низкочастотного СП, но дополнительно появляется высокочастотное гармоническое заполнение счастотой $\omega_0 >> \alpha$. В этом случае (варианты 1,3, 5, 7,9) следует вначале определить

$$B_0(\tau) = \left[\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} G(\Omega)\cos\Omega\tau d\tau\right], \qquad (2.4)$$

где G(Ω) = $G_{нч}(\omega)$ = G(ω-ω_0) - спектр , равный спектру G(ω), но смещенный в область низких частот на частоту ω_0. Для перехода от G(ω) к $G_{нч}(\omega)$ = G(Ω) следует разность частот (ω-ω_0) в выражении для G(ω) заменить на частоту Ω, например, если G(ω) $=G_0\cos(\omega-\omega_0)t$, то $G_{нч}(\omega)$ = G(Ω) $=G_0\cos\Omega$, затем выполнить интегрирование по переменной Ω.

Значения интегралов, которые могут понадобиться при вычислении функции корреляции по формулам (2.2) - (2.4), приведены в приложении 1.

Расчет графиков G(ω) и B(τ) удобно свести в таблицу. Например, если в результате расчета получено выражение:

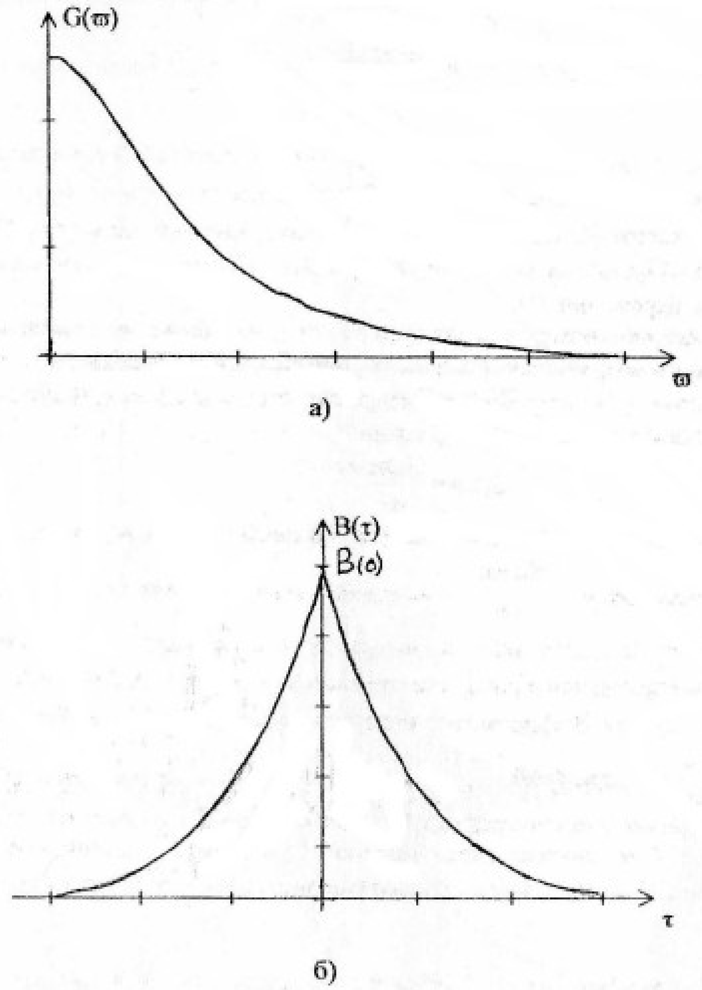
$$B(\tau) = \frac{G_0\alpha}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha\tau}{\alpha\tau},$$

то функция корреляции имеет вид затухающей синусоиды, изменяясь в зависимости от τ по закону $\frac{\sin\alpha\tau}{\alpha\tau}$. При расчете следует задаваться значениями

$\alpha\tau = \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$, т.е. значениями $\tau = \pi/\alpha, 2\pi/\alpha, 3\pi/\alpha \ldots$, $n\pi/\alpha$, где функция корреляции обращается в ноль, а также значениями $\alpha\tau = 0, 3\pi/2, 5\pi/2 \ldots$ ($\tau = 3\pi/2\alpha, 5\pi/2\alpha, \ldots$), где B($\tau$) достигает максимальных значений. Следует помнить, что $\lim \frac{\sin\alpha\tau}{\alpha\tau} = 1$ при $\tau \to 0$.

