Кемеровский филиал ГБОУ ВПО «Московский университет статистики, информатики и экономики (МЭСИ)»

### **МАТЕМАТИКА**

#### Методические указания

по выполнению контрольных работ

для студентов 1 курса заочной формы обучения

Кемерово 2013

# СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | Правила и порядок выполнения контрольных работ | 3 |
| 2. | Тематический план дисциплины | 4 |
| 3. | Рабочая программа дисциплины | 4 |
| 4. | Контрольные вопросы для экзамена | 6 |
| 5. | Варианты контрольной работы | 7 |
| 6. | Методические указания по выполнению контрольной работы  | 17 |
|  | Приложения  | 38 |

**1. ПРАВИЛА И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ**

**КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

1. В процессе изучения дисциплины «Математика» студент первого курса должен выполнить контрольную работу.
2. Контрольные работы должны быть оформлены в соответствии с настоящими правилами. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.
3. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.
4. На обложке тетради должны быть разборчиво написаны фамилия, имя, и отчество студента, номер группы, название дисциплины, номер варианта. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и расписаться.
5. Номер варианта контрольной работы, которую выполняет студент, должен совпадать с последней цифрой номера его зачетной книжки.
6. Решения задач надо располагать в порядке возрастания номеров. Условия задач следует переписать в тетрадь.
7. При решении задач нужно обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса.

Решение задач и примеров следует излагать подробно, объясняя все выполненные действия и используемые формулы.

Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

1. Срок проверки контрольных работ - 5 рабочих дней.
2. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, внести в решения задач рекомендуемые рецензентом изменения или дополнения и прислать работу для повторной проверки. Для этого рекомендуем при выполнении контрольной работы оставить в конце тетради несколько чистых листов.

Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

На экзамен студент допускается при наличии проверенных контрольных работ.

**2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Дифференциальное исчисление.
2. Интегральное исчисление.
3. Аналитическая геометрия.
4. Линейная алгебра.

**3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Раздел 1. Дифференциальное исчисление

Множество действительных чисел. Понятие функции. Способы задания функций. Классификация функций.

Числовая последовательность и ее предел. Предел функции. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Основные теоремы о пределах. Два замечательных предела. Односторонние пределы функции. Непрерывность функции. Приращение функции. Классификация точек разрыва. Свойства непрерывных функций.

Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные высших порядков. Понятие дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала. Правило Лопиталя.

Определение экстремумов функции. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции. Достаточные признаки существования экстремума функции. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции.

*Раздел 2. Интегральное исчисление*

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.

Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла. Методы интегрирования. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, объем тела вращения.

*Раздел 3. Аналитическая геометрия*

Введение. Основные понятия аналитической геометрии. Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Раздел 4. Линейная алгебра

Основные понятия линейной алгебры. Определитель n-го порядка. Свойства определителей. Способы вычисления. Миноры, алгебраические дополнения. Матрицы. Операции над матрицами.

Системы линейных уравнений. Основные понятия. Методы решения системы n - линейных уравнений с n – неизвестными: Гаусса, Крамера, матричный.

**4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЭКЗАМЕНА**

1. Определение функции. Область определения функции. Способы задания функции.
2. Определение предела функции.
3. Основные теоремы о пределах.
4. Первый и второй замечательные пределы.
5. Определение непрерывности функции. Свойства непрерывных функций.
6. Определение производной функции. Геометрический и физический смысл.
7. Основные правила дифференцирования.
8. Понятие дифференциала. Свойства дифференциала.
9. Правило Лопиталя.
10. Экстремумы функции. Необходимые и достаточные признаки существования экстремума.
11. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции.
12. Общая схема построения графиков функций.
13. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.
14. Свойства неопределенного интеграла.
15. Основные методы интегрирования.
16. Понятие определенного интеграла. Его свойства.
17. Геометрический смысл определенного интеграла.
18. Вычисление площади плоской фигуры.
19. Вычисление объема тела вращения.
20. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
21. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
22. Понятие определителя. Свойства определителей.
23. Способы вычисления определителей.
24. Понятие матрицы. Виды матриц.
25. Операции над матрицами.
26. Понятие обратной матрицы.
27. Система линейных уравнений.
28. Методы решения: Гаусса, Крамера, матричный.

