Задача 1

По заданной графически (Рисунок1.1) интегральной функции распределения F(x) стационарного случайного процесса (СП) определить одномерную плотность вероятности процесса W(x) и изобразить примерный вид реализации этого СП. Рассчитать математическое ожидание m_x, дисперсию D(x) и среднеквадратичное отклонение σ случайного процесса от его среднего значения

Варианты заданий приведены в таблице 1.1

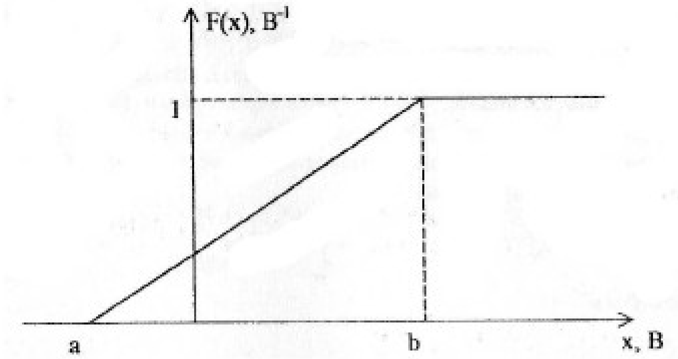

Рисунок 1.1 – График интегральной функции распределения СП.

a, B $= 1$ b, B $= 7$

Указания к решению задачи 1

Функцию распределения вероятности F(x) следует представить как уравнение прямой, проходящей через 2 точки с координатами (x_1,y_1) и (x_2,y_2) , т.е.

$$(x- x_1) / (x_2 - x_1) = (y- y_1) / (y_2 - y_1)$$

Так как при $x_1 = a, y_1 = 0,$ а при $x_2 = b, y_2 = 1,$ то получим

$$y = (x- a) / (b- a)$$

откуда

$$F(x) = y = (x- a) / (b- a)$$

Поскольку интегральная функция распределения F(x) и одномерная плотность вероятности W(x) связаны соотношением W(x) = d F(x)/dx, то

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ï ðè } a \le x \le b; \\ 0 & \text{ï ðè } x < a \text{ è } x < b. \end{cases} \tag{1.1}$$

Из формулы 1.1 видно, что плотность вероятности имеет равномерное распределение в интервале $a \le x \le b$ и равна 1/(b-a).

Математическое ожидание (среднее значение, или первый начальный момент) случайного процесса X(t) равно

$$M\{X(t)\} = m_x = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx\,, \tag{1.2}$$

откуда получим

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\square\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\square\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}, \hat{A} \tag{1.3}$$

Дисперсия (мощность переменной составляющей СП) равна

$$D(x) = \sigma^2 = m_2(x) = M\{(x-m_x)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[(x-m_x)^2\right]w(x)dx = M\{X^2(t)\} - m_x^2 = m_2 - m_1, \hat{A}^2,$$

где $M\{X^2(t)\} = m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)dx$ - второй начальный момент.

Среднеквадратичное отклонение СП от среднего значения равно

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}\,, \hat{A}.$$

График распределения плотности вероятности w(x) и изображение одной из возможных реализаций $X_i(t)$ случайного процесса $X(t)$ показаны на рисунке 1.2.

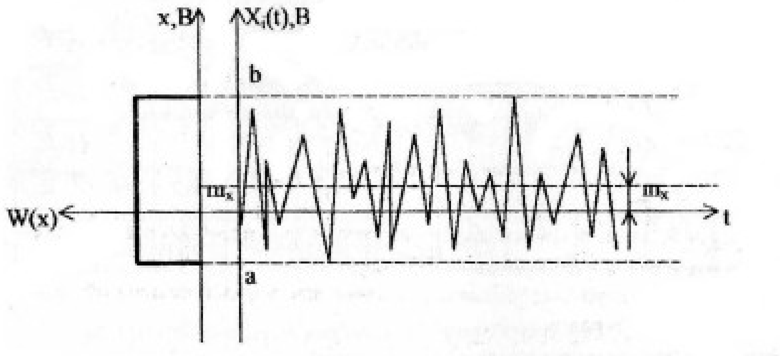

Рисунок 1.2