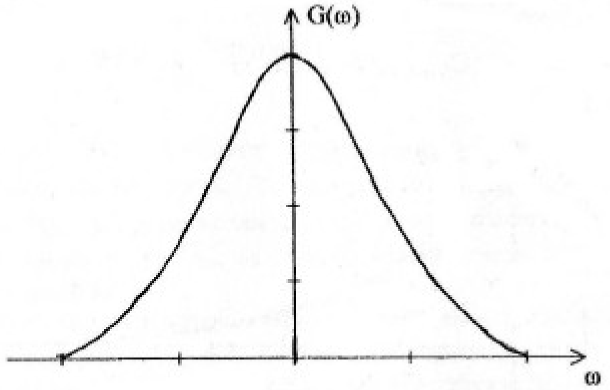
При построении графика функции корреляции высокочастотного СП (варианты 1, 3, 5,7, 9) вначале рассчитывается и строится график огибающей функции корреляции СП B_0 (τ), а затем произвольно высокочастотное заполнение по закону $\cos(\omega_0\tau)$.

На рисунке 2.1,а и 2.1,б изображен возможный вид графиков энергетического спектра и функции корреляции низкочастотного СП, а на рисунке 2.2,а и 2.2,б этого же СП , но смещенного в область высоких частот на частоту ω_0.



б)

Рисунок 2.1 – Графики энергетического спектра G(w) и функция корреляции B(τ) низкочастотного СП.



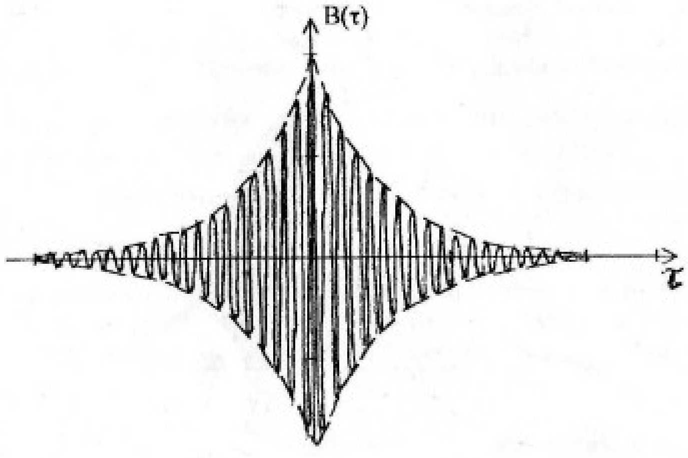


Рисунок 2.2 – Графики энергетического спектра G(ω) и функции корреляции B(τ) узкополосного СП для случая $\omega_0 >> \alpha$.

Ширину энергетического спектра $\Delta_э$ и интервал корреляции τ_k можно рассчитать аналитически или определить по графикам этих функций по методу эквивалентного прямоугольника. Эффективная ширина энергетического спектра $\Delta_э$ - это полоса частот, в которой сосредоточена основная доля энергии СП как основание прямоугольника высотой $G_{max}(\omega)$, площадь которого $S = \int_0^\infty G(\varpi)d\varpi$. Тогда (рисунок 2.3, а):