**5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

# ВАРИАНТ 0

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

а) .

б) 

3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



# ВАРИАНТ 1

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



# ВАРИАНТ 2

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



# ВАРИАНТ 3

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



.

# ВАРИАНТ 4

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



# ВАРИАНТ 5

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



4. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



# ВАРИАНТ 6

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



# ВАРИАНТ 7

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



# ВАРИАНТ 8

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



# ВАРИАНТ 9

1. Вычислить производную функции

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

2. Исследовать функцию  и построить ее график

.



3. Вычислить неопределенные интегралы

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) ; |
| в) ; | г) . |

4. . Решить систему линейных уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса,

в) матричным методом.



**6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

**I. При вычислении производных следует учитывать основные правила дифференцирования:**

1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

 (1)

2. Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных этих функций:

 (2)

3. Производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой:

 (3)

Это правило справедливо для случая нескольких сомножителей.

4. Производная отношения двух функций равна дроби, в числителе которой разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а в знаменателе квадрат исходного знаменателя:

 (4)

5. Если  сложная функция, т.е. , а ,

то производная  находится, как  (5)

***Пример 1.*** Найти производную функции .

Обозначим , тогда получим .

Воспользуемся правилом 5 и таблицей производных (приложение 1).



***Пример 2.*** Найти производную функции .

Рассматривая функцию как сложную и пользуясь правилом (4), получим



***Пример 3.*** Найти производную функции .

Рассматривая функцию как сложную и учитывая правило (3), получим



Иногда, чтобы облегчить нахождение производной логарифмической функции предварительно нужно сделать ее преобразования, учитывая правила логарифмирования.

***Пример 4.*** Найти производную функции ;

Сделаем преобразование функции



Найдем производную, учитывая правило (2) и рассматривая каждый логарифм, как сложную функцию



Если дана функция вида , причем , то ее производная находится по формуле,



***Пример 5.***Найти производную функции 



**Использование производных для исследования функций**

**Определение экстремума функции**

Точками экстремума функции называются точки максимума и минимума. Максимум и минимум функции имеют локальный характер, то есть на конечном промежутке у функции может быть несколько максимумов и минимумов.

**Необходимое условие экстремума**

Если  является точкой экстремума функции , то первая производная  в этой точке либо равна нулю, либо не существует. Точки экстремума называются критическими точками.

***Достаточные условия экстремума***

Первое правило.

Если производная функции при переходе через критическую точку  меняет знак с плюса на минус, то есть

 при  и  при ,

то функция в этой точке имеет максимум.

Если производная функции при переходе через критическую точку  меняет знак с минуса на плюс, то есть

 при  и  при ,

то функция в этой точке имеет минимум.

*Второе правило.*

Если вторая производная функции в критической точке  меньше нуля, , то функция в этой точке имеет максимум.

Если вторая производная функции в критической точке  больше нуля, , то функция в этой точке имеет минимум.

Если , то нужно использовать первое правило.

***Определение выпуклости***

***и точки перегиба графика функции***

График функции  будет выпуклым (или вогнутым) на интервале , если любая касательная к кривой  на этом интервале проходит выше или ниже этой кривой относительно оси абсцисс.

***Достаточное условие выпуклости (вогнутости)***

Если вторая производная функции  в интервале , то график функции  на этом интервале вогнут.

Если , то график функции выпуклый.

Точка кривой, где выпуклость меняется на вогнутость или наоборот, называется точкой перегиба.

***Достаточное условие точки перегиба***

Если вторая производная функции  в точке  равна нулю, , и меняет знак при переходе через эту точку, то эта точка  является точкой перегиба графика функции.

***Определение промежутка возрастания***

***или убывания функции***

Функция  является возрастающей (или убывающей) в некотором промежутке, если для любых  и , принадлежащих этому промежутку, выполняются неравенства при ,  (или при ,).

***Достаточное условие возрастания (убывания) функции***

Если в некотором промежутке производная данной функции , то функция возрастает в этом промежутке; если , то – убывает.

***Нахождение асимптот графика функции***

Прямая линия называется асимптотой графика функции , если расстояние от точки, лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при движении точки по графику в бесконечность.

Вертикальной асимптотой графика функции называется прямая .

Вертикальная асимптота графика функции существует, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке ***а*** является бесконечным:

 или 

Непрерывные функции вертикальных асимптот не имеют.

Горизонтальной асимптотой графика функции называется прямая , при этом величина ***В*** находится из условия



Наклонной асимптотой графика функции называется прямая , при этом величина ***k*** находится из условия

,

а величина ***b*** из условия

.

***Общая схема исследования функции***

1. Найти область определения функции.
2. Определить четность функции.
3. Найти интервалы возрастания и убывания функции.
4. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости функции.
5. Найти экстремумы функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти точки пересечения графика функции с осями.
8. Построить график функции.

***Пример 6.*** Построить график функции .

*Решение*. 1) Функция определена при , т. е. в интервале . 2) График функции пере­секает ось ***Ох*** в точке, в ко­торой , т. е. в точке с абсциссой , а с осью ***Оу*** пересечений не имеет, так как функция определена при *.* 3) Вертикальной асимп­тотой является прямая , так как . Отыскиваем асимптоты: . Имеем неопределенность вида . Применяя правило Лопиталя, получаем

,



(здесь также было использовано правило Лопиталя).

Таким образом, , т. е. наклонных асимптот нет; пря­мая  - горизонтальная асимптота. 4) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную:

.

Решая уравнение , получаем одну точку возможного экстремума: . 5) Для нахождения критических точек вычислим вторую про­изводную:

.

Решая уравнение , , , получаем одну критическую точку: . 6) Получаем, что на  производная ; следовательно, функция возрастает; на  производная  - функция убывает. Точки экстремума: при переходе через точку  производная  меняет знак с плюса на минус; следовательно, в точке  - максимум, причем . На вторая производная  - график направлен выпуклостью вверх, а на  производная  - график направлен выпуклостью вниз; следовательно, точка  - абс­цисса точки перегиба, причем . Таким образом, точка  - точка перегиба графика функции. 7) На основании полученных данных строим график функции (рис. 1).



Рис.1

**Пример 7.** Найти экстремум функции

.

Найдем производную функции



Проверим на наличие экстремума точку  по 1-му правилу. При , , при , , то в точке  функция имеет минимум, . Проверим точку . При , , при , , то есть в точке  функция имеет максимум, .

**Пример 8.** Найти асимптоты графика функции

.

Так как при , функция стремится в бесконечность, и





то , то есть ось ***у***, является вертикальной асимптотой.

Горизонтальной асимптоты нет, так как 

Найдем уравнение наклонной асимптоты





Итак, уравнение наклонной асимптоты имеет вид .

**II. При вычислении интегралов следует учитывать основные правила интегрирования:**

|  |  |
| --- | --- |
| 1.  | 2.  |
| 3.  | 4.  ***k*** – постоянный множитель |
| 5.  | 6.  |

**Основные методы интегрирования**

*а) Непосредственное интегрирование*

Этот метод основан на вышеприведенных правилах интегрирования.

***Пример 9.*** Найти интеграл 

Сделаем тригонометрические преобразования



*б) Метод подстановки (замены переменной)*

Этот метод основан на введении новой переменной и осуществляется двумя приемами:

или ,  или , 

***Пример 10.*** Найти .

Сделаем замену , тогда , , и получим



*в) Метод интегрирования по частям*

Этот метод основан на формуле

 (6)

При использовании этого метода, одна часть подынтегрального выражения обозначается через , другая часть – через . При этом выделение частей нужно производить так, чтобы новый интеграл  оказался проще исходного.

***Пример 11.*** Найти .

Полагая , , найдем , , 

Теперь по формуле (6)имеем



*г) Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби*

Этот метод применяется для вычисления интегралов вида



в том случае, когда знаменатель имеет различные и действительные корни.

***Пример 12.*** Найти .

Решая уравнение,  найдем корни ; 

Разложим подынтегральную функцию на дроби



Неизвестные коэффициенты ***А*** и ***В*** найдем из уравнения

,

приравнивая множители при одинаковых степенях ***х*** в левой и правой части



Отсюда получим , 

Итак, имеем



Отметим, что если степень числителя больше, чем степень знаменателя, то прежде, чем разлагать подынтегральную функцию на дроби, нужно выделить целую часть обычным делением многочлена на многочлен.

В некоторых случаях для вычисления интеграла следует преобразовать подынтегральную функцию так, чтобы в числителе получилась производная знаменателя.