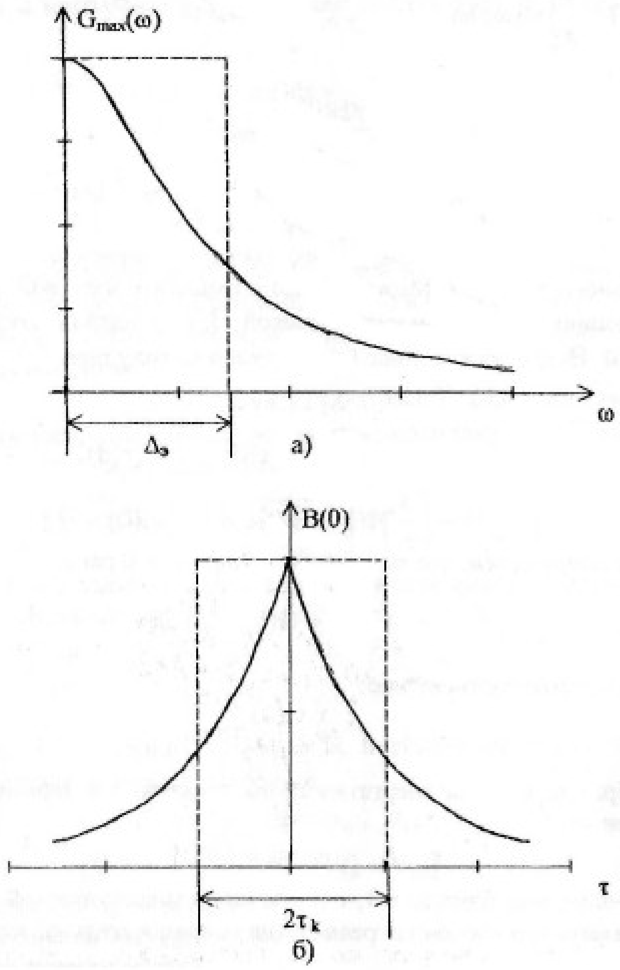


Рисунок 2.3 – Иллюстрация к определению – а) ширины энергетического спектра; б) интервала корреляции случайного процесса.

$$\Delta_э = \frac{\int_0^\infty G(\omega)d\omega}{G_{max}(\omega)} \tag{2.5}$$

Воспользовавшись тем, что выражение (2.2) при $\tau = 0$ равно

$$B(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G(\omega)d\omega, \qquad \text{т.е.} \quad \int_0^\infty G(\omega)d\omega = \pi B(0)$$

Окончательно будем иметь:

$$\Delta_э = \frac{\pi B(0)}{G_{max}(\omega)}, \text{ рад/сек} \tag{2.6}$$

Интервалом (временем) корреляции τ_k называют половину такого интервала времени, по истечении которого функция корреляции обращается в ноль или уменьшается до принебрежимо малого значения, например, до 0.1 или 0.01 от своего максимального значения. Можно также определить интервал корреляции как половина основания прямоугольника высотой B(0), площадь которого равна площади под кривой B(τ) и осью абсцисс (аналогично методу прямоугольника при определении Δ_y, рисунок 2.3,б). Тогда

$$\tau_{\partial} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|B(\tau)|d\tau}{B(0)} = \frac{\int_{0}^{\infty}|B(\tau)|d\tau}{B(0)}.$$

Воспользовавшись тем, что выражение 2.1 при $\omega = 0$ равно

$$G(\omega) = G(0) = 2\int_{0}^{\infty} B(\tau)d\tau,$$

получаем простое соотношение:

$$\tau_{\partial} = \frac{G(0)}{2B(0)}, \text{ сек} \qquad (2.7)$$

Таким образом, ширина энергетического спектра и интервал корреляции связаны соотношением:

$$\tau_{\partial} \cdot \Delta_y = const \simeq O(1),$$

Где $O(1)$ - величина, близкая к 1, т.е. чем шире энергетический спектр СП, тем быстрее изменяется его временная реализация и, следовательно, тем уже интервал корреляции.

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}\exp(-x^2 / 2\sigma^2), \qquad (2.8)$$

где $\sigma^2 = D_x$ - дисперсия СП, а $\sigma = \sqrt{D_x}$ - среднеквадратичное, или эффективное значение СП. Значение σ^2 можно найти из условия, что при $m_x = 0$ $B(0) = \sigma^2$. По выражению (2.8) рассчитывается таблица значений w(x) и строится график функции w(x). Значения x следует задавать в таком диапазоне, чтобы w(x) изменялось примерно до 0.1 $W(x)_{max}$.

Вероятность того, что мгновенные значения СП будут меньше какого-либо заданного значения a находятся из определения интегральной функции распределения:

$$P[X < a] = F(a) = \int_{-\infty}^{a} w(x)dx = \frac{1}{2}\left[1 + \hat{O}\left(\frac{a - m_x}{\sigma}\right)\right],$$

где функция

$$\hat{O}\left(\frac{a - m_x}{\sigma}\right) = \hat{O}(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{u} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

называется интегралом вероятности или функцией Крампа. Эта функция табулирована. Таблица значений функции Крампа приведена в приложении 2.

Вероятность того, что мгновенные значения СП будут больше некоторого значения b определится как:

$$P\ [X > b] = 1 - P[X < b].$$

Вероятность того, что мгновенные значения нормального СП будут находиться в интервале от c до d определится выражением:

$$P\left[c < x < d\right] = \int_{c}^{d} w(x)dx = \frac{1}{2}\left[\hat{O}\frac{(d)}{\sigma} - \hat{O}\frac{(c)}{\sigma}\right].$$

В приложении к задаче 2 приводятся выражения для некоторых интегралов и значения функции Крампа.