***Пример 13.***

.

***III. Линейная алгебра***

***Понятие матрицы. Действия над матрицами***

Специалистам, работающим в области экономики, при решении прикладных задач часто приходится оперировать множеством числовых данных, оформленных в виде таблицы. Для проведения количественного анализа таких массивов данных в математике используется понятие матрицы.

Матрицей называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из ***m*** строк и ***n*** столбцов. В этом случае матрица называется прямоугольной или размера ***m⋅n***. Если число строк равно числу столбцов ***m = n***, то матрица называется квадратной, порядка***m***. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами. Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется нулевой. В частном случае матрица может состоять из одной строки или одного столбца. Элемент матрицы обозначается ***аij***, здесь первый индекс***i*** обозначает номер строки, второй индекс ***j*** обозначает номер столбца.

В общем случае матрица записывается в виде:

.

Если в матрице поменять местами строки и столбцы, то получится матрица, называемая транспонированной. Она записывается в виде:

.

Матрицу можно умножать на произвольное число, при этом каждый элемент умножается на это число:

.

Матрицы одного размера можно складывать (вычитать). При этом получается матрица, элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов слагаемых (вычитаемых) матриц:

.

Одну матрицу ***А***можно умножать на другую матрицу ***В*** только в том случае, когда число столбцов первой матрицы ***А***равно числу строк второй матрицы ***В***. Произведение матриц обозначается как . Каждый элемент новой матрицы находится как сумма произведений элементов ***i***-ой строки матрицы ***А*** на соответствующие элементы ***j***-го столбца матрицы ***В***:

**

При выполнении действий над матрицами следует учитывать следующие свойства:

1. Произведение матриц некоммутативно, то есть .

2. Произведение матриц ассоциативно, то есть .

3. Произведение матриц подчиняется дистрибутивному закону, то есть

.

4. Произведение матрицы на нулевую матрицу равно нулевой матрице.

###### Понятие обратной матрицы

При решении системы линейных уравнений используется понятие обратной матрицы. Обратная матрица обозначается символом .

Матрица  называется обратной для матрицы ***А***, если произведение , где ***Е*** - единичная матрица, то есть матрица, у которой элементы по диагонали равны 1, а остальные нули.

Например:

.

Обратная матрица находится по формуле

 ,

здесь Δ - определитель матрицы ***А***, - матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы ***А***, где строки и столбцы меняются местами:

.

Эта матрица называется транспонированной.

Заметим, если определитель матрицы Δ равен нулю Δ=0 , то обратная матрица не существует.

**Понятие определителя. Свойства определителей**

Совокупность  чисел, расположенных в виде таблицы, называется определителем -го порядка. Для определителя используются следующие обозначения:

.

Числа  называются элементами определителя. Первый индекс обозначает номер строки, второй индекс  обозначает номер столбца. Порядок определителя равен числу строк. У определителя число строк всегда равно числу столбцов. Определитель является числом.

Определитель первого порядка содержит один элемент и равен ему

.

Определитель второго порядка вычисляется по следующему правилу

.

Определитель третьего порядка можно вычислить по следующей схеме, добавив к определителю первые два столбца:



Определители высших порядков вычисляются с помощью свойств определителей.

**Свойства определителей**

1. Определитель не изменится, если в нем строки и столбцы поменять местами.
2. Определитель изменит только знак, если в нем поменять местами какие-нибудь две строки или два столбца.
3. Общий множитель элементов строки или столбца можно выносить за символ определителя.
4. Если все элементы какой-нибудь строки или столбца равны нулю, то определитель равен нулю.
5. Определитель равен нулю, если элементы двух строк или столбцов пропорциональны.
6. Определитель равен нулю, если он имеет две одинаковых строки или два одинаковых столбца.
7. Если все элементы некоторой строки или столбца состоят из двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, в одном из которых элементами соответствующей строки являются первые слагаемые, во втором - вторые. Например:

.

8. Если к элементам некоторого столбца или строки определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца или строки, умноженные на любой общий множитель , то величина определителя не изменится. Например:

.

Следующее свойство позволяет понижать порядок определителя. Оно формулируется с помощью понятия алгебраического дополнения.

Алгебраическим дополнением элемента  называется произведение  на определитель, который получается вычеркиванием в данном определителе строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент .

1. Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца или строки на их алгебраические дополнения (теорема Лапласа). Например:



С помощью этого свойства вычисление определителя -го порядка приводится к вычислению определителей -го порядка. Эта процедура называется разложением определителя по элементам строки или столбца.

***Пример 14.*** Упростить определитель и вычислить его:

.

Прежде, чем вычислять определитель, можно упростить его, пользуясь свойствами определителей. В данном примере можно выполнить следующие действия: умножим элементы 1-го столбца на 2 и вычтем из элементов 2-го столбца, затем умножим элементы 1-го столбца на 3 и вычтем из элементов 3-го столбца. Тогда получим

.

Теперь можно легко вычислить этот определитель, разложив его по элементам 1-ой строки:



***Пример 15.*** Разложить определитель по элементам 2-ой строки.

.

Учитывая определение алгебраического дополнения, получим







Теперь вычисляем определитель: 

**Система линейных уравнений**

Линейные уравнения - это уравнения, в которых переменные имеют только первую степень и нет произведения переменных.

Система  линейных уравнений с  неизвестными записывается в виде:

 (1)

В частном случае число уравнений и число переменных совпадают.

Решением системы является совокупность  чисел, которые при подстановке их в уравнения (1) обращают их в тождество.

Если система (1) имеет хотя бы одно решение, она называется совместной; если нет ни одного решения, то система несовместна.

Если совместная система имеет только одно решение, то она называется определенной. Если более одного решения, то неопределенной.

Если определитель системы не равен нулю , то система имеет единственное решение. Для решения системы - линейных уравнений с - неизвестными существует несколько методов.

***Метод Крамера***

При использовании этого метода решение системы находится по формулам

  ...,  (2)

здесь -определитель системы, - определитель, в котором элементы *-*го столбца определителя системы заменяются соответствующими свободными членами уравнений системы.

При решении системы следует иметь в виду следующее:

1. Если , но хотя бы один из определителей , , ...,  не равен нулю, то система несовместна.
2. Если  и все определители , , ...,  равны нулю, то система или несовместна или имеет бесконечно много решений, если существует хотя бы одно решение.

***Пример 16.*** Решить систему уравнений

 

Найдем определитель системы:

.

Найдем вспомогательные определители

.

Аналогично находим

 , .

Теперь по формулам Крамера (2) найдем переменные

, , .

##### Матричный метод решения

Рассмотрим этот метод на примере системы трех линейных уравнений:



эту систему можно представить в матричной форме:

,

где

 ,  , .

Как видно, ***А*** это матрица, составленная из коэффициентов при перемененных, ***В*** - матрица - столбец из свободных членов уравнений, ***Х*** - матрица - столбец из переменных.

Решая матричное уравнение, находим

,

где - обратная матрица.

Итак, чтобы найти решение системы, нужно найти обратную матрицу  и умножить ее на матрицу ***В***.

***Пример 17.***  Решить систему матричным способом



Найдем определитель системы: .

Составим матричное уравнение: 

Найдем обратную матрицу. Для этого сначала найдем алгебраические дополнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Построим обратную матрицу:

.

Теперь найдем произведение матриц:

.

Итак, имеем .

Отсюда, , , .

***Метод Гаусса***

Этот метод решения системы линейных уравнений заключается в последовательном исключении переменных из уравнений для того, чтобы в одном из уравнений осталось одно неизвестное. Покажем, как применяется этот метод на примере.

***Пример 18.*** Решить систему уравнений

 

Для удобства преобразований, составим расширенную матрицу из коэффициентов и свободных членов:

.

Умножим 1-ую строку на (-4) и сложим со второй строкой; затем умножим 1-ую строку на (-6) и сложим с третьей, получим

.

Теперь умножим 2-ую строку на  и сложим с третьей; получим

.

Запишем полученные преобразованные уравнения:



Теперь из 3-его уравнения находим , из 2-го уравнения находим , из 1-го уравнения имеем . Итак, решение системы , , .

 Как видно из данного примера, преобразования уравнений нужно делать так, чтобы элементы матрицы, расположенные ниже диагонали оказались равны нулю.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

**Таблица производных основных функций**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  |
|  | 1 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

**Таблица основных интегралов**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |