Министерство образования и науки РФ
Федеральное агенство по образованию
Пермский государственный технический университет
Кафедра теоретической механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных, строительных, транспортных,
приборостроительных специальностей заочной формы обучения

Пермь 2006

Составили Н.А. Воронович, М.А. Осипенко, Р.М. Подгаец.

УДК 528.1

Теоретическая механика. Учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей заочной формы обучения / Сост. Н.А. Воронович, М.А. Осипенко, Р.М. Подгаец. – Перм. гос. техн. ун-т., Пермь. 2006, 138 с.

Приведены учебно-методические материалы для самостоятельного изучения курса "Теоретическая механика" студентами машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей заочной формы обучения: программа и методические указания по изучению теоретического материала, контрольные задания с методическими указаниями по их выполнению и примерами решения типовых задач, краткие сведения из теории по теме каждой задачи, контрольные вопросы, списки основной и дополнительной учебной литературы.

Табл. 18. Ил. 241. Библиогр.: 10 назв.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор А.А. Селянинов

кандидат физико-математических наук, доцент О.И. Дударь

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Хорошее усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении задач.

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику (включая элементы аналитической механики и теории колебаний).

Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике – дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

При изучении материала курса по учебнику нужно, прежде всего, уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное – это понять изложенное в учебнике, а не “заучить”.

Изучать материал рекомендуется по темам. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т. п. (они обычно бывают набраны в учебнике курсивом или разрядкой); в точных формулировках, как правило, существенно каждое слово, поэтому важно понять их смысл и уметь изложить их своими словами.

Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, поняв идею доказательства; пытаться просто их "заучивать" не следует, никакой пользы это не принесет.

Особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач; теоретические знания надо научиться применять на практике. Для этого, изучив материал данной темы, надо разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив внимание на методические указания по их решению. Затем решите самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника задач И. В. Мещерского [4] и после этого решите соответствующую задачу из контрольного задания. Разбирая и решая задачи, обращайте внимание на то, какие положения теории применяются.

Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы дать ответ на вопросы по этой теме (осуществить самопроверку); основные вопросы приведены в данном пособии.

Следует иметь в виду, что в различных учебниках материал может излагаться в разной последовательности. Поэтому ответ на какой-нибудь вопрос данной темы может оказаться в другой главе учебника, но на изучении курса в целом это, конечно, никак не скажется. Указания по выполнению контрольных заданий приводятся ниже после рабочей программы. Их надо прочитать обязательно и ими руководствоваться. Кроме того, к каждой задаче даются конкретные методические указания по ее решению, приводится пример решения, вопросы для самоконтроля и краткие сведения по соответствующим вопросам теории.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

(Соответствует стандартам специальностей 2005 г.)

Кинематика. Предмет кинематики. Векторный способ задания движения точки. Естественный способ задания движения точки. Понятие об абсолютно твердом теле. Поступательное движение твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение. Общий случай движения свободного твердого тела. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела. Составное движение точки.

Динамика и элементы статики. Предмет динамики и статики. Законы механики Галилея-Ньютона. Задачи динамики. Свободные прямолинейные колебания материальной точки. Относительное движение материальной точки. Механическая система. Масса системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Количество движения материальной точки и механической системы. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Понятие о силовом поле. Система сил. Аналитические условия равновесия произвольной системы сил. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Принцип Даламбера для материальной точки. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки Элементарная теория гироскопа.

Связи и их уравнения. Принцип возможных перемещений. Обобщенные координаты системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа второго рода. Принцип Гамильтона-Остроградского. Понятие об устойчивости равновесия. Малые свободные колебания механической системы с двумя (или n) степенями свободы и их свойства, собственные частоты и коэффициенты формы.

Явление удара. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе.

СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНОЙ

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2002, 416с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990, 607с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2002, 764с.
4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. – СПб.: Лань, 2002, 448с.
5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – СПб.: Лань, 1995, 669 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб.:Лань, 2002, 729с.
2. Старжинский В.М. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1980, 464с.
3. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – М.: Высшая школа, 1975, 248с.
4. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1991, 255с.
5. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1974, 287с.

При составлении данного пособия использованы материалы работы “Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений” Л. И. Котова, Р. И. Надеева, С. М. Тарг и др.; Под ред. С. М. Тарга – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. – 111 с.: ил.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Содержание заданий:
статика (С1-С3);
кинематика (К1-К4);
динамика (Д1-Д9).

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 – это рис. 4 к задаче С1 и т.д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берет рис. 4 и условия № 6 из таблицы. Шифр – это номер зачетной книжки.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, номера решаемых задач, фамилия, имя и отчество (полностью) студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес, если работа высылается по почте.

Решение каждой задачи следует начинать на новом развороте тетради. Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывать). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.* В результате в целом ряде задач чертеж получится более простым, чем общий.

*Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять **ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.***

Решение задач **необходимо сопровождать краткими пояснениями** (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут и будут возвращаться для переделки.

К работе, подаваемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа. К моменту сдачи экзамена, все контрольные работы по данному разделу курса должны быть зачтены. При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (тросы, передаточные ремни) являются нерастяжимыми и невесомыми; нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят; катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задачи и в таблице P_1, l_1, r_1 и т.п. означают вес или размеры тела 1; P_2, l_2, r_2 – тела *2* и т.д. Аналогично в кинематике и динамике V_B, a_B обозначают скорость и ускорение точки *B*, V_C, a_C – точки *C*; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1, ω_2, ε_2 – тела 2 и т.д. В каждой задаче подобные обозначения могут специально не оговариваться.

Следует иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи. Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой "Указания"; затем дается пример решения аналогичной задачи, Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Однако при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;* в конце должны быть даны ответы.

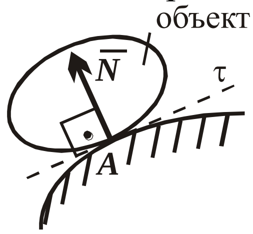
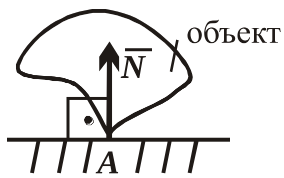
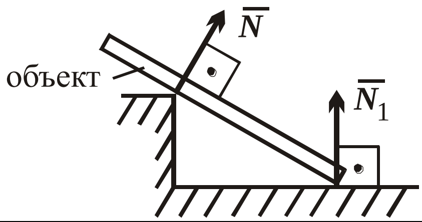
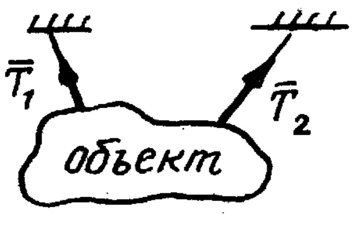
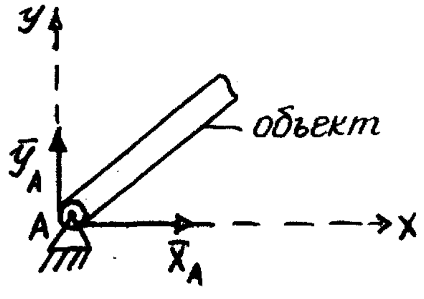
ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

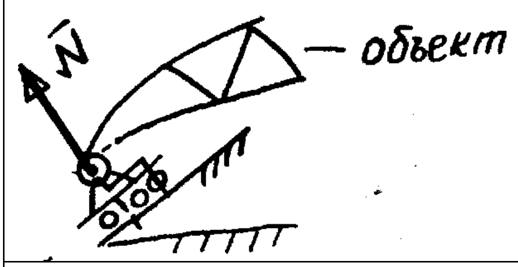
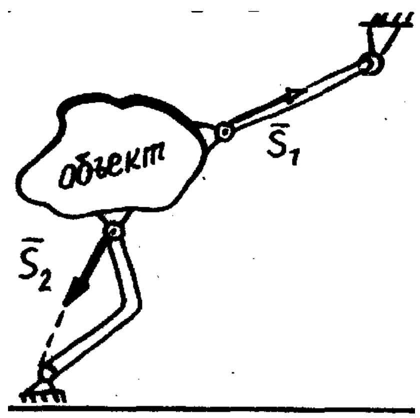
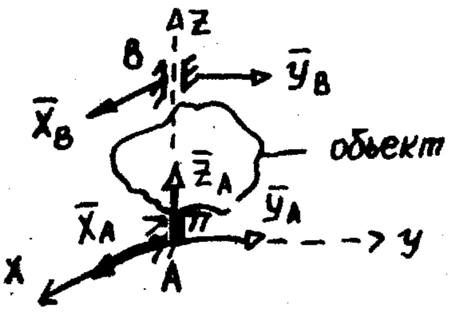
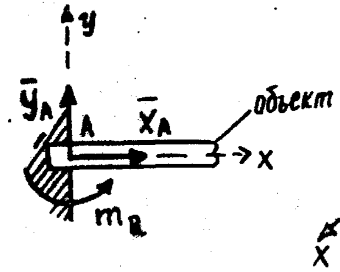
СТАТИКА

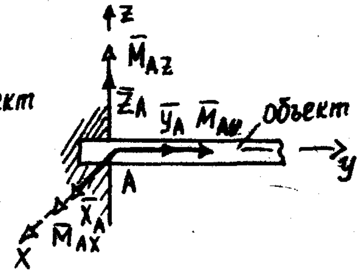
В статике рассматривается а) теория сил, б) равновесие тел под действием различных систем сил. Все задачи контрольного задания (С1-С3) относятся к теме о равновесии. Это позволяет привести общие для всех задач сведения справочного характера из теории и сформулировать алгоритм решения задач.

ВИДЫ СВЯЗЕЙ

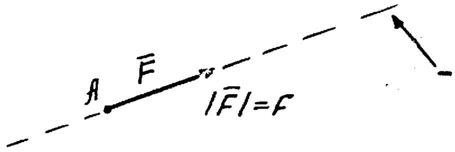
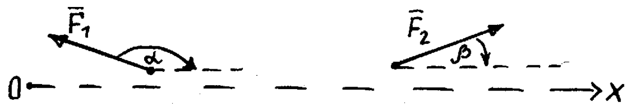
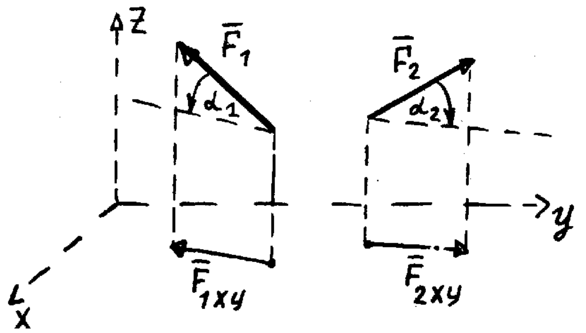
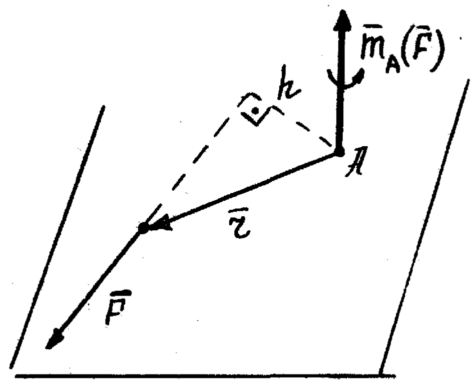
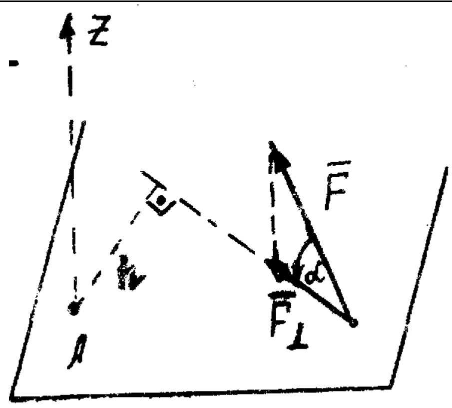
Связь – тело, препятствующее перемещению данного объекта (тела, узла) в пространстве. Реакция связи – сила, с которой связь действует на объект.

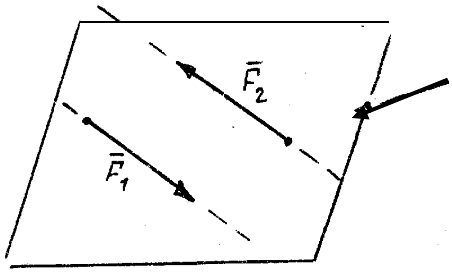
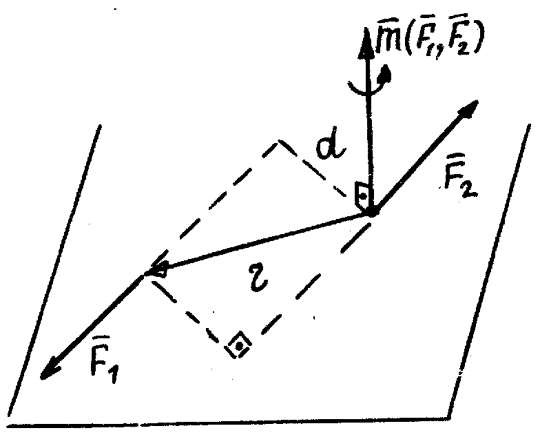
Вид связи	Направление реакции связи
Гладкая поверхность, на которую объект опирается в точке *A*.  	Реакция гладкой поверхности в точке *A* направлена по нормали к поверхности опоры.
Острие, угол, линия (гладкие). 	Реакция $\overline{N}$ направлена по нормали к поверхности объекта.
Гибкая связь (трос, цепь, нить). 	Реакция гибкой связи направлена вдоль связи от объекта (нить растянута).
Цилиндрический неподвижный шарнир. 	Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* расположена в плоскости, перпендикулярной оси шарнира; направление в плоскости не определено, указываем составляющие реакции шарнира по координатным осям: $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$.

<table>
<tr>
<td>Катки (подвижный шарнир) без трения.

</td>
<td>Реакция связи $\overline{N}$ направлена по нормали к поверхности опоры катков.</td>
</tr>
<tr>
<td>Невесомый стержень, концы которого закреплены шарнирами.

</td>
<td>Реакция связи направлена вдоль прямой, проходящей через концы стержня. Указываем от объекта, предполагая, что стержень растянут; минус в ответе означает, что стержень сжат.</td>
</tr>
<tr>
<td>Подшипник B и подпятник A (сферический шарнир A).

</td>
<td>Реакция подшипника B расположена в плоскости, перпендикулярной оси подшипника (ось z); указываем в плоскости две составляющие этой реакции по коорд. осям: $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$. Направление реакции подпятника A в пространстве не определено; указываем в пространстве три составляющие этой реакции по коорд. осям: $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Заделка объекта в другое тело.


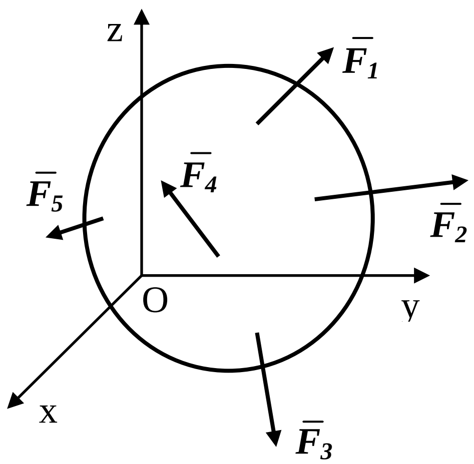
В плоскости


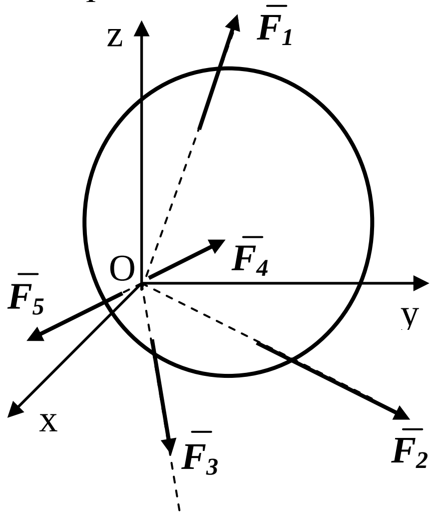
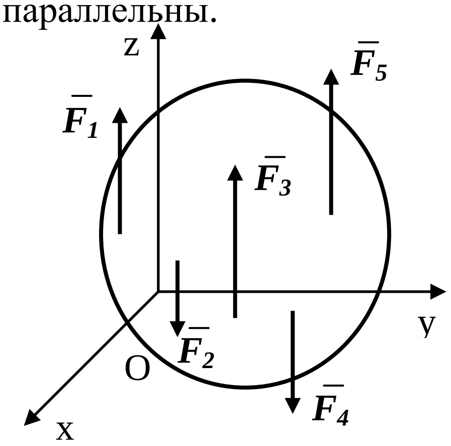
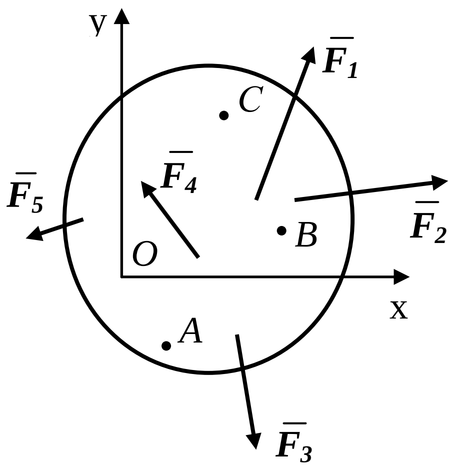
В пространстве</td>
<td>В случае плоской системы сил на объект действует сила, направление которой в плоскости действия сил не определено, и пара сил в этой плоскости.
В случае пространственной системы сил на объект действует сила, направление которой в пространстве не определено, и пара сил, направление вектора момента которой в пространстве не определено (см. рис.).</td>
</tr>
</table>

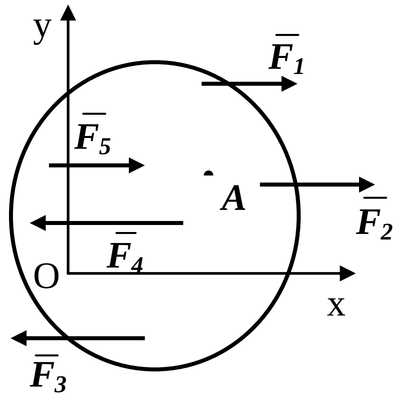
 – линия действия силы	Сила, действующая на твердое тело – **скользящий** вектор
	Проекция силы на ось $X_1 = F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha; \qquad F_{1x} < 0$ $X_2 = F_{2x} = F_2 \cdot \cos\beta; \qquad F_{2x} > 0$
	Проекция силы на плоскость $F_{1xy} = F_1 \cdot \cos\alpha_1$ $F_{2xy} = F_2 \cdot \cos\alpha_2$
	Момент силы относительно центра (точки) как вектор: $\bar{m}_A(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F};$ алгебраическое значение этого момента: $m_A(\bar{F}) = \pm h \cdot F$. Знак "+" соответствует повороту тела вокруг центра *A* против хода часовой стрелки; *h* – перпендикуляр, опущенный из центра *A* на линию действия силы (плечо силы)
	Момент силы относительно оси $m_z(\bar{F}) = \pm F_\perp \cdot h = \pm F \cdot \cos\alpha \cdot h,$ $\bar{F}_\perp$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси; *A* – точка пересечения оси с этой же плоскостью; *h* – плечо силы $\bar{F}_\perp$.

 плоскость действия пары сил	Пара сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ – две равные антипараллельные силы: $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2; \quad \lvert\bar{F}_1\rvert = \lvert\bar{F}_2\rvert$
	Действие пары сил полностью характеризуется вектором-моментом пары сил $\bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \bar{r} \times \bar{F}_1$; Момент пары сил, действующей на твердое тело, – **свободный** вектор. Алгебраическое значение момента пары сил: $m(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \pm F_1 \cdot d = \pm F_2 \cdot d$; d – плечо пары сил (перпендикуляр, опущенный из точки приложения силы на линию действия другой силы)

ВИДЫ СИСТЕМ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТВЕРДОЕ ТЕЛО, И УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Произвольная пространственная система сил – линии действия сил расположены в пространстве произвольно. 	Векторная форма: $\vec{R}^* = 0; \quad \vec{M}_O = 0$ (для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы сил равнялись нулю). Координатная форма (аналитическая): 1. $\sum F_{kx} = 0$ 4. $\sum m_x(\vec{F}_k) = 0$ 2. $\sum F_{ky} = 0$ 5. $\sum m_y(\vec{F}_k) = 0$ 3. $\sum F_{kz} = 0$ 6. $\sum m_z(\vec{F}_k) = 0$

Система сходящихся сил – линии действия сил пересекаются в одной точке.  	Векторная форма: $\vec{R}=0$, где $\vec{R}$ – равнодействующая системы сил. Координатная форма: 1. $\sum F_{kx}=0$; 2. $\sum F_{ky}=0$; 3. $\sum F_{kz}=0$ (для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на каждую ось была равна нулю).
Пространственная система параллельных сил – линии действия сил в пространстве параллельны.  	Векторная форма: $\vec{R}^*=0; \quad \vec{M}_O=0$. Координатная форма (ось Z параллельна линиям действия сил): 1. $\sum F_{kz}=0$; 2. $\sum m_x(\vec{F}_k)=0$; 3. $\sum m_y(\vec{F}_k)=0$.
Произвольная плоская система сил – линии действия сил расположены в одной плоскости произвольно  	Векторная форма: $\vec{R}^*=0; \quad \vec{M}_O=0$. Координатная форма: <u>1-я форма</u> (точка A – произвольная точка в плоскости): 1. $\sum F_{kx}=0$; 2. $\sum F_{ky}=0$; 3. $\sum m_A(\vec{F}_k)=0$. <u>2-я форма</u> (точки A, B, С не лежат на одной прямой): 1. $\sum m_A(\vec{F}_k)=0$; 2. $\sum m_B(\vec{F}_k)=0$; 3. $\sum m_C(\vec{F}_k)=0$ <u>3-я форма</u> (Ось OX не перпендикулярна прямой АВ): 1. $\sum m_A(\vec{F}_k)=0$; 2. $\sum m_B(\vec{F}_k)=0$; 3. $\sum F_{kx}=0$

<table>
<tr>
<td>Плоская система параллельных сил – линии действия сил параллельны и расположены в одной плоскости.
</td>
<td>Векторная форма:
$\vec{R}^* = 0; \quad \vec{M}_O = 0$.
Координатная форма (ось X параллельна линиям действия сил):
1. $\sum F_{kx} = 0$;
2. $\sum m_A(\vec{F}_k) = 0$.</td>
</tr>
</table>

Примерный план (алгоритм) решения задач статики:

1. Назвать (выделить) объект: тело, узел, равновесие которого надо рассмотреть в данной задаче.
2. Указать на рисунке силы, действующие на этот объект:

а) активные силы;

б) назвать каждую связь и пояснить направление реакций связи или их составляющих (мысленно освобождая объект от связи на основании аксиомы освобождения от связей);

3. Назвать вид полученной системы сил, учитывая расположение линий действия сил.
4. Сформулировать условия равновесия полученной системы сил в алгебраической (координатной) форме.
5. Провести на рисунке координатные оси (если заранее не потребовалось это сделать).
6. Составить уравнения равновесия.
7. Решить систему уравнений с пояснением.
8. Сделать проверку.
9. Записать ответ.

При работе необходимо использовать учебник, данное пособие и справочник по математике.

Задача С1

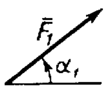
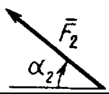
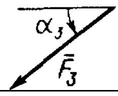
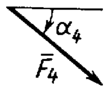
Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С1.0-С1.9, табл. С1) закреплена в точке *A* шарнирно, а в точке *B* прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке *C* к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом *P*=25 кН. На раму действуют пара сил с моментом *M* = 100 кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действуют сила $\overline{F}_2$ под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке *D*, и сила $\overline{F}_3$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке *E*, и т. д.)

Определить реакции связей в точках *A* и *B*, вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять *a* = 0,5 м.

Указания. Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента какой-либо силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$ (по правилу параллелограмма), для которых плечи легко определяются; затем применить теорему Вариньона (в алгебраической форме): $m_O(\overline{F}) = m_O(\overline{F}') + m_O(\overline{F}'')$.

Таблица С1

Сила								
Номер условия	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН	
	Точка прилож.	α_1, град.	Точка прилож.	α_2, град.	Точка прилож.	α_3, град.	Точка прилож.	α_4, град.
0	H	30	-	-	-	-	K	60
1	-	-	D	15	E	60	-	-
2	K	75	-	-	-	-	E	30
3	-	-	K	60	H	30	-	-
4	D	30	-	-	-	-	E	60
5	-	-	H	30	-	-	D	75
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15
8	H	60	-	-	D	30	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

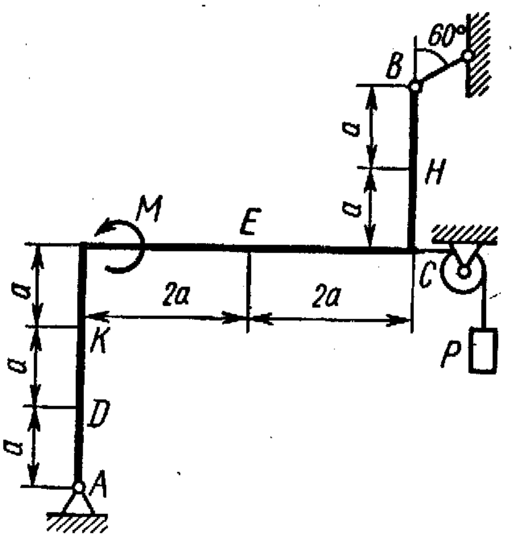


Рис. С1.0

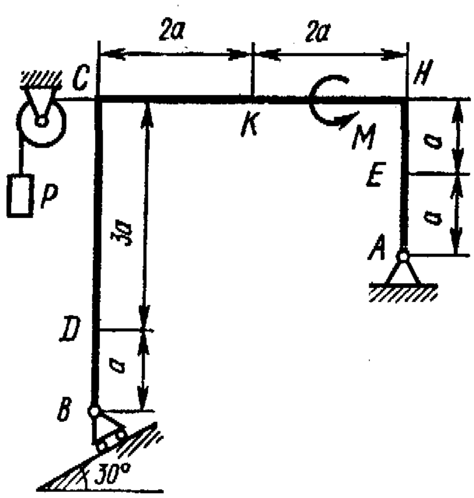


Рис. С1.1

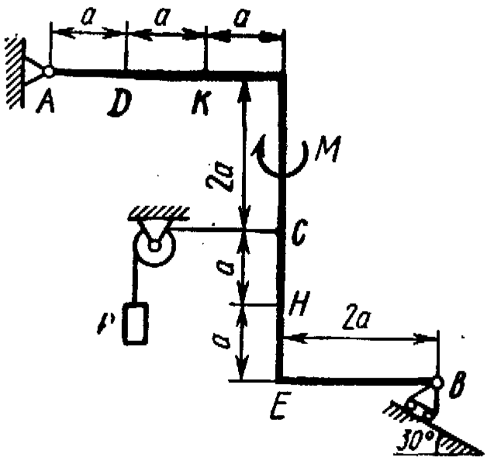


Рис. С1.2

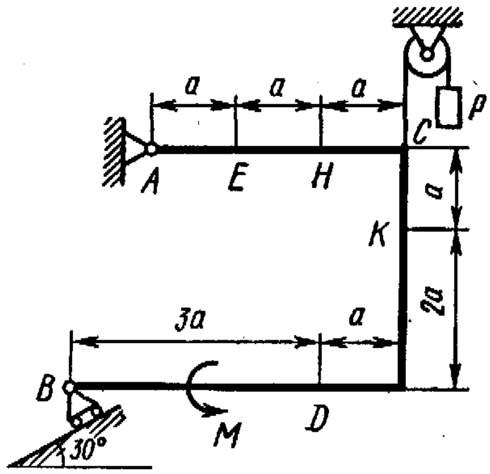


Рис. С1.3

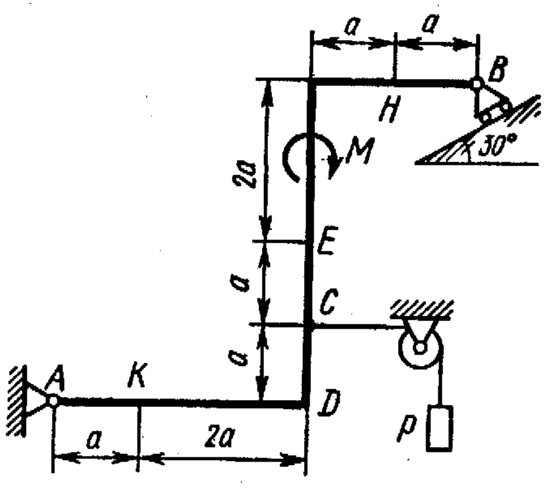


Рис. С1.4

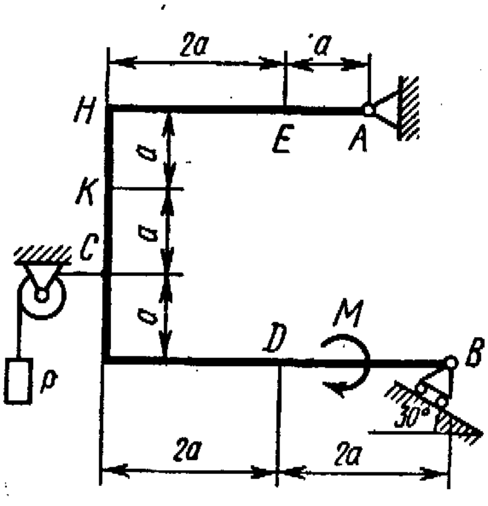


Рис. С1.5

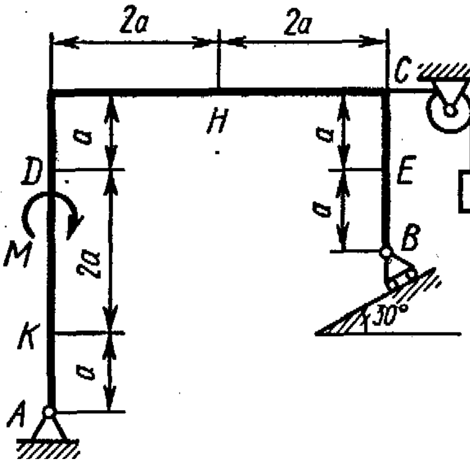


Рис. C1.6

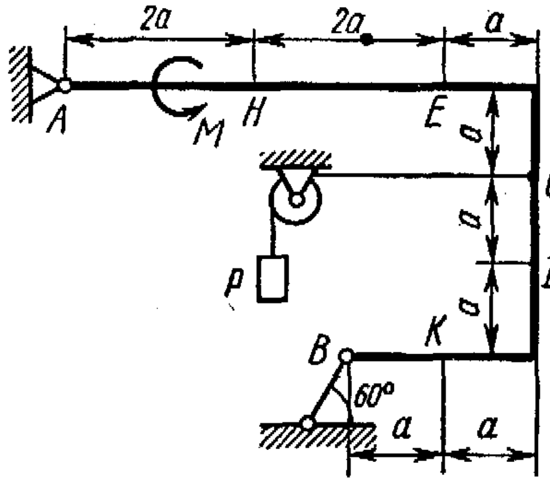


Рис. C1.7

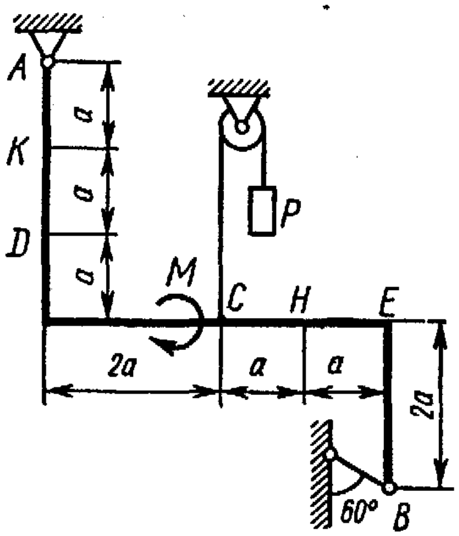


Рис. C1.8

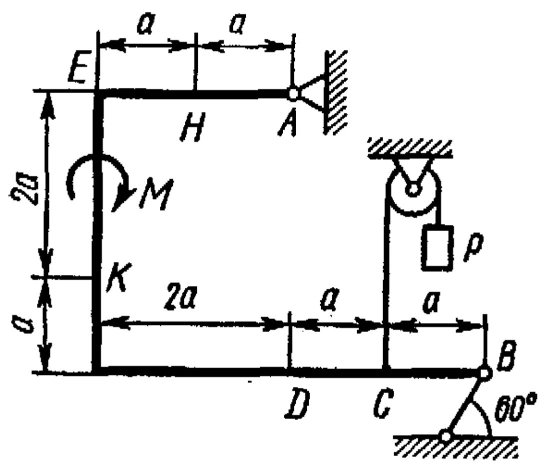


Рис. C1.9

Перед выполнением задания прочтите по учебнику темы: «Основные понятия и аксиомы статики», «Связи и реакции связей», «Плоская система сил», «Пара сил».

Вопросы, на которые следует обратить внимание и выучить:

1. Сила, линия действия силы.
2. Проекция силы на ось. В каком случае проекция силы на ось равна нулю?
3. Проекция силы на плоскость, в каком случае эта проекция равна нулю. Отличие проекции силы на плоскость от проекции силы на ось.
4. Алгебраической момент силы относительно центра (точки). В каком случае момент силы относительно центра равен нулю?
5. Что называется связями, перечислите виды связей.
6. Аксиома освобождения от связей.
7. Реакция связи, ее направление и точка приложения.
8. Какая система сил называется плоской (произвольной плоской)? Сформулировать и записать уравнения: условия равновесия плоской системы сил в векторной и алгебраической (координатной) формах.

Пример С1. Жесткая пластина *ABCD* (рис. С1) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* - подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

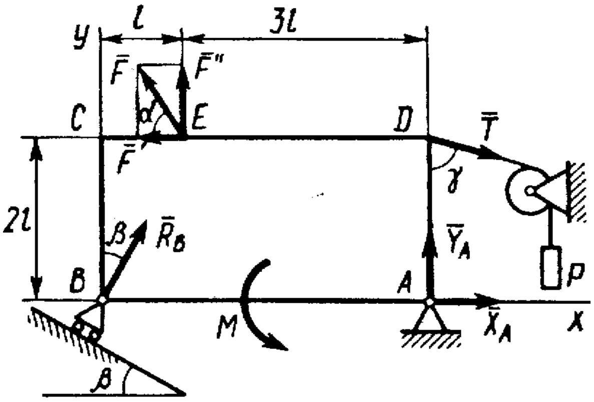


Рис. С1

Дано: F = 25 кН, α = 60°, P = 18 кН, γ = 75°, M = 50 кН · м, β = 30°, l= 0,5 м.

Определить: реакции в точках *A* и *B,* вызываемые действующими нагрузками.

Решение. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на пластину силы (рис. С1):

а) активные силы (нагрузки): силу $\overline{F}$ и пару сил с моментом *M*;

б) реакции связей:

в точке *A* связью является неподвижная шарнирная опора, ее реакцию изображаем двумя составляющими $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$, параллельными координатным осям;

в точке B связью является подвижная шарнирная опора на катках, ее реакция направлена перпендикулярно плоскости опоры катков;

в точке D связью является трос, реакция троса $\overline{T}$ направлена вдоль троса от пластины (по модулю $T = P$).

Получилась **плоская система сил**; составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки *A* разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}', \overline{F}''(F' = F\cos\alpha, F'' = F\sin\alpha)$ и воспользуемся теоремой Вариньона в алгебраической форме: $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'')$. Получим

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin 30^\circ - F\cos 60^\circ + T\sin 75^\circ = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos 30^\circ + F\sin 60^\circ - T\cos 75^\circ = 0, \tag{2}$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cos 30^\circ \cdot 4l + F\cos 60^\circ \cdot 2l - F\sin 60^\circ \cdot 3l - T\sin 75^\circ \cdot 2l = 0. \tag{3}$$

Решение системы уравнений начинаем с уравнения (3), так как оно содержит одну неизвестную R_B:

$$R_B = \frac{M + F\cos 60^\circ \cdot 2l - F\sin 60^\circ \cdot 3l - T\sin 75^\circ \cdot 2l}{\cos 30^\circ \cdot 4l} =$$

$$= \frac{50 + 25\cdot\cos 60^\circ \cdot 2\cdot 0.5 - 25\sin 60^\circ \cdot 3\cdot 0.5 - 18\sin 75^\circ \cdot 2\cdot 0.5}{\cos 30^\circ \cdot 4\cdot 0.5} = 7.3\,\text{кН}.$$

Подставляем R_B в уравнение (1):

$$X_A = -R_B\sin 30^\circ + F\cos 60^\circ - T\sin 75^\circ =$$

$$= -7.3\cdot\sin 30^\circ + 25\cdot\cos 60^\circ - 18\cdot\sin 75^\circ = -8.5\ \text{кН}.$$

Подставляем R_B в уравнение (2):

$$Y_A = -R_B\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ + T\cos 75^\circ =$$

$$= -7.3\cdot\cos 30^\circ - 25\cdot\cos 30^\circ + 18\cdot\cos 75^\circ = -23.3\,\text{кН}.$$

Проверка. Составим, например, уравнение $\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$ (или уравнение моментов относительно любой другой точки (кроме А). Если задача решена верно, то эта сумма моментов должна **получиться** равной нулю.

$$\sum m_B(\overline{F}_k) = M + Y_A\cdot 4l - T\cos 75^\circ \cdot 4l - T\sin 75^\circ \cdot 2l + F\cos 60^\circ \cdot 2l + F\sin 60^\circ \cdot l =$$

$$= 50 + (-23.3)\cdot 2 - 18\cos 75^\circ \cdot 2 - 18\sin 75^\circ \cdot 1 + 25\cos 60^\circ \cdot 1 + 25\sin 60^\circ \cdot 0.5 = 0.$$

Ответ: X_A = -8,5 кН, Y_A = -23,3 кН, R_B = 7,3 кН. Знаки указывают, что составляющие реакции шарнира $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

В примерах выполнения последующих задач решение уравнений и проверка не приводятся, но это необходимо делать при выполнении каждой задачи контрольной работы.

Задача С2

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам *A, B, C, D* (рис. С2.0-С2.9, табл. С2). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах *H, K, L* или *M* прямоугольного параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблицы. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила P=200 Н; во втором узле приложена сила Q=100 Н. Сила $\overline{P}$ образует с положительными направлениями координатных осей *x, y, z* углы, равные соответственно $\alpha_1 = 45^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\gamma_1 = 60^\circ$, а сила $\overline{Q}$ – углы $\alpha_2 = 60^\circ$, $\beta_2 = 45^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$; направления осей *x, y, z* для всех рисунков показаны на рис. С2.0.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости *xy*, – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью *xy* угол $\varphi = 60^\circ$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta = 51^\circ$. Определить усилия в стержнях.

На рис. С2.10 в качестве примера показано, как должен выглядеть чертеж С2.1, если по условиям задачи узлы находятся в точках *L* и *M*, а стержнями являются *LM, LA, LB; MA, MC, MD*. Там же показаны углы φ и θ; при решении своей задачи на рисунке следует указать заданные значения этих углов.

Указания. Задача С2 – на равновесие пространственной системы сходящихся сил. При ее решении следует рассмотреть отдельно равновесие каждого из двух узлов, где сходятся стержни и приложены заданные силы, и учесть закон о равенстве действия и противодействия; начинать с узла, где сходятся три стержня.

Изображать чертеж можно без соблюдения масштаба так, чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня (например, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ и т.д.).

Таблица С2

Номер Условия	0	1	2	3	4
Узлы	*H, M*	*L, M*	*K, M*	*L, H*	*K, H*
Стержни	*HM, HA, HB, MA, MC, MD.*	*LM, LA, LD, MA, MB, MC.*	*KM, KA, KB, MA, MC, MD.*	*LH, LC, LD, HA, HB, HC.*	*KH, KB, KC, HA, HC, HD.*
Номер условия	5	6	7	8	9
Узлы	*M, H*	*L, H*	*K, H*	*L, M*	*K, M*
Стержни	*MH, MB, MC, HA, HC, HD.*	*LH, LB, LD, HA, HB, HC.*	*KH, KC, KD, HA, HB, HC.*	*LM, LB, LD, MA, MB, MC.*	*KM, KA, KD, MA, MB, MC.*

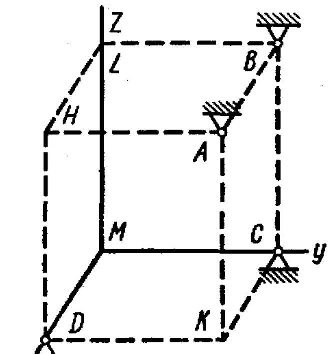


Рис. С2.0

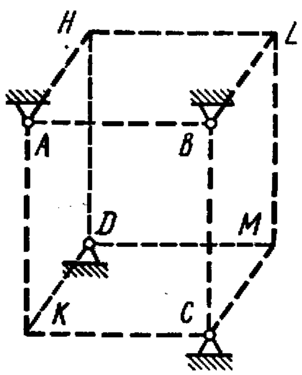


Рис. С2.1

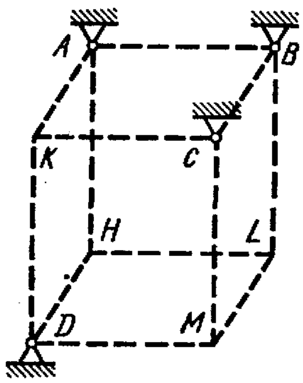


Рис. С2.2

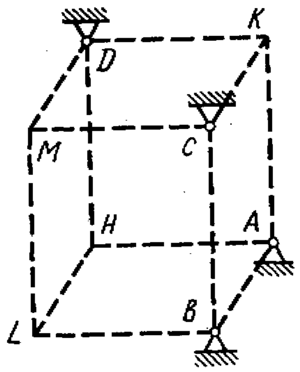


Рис. C2.3

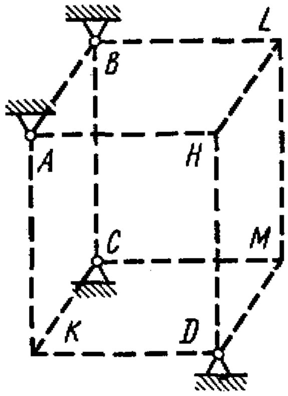


Рис. C2.4

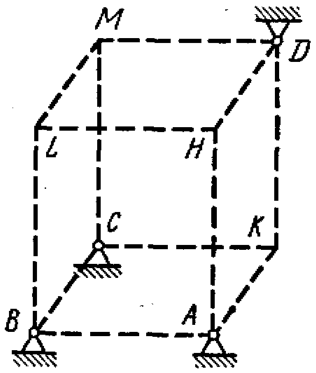


Рис. C2.5

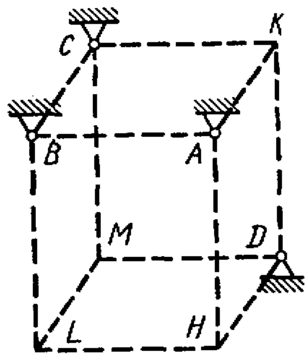


Рис. C2.6

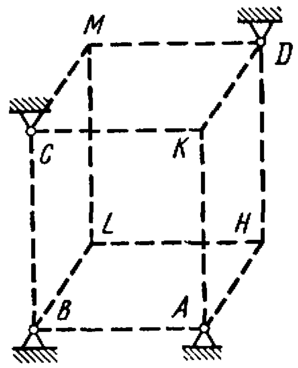


Рис. C2.7

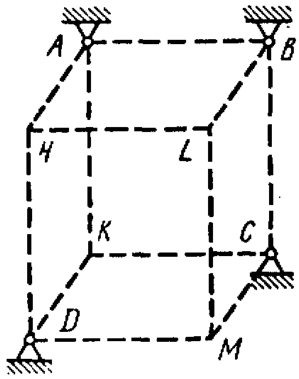


Рис. C2.8

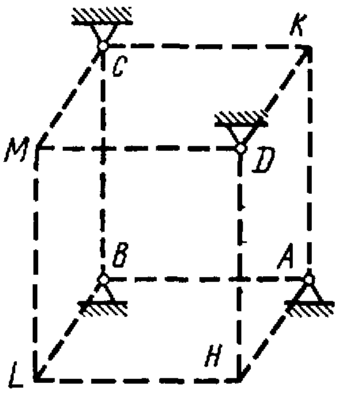


Рис. C2.9

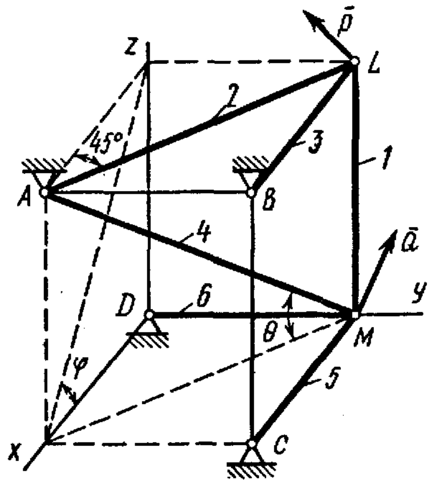


Рис. C2.10

Перед выполнением задачи С2 дополнительно к теории, указанной к задаче С1, разберите по учебнику тему “Система сходящихся сил”. Ответьте на вопросы:

1. Дайте определение: равнодействующая системы сил.
2. Какая система сил называется сходящейся ?
3. Нахождение равнодействующей $\overline{R}$ системы сходящихся сил графическим способом (правило параллелограмма и векторного многоугольника) и аналитическим (координатным) способом.
4. Сформулируйте и запишите уравнения: условия равновесия системы сходящихся сил в алгебраической (координатной) форме.

Пример С2. Конструкция состоит из невесомых стержней 1, 2, …, 6, соединенных друг с другом (в узлах *K* и *M*) и с неподвижными опорами *A, B, C, D* шарнирами (рис. С2). В узлах *K* и *M* приложены силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, образующие с координатными осями углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 соответственно (на рисунке показаны только углы α_1, β_1, γ_1).

Дано: P=100 Н, $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 60°$, $\gamma_1 = 45°$; Q =50 Н, $\alpha_2 = 45°$, $\beta_2 = 60°$, $\gamma_2 = 60°$, $\psi = 30°$, $\varphi = 60°$, $\delta = 74°$.

Определить:
усилия в стержнях 1–6.

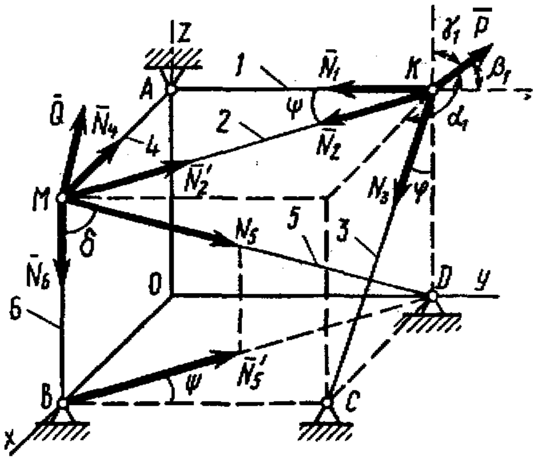


Рис. С2

Решение. 1. Рассмотрим равновесие узла *K*, в котором сходятся стержни 1, 2, 3. На узел действуют:

а) активная сила $\overline{P}$;

б) реакции связей (стержней): $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, которые направим по стержням от узла, считая стержни растянутыми. Получилась пространственная система сходящихся сил. Составим ее уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ P\cos\alpha_1 + N_2 \sin\psi + N_3 \sin\varphi = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ P\cos\beta_1 - N_1 - N_2 \cos\psi = 0; \qquad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0,\ P\cos\gamma_1 - N_3 \cos\varphi = 0. \qquad (3)$$

Решив уравнения (1), (2), (3) при заданных числовых значениях силы *P* и углов, получим N_1=349 Н, N_2= -345 Н, N_3 =141 Н.

2. Рассмотрим равновесие узла *M*. На узел действуют:

а) активная сила $\overline{Q}$;

б) реакции связей (стержней): $\overline{N}_2'$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, $\overline{N}_6$. При этом по закону о равенстве действия и противодействия реакция $\overline{N}_2'$ направлена противоположно $\overline{N}_2$, численно же $N_2' = N_2$. Получилась пространственная система сходящихся сил. Составим ее уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ Q\cos\alpha_2 - N_2\sin\psi - N_4 - N_5\sin\delta\sin\psi = 0; \qquad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Q\cos\beta_2 + N_2\cos\psi + N_5\sin\delta\cos\psi = 0; \qquad (5)$$

$$\sum F_{kz} = 0,\ Q\cos\gamma_2 - N_5\cos\delta - N_6 = 0. \qquad (6)$$

При определении проекций силы $\overline{N}_5$ на оси *Ox* и О*y* в уравнениях (4) и (5) удобнее сначала найти проекцию $\overline{N}_5'$ этой силы на плоскость *xOy* (по числовой величине $N_5' = N_5\sin\delta$), а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на оси *Ox, Oy*.

Решив систему уравнений (4), (5), (6) и учитывая, что $N_2' = N_2 = -345$ Н, найдем, чему равны N_4, N_5, N_6. Напоминаем, что в своей задаче решение систем уравнений (1)-(3) и (4)-(6) следует выполнить подробно и с пояснениями.

После решения сделайте проверку, составив для любого узла уравнение $\sum F_{kx1}$, где ось x_1 направьте, например, по диагонали квадрата, расположенного в плоскости *xOy*. Эта сумма должна получиться равной нулю.

Ответ: N_1=349 Н; N_2 = -345 Н; N_3 =141 Н; N_4=50 Н; N_5 =329 Н; N_6 =-66 Н. Знаки показывают, что стержни *2* и *6* сжаты, остальные – растянуты.

Задача С3

Однородная прямоугольная плита весом *P* = 5 кН со сторонами *AB* = 3*l*, *BC* = 2*l* закреплена в точке *A* сферическим шарниром, а в точке *B* цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем *CC′* (рис. С3.0-С3.9). Размеры 3*l* и 2*l* укажите на рисунке.

На плиту действуют пара сил с моментом *M* = 6 кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С3; при этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости *xOy,* сила $\overline{F}_2$ – в плоскости, параллельной *xOz,* сила $\overline{F}_3$ – в плоскости, параллельной *yOz*. Точки приложения сил *(D, E, H)* находятся в серединах сторон плиты. Укажите на своем рисунке численные значения всех углов.

Определить: реакции связей в точках *A, B* и *C*. При подсчетах принять *l*= 0,8 м.

Указания. Задача С3 – на равновесие тела под действием пространственной системы сил. При составлении уравнений моментов относительно каждой из координатных осей удобно сделать дополнительный рисунок: вид на плоскость, перпендикулярную этой оси.

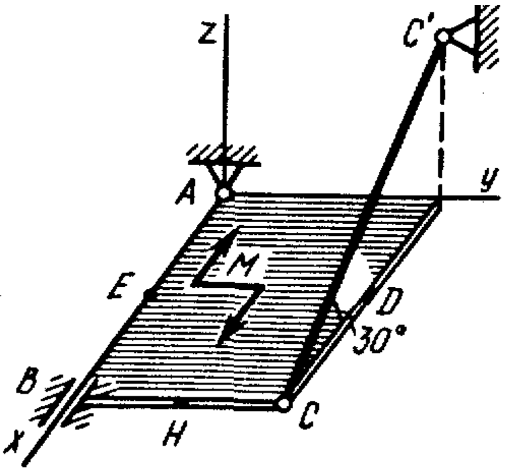


Рис. С3.0

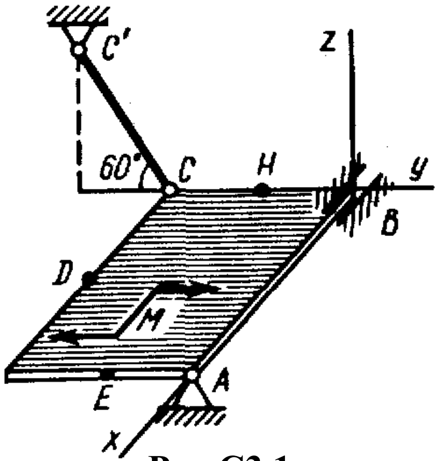


Рис.С3.1

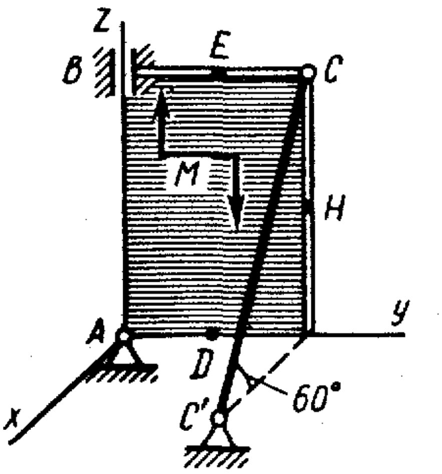


Рис. С3.2

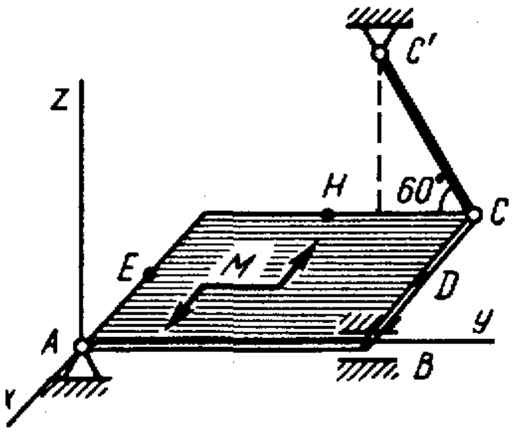


Рис. С3.3

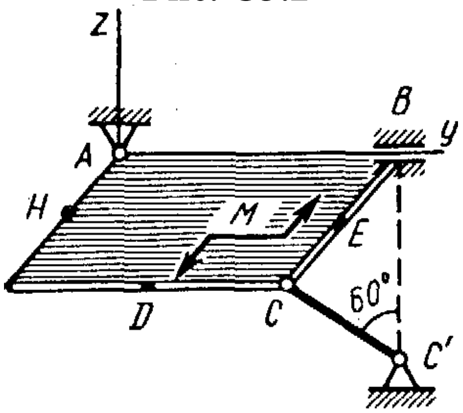


Рис. С3.4

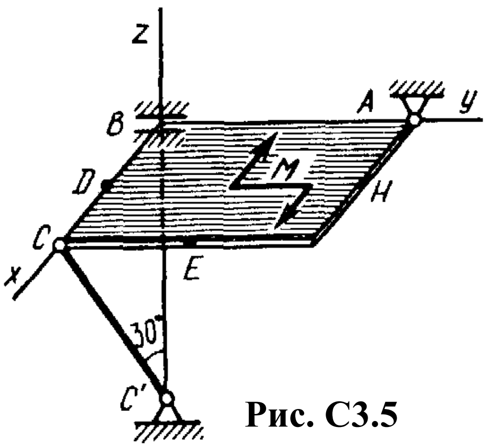


Рис. С3.5

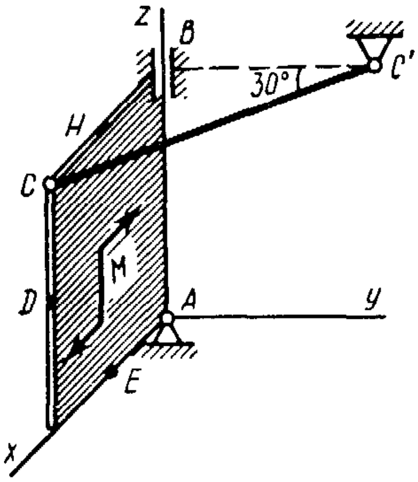


Рис. С3.6

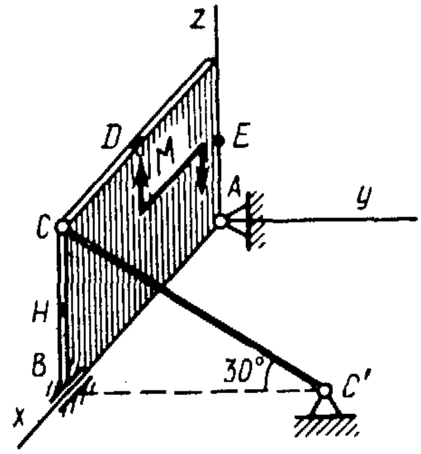


Рис. С3.7

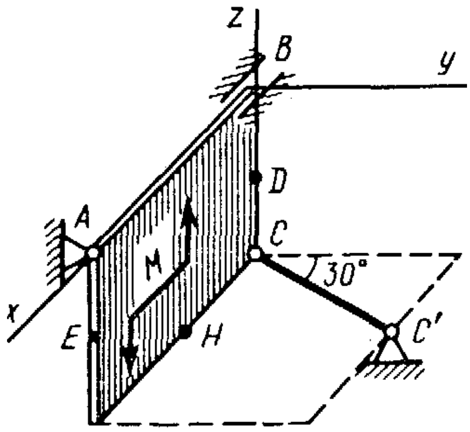


Рис. С3.8

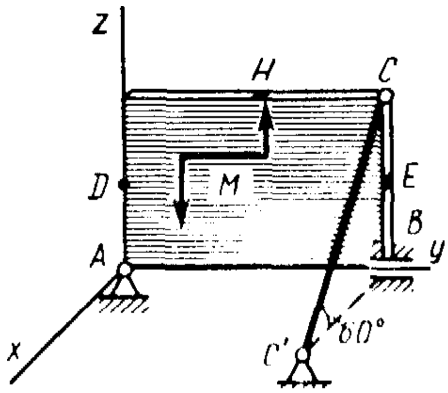
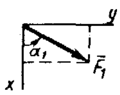
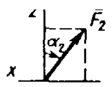
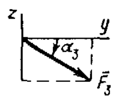
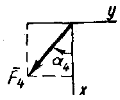


Рис. С3.9

Таблица С3

Сила								
Номер условия	F_1 = 4 кН		F_2 = 6 кН		F_3 = 8 кН		F_4 = 10 кН	
	Точка прилож.	α_1, град.	Точка прилож.	α_2, град.	Точка прилож.	α_3, град.	Точка прилож.	α_4, град.
0	D	60	-	-	E	0	-	-
1	H	90	D	30	-	-	-	-
2	-	-	E	60	-	-	D	90
3	-	-	-	-	E	30	H	0
4	E	0	-	-	H	60	-	-
5	-	-	D	60	H	0	-	-
6	-	-	H	30	-	-	D	90
7	E	30	H	90	-	-	-	-
8	-	-	-	-	D	0	E	60
9	-	-	E	90	D	30	-	-

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Произвольная пространственная система сил».

Вопросы, на которые следует обратить внимание и выучить:

1. Момент силы относительно оси, его вычисление. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю? Объясните каждый случай, опираясь на правило вычисления.
2. Какая система сил называется пространственной (произвольной пространственной)?
3. Сформулируйте и запишите уравнения: условия равновесия пространственной системы сил в векторной и алгебраической (координатной) формах.

Пример С3. Вертикальная прямоугольная плита весом P (рис. С2) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD', лежащим в плоскости, параллельной плоскости yz. На плиту действуют сила $\overline{F}_1$ (в плоскости xz), сила $\overline{F}_2$, (параллельная оси y) и пара сил с моментом M (в плоскости плиты).

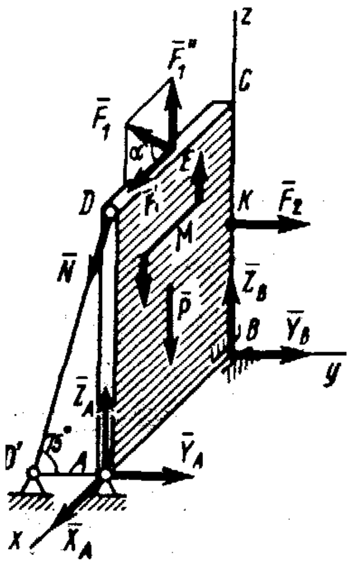


Рис. С3

Дано: P= 5 кН, M= 3 кН ·м, F_1= 6 кН, F_2 = 7,5 кН, a = 30°, AB = 1 м, BC= 2 м, CE = 0,5 AB, BK = 0,5 BC.

Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют:

а) активные силы $\overline{P}, \overline{F}_1, \overline{F}_2$ и пара сил, момент которой M;

б) реакции связей: реакцию сферического шарнира A разложим на три составляющие $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$, цилиндрического шарнира (подшипника) B – на две составляющие $\overline{Y}_B, \overline{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $\overline{N}$ стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растянут.

Силы, приложенные к плите, образуют пространственную систему сил. Составляем уравнения ее равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + F_1 \cos 30° = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + F_2 - N\cos 75^\circ = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P - N\sin 75^\circ + F_1 \sin 30° = 0, \tag{3}$$

$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0, \quad -F_2 \cdot BK + N\cos 75^\circ \cdot BC = 0, \tag{4}$$

$$\sum m_y(\overline{F}_k) = 0, \quad P\frac{AB}{2} + F_1 \cos 30° \cdot BC - F_1 \sin 30° \frac{AB}{2} - \\ - Z_A \cdot AB + N\sin 75^\circ \cdot AB + M = 0, \tag{5}$$

$$\sum m_z(\overline{F}_k) = 0, \quad Y_A \cdot AB - N\cos 75^\circ \cdot AB = 0. \tag{6}$$

Для определения момента силы $\overline{F}_1$ относительно оси y раскладываем $\overline{F}_1$ на составляющие $\overline{F}_1'$ и $\overline{F}_1''$, параллельные осям x и z ($F_1' = F_1 \cos\alpha, F_1'' = F_1 \sin\alpha$), и применяем теорему Вариньона (относительно оси). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\overline{N}$.

Подставив в уравнения (1)-(6) числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, найдем величины реакций связей.

В своей задаче систему уравнений (1)-(6) следует решить полностью и с пояснениями. Сделайте проверку, например, составив уравнение моментов относительно оси x_1, проведенной параллельно оси x.

Ответ: X_A = -5,2 кН, Y_A = 3,8 кН, Z_A = 28,4 кН, Y_B = -7,5 кН, Z_B = -12,4 кН, N = 14,5 кН, Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$ направлены противоположно показанным на рис. С2.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО СТАТИКЕ

1. Предмет статики. Основные понятия статики (абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, внешние и внутренние силы). Аксиомы статики. Теорема об уравновешивании двух сходящихся сил третьей силой.
2. Несвободное твердое тело. Связи и реакции связей, виды связей.
3. Проекция силы на ось и на плоскость.
4. Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический (координатный) способы нахождения равнодействующей. Условия равновесия системы сходящихся сил в векторной, графической и аналитической формах.
5. Алгебраический момент силы относительно точки. Момент силы относительно центра как вектор.
6. Момент силы относительно оси; случаи равенства нулю этого момента.
7. Пара сил. Алгебраический момент пары сил. Момент пары сил как вектор.
8. Условие эквивалентности пар сил (без доказательства). Свойства пары сил.
9. Теорема о параллельном переносе силы.

10. Приведение произвольной системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил и их нахождение.
11. Частные случаи приведения системы сил к центру (равнодействующая, пара сил, динамический винт) (без доказательства).
12. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей силы относительно центра и оси (без доказательства).
13. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил в векторной и аналитической (координатной) формах.
14. Частные случаи уравнений равновесия (плоская система сил, система параллельных сил на плоскости и в пространстве).

КИНЕМАТИКА

В кинематике рассматривается движение точек, тел и механических систем без учета действующих сил (геометрия движения).

В отличие от статики, темы задач разные; поэтому краткие сведения из теории помещены в каждой задаче.

Задача К1
(тема: "Кинематика точки")

Под номером К1 помещены две задачи К1а и К1б.

Задача К1а. Точка *B* движется в плоскости *xy* (рис. К1.0-К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x= f_1\ (t)$, $y = f_2\ (t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах (координатный способ задания движения точки). Зависимость $x=f_1\ (t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2\ (t)$ дана в табл. К1.

Найти уравнение траектории точки, а для момента времени t_1 = 1с определить координаты, скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Выполнить чертеж, на котором построить траекторию точки, отметить положение точки при t_1 = 1с и в этом положении построить все найденные векторы.

Задача К1б. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$м по закону $s = f(t)$, заданному в таблице К1 (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\cup}{AM}$ – расстояние точки от некоторого начала *A*, измеренное вдоль дуги окружности (естественный способ задания движения точки). Определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$с. Изобразить на рисунке векторы $\overline{V}$, $\overline{a}_n$, $\overline{a}_\tau$, $\overline{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении *M*, а положительное направление отсчета s – от *A* к *M*. Установить характер движения точки по траектории при $t_1 = 1$с (ускоренное или замедленное).

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	Рис. 0-2	Рис. 3-6	Рис. 7-9	
0	$12\sin(\pi t/6)$	$2t^2+2$	$4\cos(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/6)$
1	$-6\cos(\pi t/3)$	$8\sin(\pi t/4)$	$6\cos^2(\pi t/6)$	$2\sin(\pi t/3)$
2	$-3\sin^2(\pi t/6)$	$(2+t)^2$	$4\cos(\pi t/3)$	$6t-2t^2$
3	$9\sin(\pi t/6)$	$2t^3$	$10\cos(\pi t/6)$	$-2\sin(\pi t/6)$
4	$3\cos(\pi t/3)$	$2\cos(\pi t/4)$	$-4\cos^2(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/3)$
5	$10\sin(\pi t/6)$	$2-3t^2$	$12\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$
6	$6\sin^2(\pi t/6)$	$2\sin(\pi t/4)$	$-3\cos(\pi t/6)$	$3t^2-10t$
7	$-2\sin(\pi t/6)$	$(t+1)^3$	$-8\cos(\pi t/3)$	$-2\cos(\pi t/3)$
8	$9\cos(\pi t/3)$	$2-t^3$	$9\cos(\pi t/6)$	$3\sin(\pi t/6)$
9	$-8\sin(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/4)$	$-6\cos(\pi t/3)$	$-2\cos(\pi t/6)$

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1 = 1 с. В некоторых вариантах задачи К1а при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

В задаче К1а чертеж следует выполнить на клетчатой или миллиметровой бумаге, указав масштабы длины, скорости и ускорения.

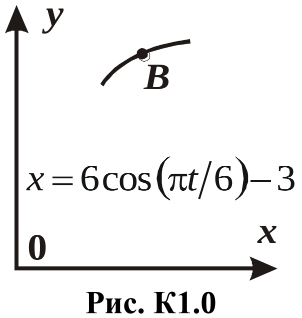


Рис. К1.0

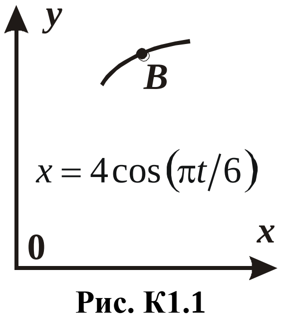


Рис. К1.1

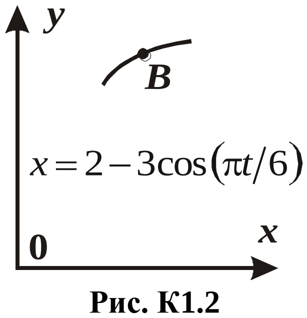


Рис. К1.2

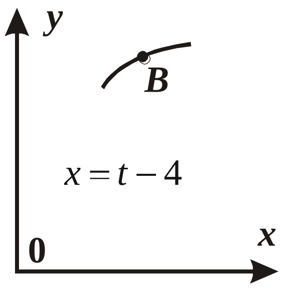


Рис. К1.3

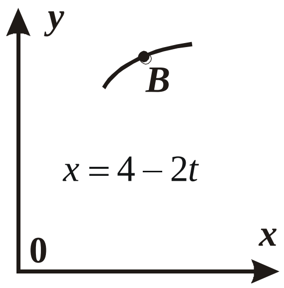


Рис. К1.4

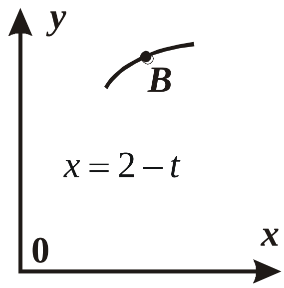


Рис. К1.5

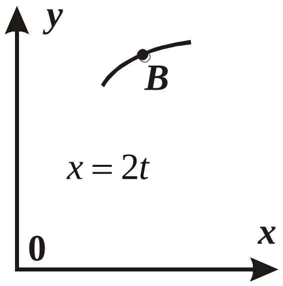


Рис. К1.6

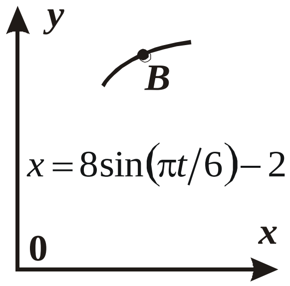


Рис. К1.7

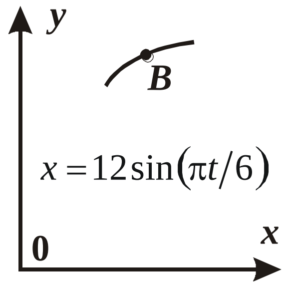


Рис. К1.8

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Кинематика точки».

Вопросы, на которые следует обратить внимание и выучить:

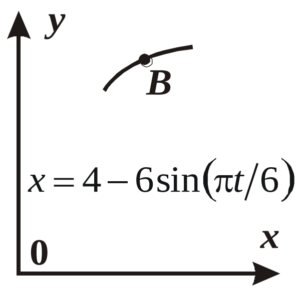


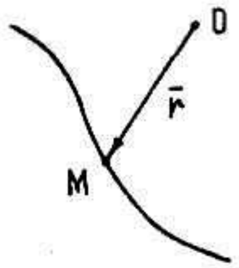
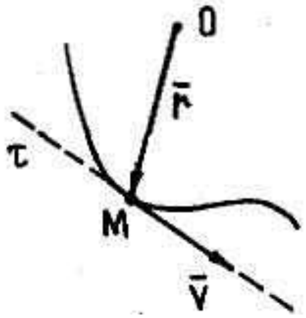
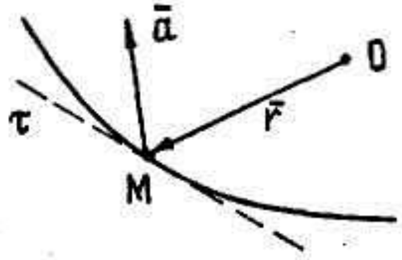
Рис. К1.9

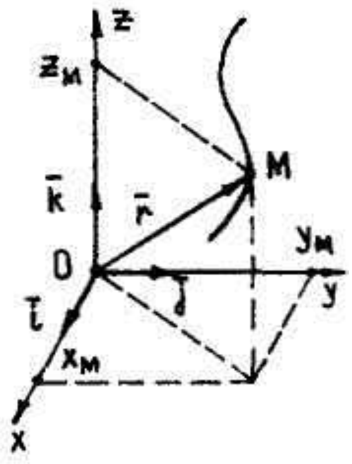
1. Что означает задать движение точки?
2. Три основных способа задания движения точки (векторный, координатный, естественный).
3. Объясните, как в каждом из способов задать движение точки (уравнения движения);
4. Как определяются траектория точки, ее скорость $\overline{V}$ и ускорение $\vec{a}$ (величина и направление) в каждом способе?
5. Поясните, как строятся естественные оси (в какой точке находится начало координат, каково направление каждой оси);
6. Каков физический смысл векторов $\vec{a}$, $\vec{a}_n, \vec{a}_\tau$;
7. Поясните, как определить характер движения точки по траектории (ускоренное или замедленное).

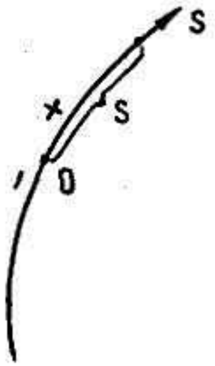
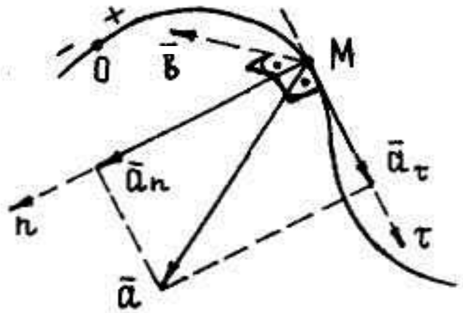
Кинематика точки (краткие сведения из теории)

Задать движение точки - это значит указать способ, позволяющий определить положение точки в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета.

Три основных способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

Способ задания движения точки.	Задание движения. Уравнения движения точки.	Определение траектории точки.	Определение скорости точки ($\bar{V}$).	Определение ускорения точки ($\bar{a}$).
Векторный способ	 $\bar{r}$ - радиус-вектор, проведенный из неподвижного центра O в точку M, которая движется. $\bar{r} = \bar{r}(t)$ - уравнение движения точки в векторной форме.	Траектория точки - геометрическое место концов радиуса-вектора $\bar{r}$, следящего за движением точки (линия, которую движущаяся точка описывает в пространстве).	$\bar{V} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$; направлен вектор $\bar{V}$ по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки.  $\bar{V}$ характеризует быстроту изменения $\bar{r}$ по величине и направлению.	 Вектор $\bar{a}$ характеризует быстроту изменения $\bar{V}$ по величине и направлению. $\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$; Вектор $\bar{a}$ направлен в сторону вогнутости траектории, расположен в соприкасающейся плоскости. Если точка при движении остается в плоскости, то вектор $\bar{a}$ лежит в этой плоскости.

Координат- ный способ	 $x = x(t)$ уравнения $y = y(t)$ движения $z = z(t)$ точки M в координат- ной форме.	Траектория точки - это линия, которую описывает точка при движении. Уравнение линии получим, исключив параметр t из уравнений движения; или строим линию по точкам, подставляя значения t в уравнения движения.	Уравнения движения позволяют определить проекции $\overline{V}$ на оси, затем величину и направление. $V_x = \frac{dx}{dt}$; $V_y = \frac{dy}{dt}$; $V_z = \frac{dz}{dt}$; модуль: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$; $\cos(\overline{V} \hat{,} \overline{i}) = \frac{V_x}{V}$; $\cos(\overline{V} \hat{,} \overline{j}) = \frac{V_y}{V}$ $\cos(\overline{V} \hat{,} \overline{k}) = \frac{V_z}{V}$	Проекции $\overline{a}$ на координатные оси: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$; модуль: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$; $\cos(\overline{a} \hat{,} \overline{i}) = \frac{a_x}{a}$; $\cos(\overline{a} \hat{,} \overline{j}) = \frac{a_y}{a}$; $\cos(\overline{a} \hat{,} \overline{k}) = \frac{a_z}{a}$.

Естественный способ	Траектория известна заранее и считается криволинейной осью s. На траектории указано начало отсчета координаты s (ноль 0), направление отсчета s (+, -); $s = s(t)$ - уравнение (закон) движения точки по траектории.  	Траектория известна.	$V = \frac{ds}{dt}$; если $V > 0$, то точка движется в сторону положительных значений s; если $V < 0$, - точка движется в сторону отрицательных значений s; вектор $\overline{V}$ направлен по касательной к траектории в данной точке.	Естественные оси: начало осей в том месте, где находится движущаяся точка M. Ось τ направлена по касательной к траектории. Ось n - главная нормаль - $\perp$ к оси τ, расположена в соприкасающейся плоскости; направлена в сторону вогнутости траектории. Ось b - бинормаль - $\perp$ к плоскости (τ, n).  Проекции $\overline{a}$ на естественные оси: $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$; $a_n = \frac{V^2}{\rho}$; $a_b = 0$; при $a_\tau > 0$ вектор $\overline{a}$ направлен в сторону положительных значений s; ρ - радиус кривизны траектории в точке M. Если знаки a_τ и V совпадают, то движение точки ускоренное, в противном случае - замедленное. $\overline{a}_n \perp \overline{a}_\tau$; $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Пример К1а. Уравнения движения точки в плоскости заданы координатным способом и имеют вид:

$$x = 4\sin\frac{\pi t}{2}, \tag{1}$$

$$y = 6\cos\frac{\pi t}{2}, \tag{2}$$

где время t задано в секундах, координаты x, y – в метрах.

Найти: уравнение траектории точки; положение точки на траектории при $t = t_0 = 0$ (начальное положение) и при $t = t_1 = 1/3$ с; скорость $\overline{V}$ точки; ускорение $\overline{a}$ точки; касательное $\overline{a}_\tau$, нормальное $\overline{a}_n$ ускорения точки и радиус кривизны траектории ρ при $t = t_1 = 1/3$ с. В каждом пункте выполнить соответствующие построения на рисунке.

Решение. 1. Найдем уравнение траектории, исключив из (1) и (2) параметр t – время. Способ исключения t зависит от вида функций в правых частях (1), (2). В данном случае найдем из (1), (2) соответственно

$$\sin\frac{\pi t}{2} = \frac{x}{4}, \quad \cos\frac{\pi t}{2} = \frac{y}{6}.$$

Возводя полученные соотношения в квадрат, после этого складывая их и учитывая, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, найдем:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1.$$

Из этого уравнения следует, что траекторией точки является эллипс, полуоси которого равны 4 м и 6 м, а центр имеет координаты (0, 0).

Выберем масштаб координат и выполним рисунок. Следует заметить, что приведенный рисунок (Рис. К1а) имеет вид, соответствующий уже окончанию решения; свой рисунок рекомендуется делать по мере продвижения решения. Это позволяет контролировать получаемые результаты и делает их более наглядными.

2. Находим положение точки при $t = t_0$, подставляя это значение t в (1) и (2):

$$t = t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 = 0, \\ y = y_0 = 6 \text{ м}. \end{cases}$$

3. Находим положение точки при $t = t_1$, подставляя это значение t в (1) и (2):

$$t = t_1 = 1/3\,\text{с} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_1 = 2 \text{ м}, \\ y = y_1 = 3\sqrt{3}\text{ м} \approx 5{,}20\text{ м}. \end{cases}$$

Указываем на рисунке точки M_0 и M_1, учитывая масштаб координат.

4. Найдем скорость точки. Из теории следует, что при координатном способе задания движения определяются сначала проекции скорости на оси координат. Используя (1) и (2) – уравнения движения точки – находим

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4\sin\frac{\pi t}{2}\right) = 2\pi\cos\frac{\pi t}{2}\ , \tag{3}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -3\pi\sin\frac{\pi t}{2}\ . \tag{4}$$

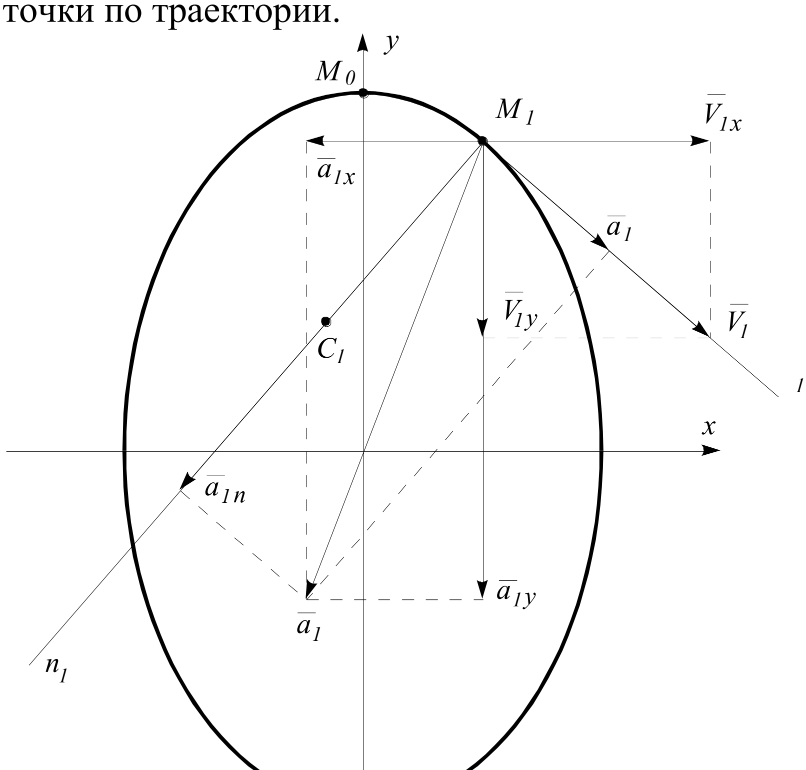
Модуль скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. Подставляя сюда (3), (4), получим

$$V = \sqrt{4\pi^2\cos^2\frac{\pi t}{2} + 9\pi^2\sin^2\frac{\pi t}{2}} = \pi\sqrt{4 + 5\sin^2\frac{\pi t}{2}}\ . \tag{5}$$

При $t = t_1 = 1/3$ с : $V_{1x} = \pi\sqrt{3}$ м/с $\approx 5{,}44$ м/с, $V_{1y} = -\frac{3\pi}{2}$ м/с $\approx -4{,}71$ м/с,

$$V_1 = \pi\sqrt{21}/2 \text{ м/с} \approx 7{,}20 \text{ м/с}. \tag{6}$$

Выберем масштаб для скоростей (рис. К1а), проведем в точке M_1 линии параллельные осям x и y, и на этих линиях в масштабе скоростей отложим отрезки: 5,44 по оси x и - 4,71 по оси y, что соответствует величинам и знакам найденных проекций вектора скорости. На этих составляющих строим параллелограмм (прямоугольник), диагональ которого по величине и направлению соответствует вектору $\overline{V}_1$. Проверьте следующее: длина построенного вектора должна получиться равной найденному значению $V_1 = \frac{\pi\sqrt{21}}{2}$ м/с $\approx 7{,}20$ м/с (с учетом масштаба скоростей). Вектор $\overline{V}_1$ направлен по касательной к траектории в точке M_1 и показывает направление движения точки по траектории.



Масштаб длины: _____ =1м, скорости ___ =1м/с, ускорения: __ =1м/с²

Рис. К1а.

В точке M_1 именно сейчас построим естественные оси: касательную τ_1 и главную нормаль n_1 (эти оси потребуются позже). Касательную τ_1 проводим вдоль $\overline{V}_1$; главную нормаль n_1 проводим перпендикулярно τ_1 в плоскости рисунка и направляем к центру кривизны траектории в точке M_1 (в сторону вогнутости траектории).

5. Находим ускорение точки, используя (3), (4):

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = -\pi^2 \sin\frac{\pi t}{2}\ , \tag{7}$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{3\pi^2}{2}\cos\frac{\pi t}{2}. \tag{8}$$

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Из (7), (8) получим

$$a = \sqrt{\pi^4 \sin^2\frac{\pi t}{2} + \frac{9\pi^4}{4}\cos^2\frac{\pi t}{2}} = \frac{\pi^2}{2}\sqrt{4 + 5\cos^2\frac{\pi t}{2}}. \tag{9}$$

Подставляя в (7) - (9) $t = t_1 = 1/3$ с, найдем

$$a_{1x} = -\frac{\pi^2}{2}\ \text{м/с}^2 \approx -4{,}93\ \text{м/с}^2,\ a_{1y} = -\frac{3\sqrt{3}\pi^2}{4}\ \text{м/с}^2 \approx -12{,}8\ \text{м/с}^2,$$

$$a_1 = \frac{\pi^2\sqrt{31}}{4}\ \text{м/с}^2 \approx 13{,}7\ \text{м/с}^2. \tag{10}$$

В точке M_1 строим в масштабе проекции ускорений a_{1x}, a_{1y}, учитывая их величины и знаки, а затем строим вектор ускорения $\bar{a}_1$. Построив $\bar{a}_1$, следует проверить, получилось ли на рисунке $a_1 \approx 13{,}7$ м/с^2 (с учетом масштаба ускорений), и направлен ли вектор $\bar{a}_1$ в сторону вогнутости траектории (вектор $\bar{a}_1$ проходит через центр эллипса, но это есть особенность данной задачи, связанная с конкретным видом функций (1) и (2)).

6. Находим касательное ускорение $\bar{a}_\tau$, характеризующее изменение модуля $\bar{V}$.

Учитывая (5), получим $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\pi\sqrt{4 + 5\sin^2\dfrac{\pi t}{2}}\right) = \dfrac{5\pi^2 \sin \pi t}{4\sqrt{4 + 5\sin^2\dfrac{\pi t}{2}}}$.

При $t = t_1 = 1/3$ с

$$a_{1\tau} = \frac{5\pi^2}{4\sqrt{7}}\ \text{м/с}^2 \approx 4{,}66\ \text{м/с}^2. \tag{11}$$

Касательное ускорение можно также найти, дифференцируя по времени равенство $V^2 = V_x^2 + V_y^2$. Получим

$$2V\frac{dV}{dt} = 2V_x\frac{dV_x}{dt} + 2V_y\frac{dV_y}{dt},\ \text{откуда следует}$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

Нормальную составляющую a_n ускорения, характеризующую изменение направления $\bar{V}$, можно найти по формуле

$$a_n = V^2/\rho, \tag{12}$$

если ρ - радиус кривизны траектории заранее известен, или (учитывая, что, $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$ и, следовательно, $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$) по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ . \tag{13}$$

Так как в данной задаче радиус ρ заранее неизвестен, то используем (13). Подставляя (10), (11) в (13), получим

$$a_{1n} = 6\pi^2 \big/ \sqrt{21}\ \text{м/с}^2 \approx 12{,}92\ \text{м/с}^2. \tag{14}$$

Вернемся к рис. К1а. Ранее на этом рисунке вектор $\bar{a}_1$ был построен по составляющим $\bar{a}_{1x}$, $\bar{a}_{1y}$. С другой стороны, этот вектор можно разложить на составляющие по естественным осям τ_1 и n_1 (пользуясь правилом параллелограмма). Выполним это разложение и построим на рисунке векторы $\bar{a}_{1\tau}$ и $\bar{a}_{1n}$. Далее следует провести проверку: с учетом масштаба ускорений определить по рисунку величины $a_{1\tau}$, a_{1n} и убедиться, что они совпадают с (11), (14).

Заметим, что движение точки ускоренное, т.к. направления векторов $\bar{V}_1$ и $\bar{a}_{1\tau}$ совпадают (рис. К1а).

Найдем радиус кривизны ρ, используя (12), откуда следует, что $\rho = V^2 \big/ a_n$. Подставляя в последнее соотношение V_1 и a_{1n} из (6) и (14), получим радиус кривизны траектории в точке M_1: $\rho_1 = 7\sqrt{21}\big/8\ \text{м} \approx 4\ \text{м}$. Отложим на рисунке от точки M_1 по оси n_1 отрезок M_1C_1 длины ρ_1 (в масштабе длин); полученная точка C_1 есть центр кривизны траектории в точке M_1.

Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ:

1. траектория точки - эллипс, имеющий уравнение $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{6^2} = 1$;
2. $M_0(x_0 = 0,\ y_0 = 6\ \text{м})$;
3. $M_1(x_1 = 2\ \text{м},\ y_1 = 3\sqrt{3}\ \text{м} \approx 5{,}20\ \text{м})$;
4. $V_1 = \dfrac{\pi\sqrt{21}}{2}\ \text{м/с} \approx 7{,}20\ \text{м/с}$;
5. $a_1 = \dfrac{\pi^2\sqrt{31}}{4}\ \text{м/с}^2 \approx 13{,}7\ \text{м/с}^2$;
6. $a_{1\tau} = \dfrac{5\pi^2}{4\sqrt{7}}\ \text{м/с}^2 \approx 4{,}66\ \text{м/с}^2$; $a_{1n} = \dfrac{6\pi^2}{\sqrt{21}}\ \text{м/с}^2 \approx 12{,}92\ \text{м/с}^2$;

   $\rho_1 = \dfrac{7\sqrt{21}}{8}\ \text{м} \approx 4\ \text{м}$.

Обсудим некоторые особенности и частные случаи, которые могут встретиться в задачах.

Если траектория точки – прямая линия, то $\rho = \infty$ и, следовательно, $a_n = V^2/\rho = 0$. Найденное по величине и направлению ускорение $\bar{a}$ равно ускорению $\bar{a}_\tau$.

Если траектория точки – окружность, то $\rho = R$, где R – радиус окружности (определяется из уравнения траектории). Если скорость V точки найдена, то $a_n = V^2/\rho = V^2/R$. Вектор $\bar{a}_n$ направлен к центру окружности. Касательное ускорение $a_\tau = dV/dt$, полное ускорение $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Пример К1б. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $s = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\smile}{AM}$ (рис. К1б).

Определить: скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$с; характер движения точки по траектории (ускоренное или замедленное).

Решение. Определяем скорость точки:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

При $t_1 = 1$с получим $V_1 = \pi\sqrt{2}/4 = 1{,}11$ м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}.$$

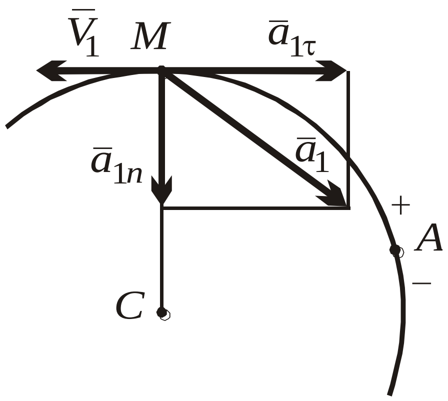


Рис. К1б

При $t_1 = 1$с получим, учитывая, что $R = 2$ м,

$$a_{1\tau} = -\pi^2\sqrt{2}/16 = -0{,}87 \text{ м/с}^2, \quad a_{1n} = V_1^2/2 = \pi^2/16 = 0{,}62 \text{ м/с}^2.$$

Тогда ускорение точки при $t_1 = 1$с будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \pi^2\sqrt{3}/16 = 1{,}07 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рис. К1б векторы $\bar{V}_1$, $\bar{a}_{1n}$, $\bar{a}_{1\tau}$, $\bar{a}_1$, считая положительным направление от A к M. Так как $V_1 > 0$, $a_{1\tau} < 0$, то движение точки замедленное.

Ответ: $V_1 = \pi\sqrt{2}/4 = 1{,}11$ м/с; $a_{1\tau} = -\pi^2\sqrt{2}/16 = -0{,}87$ м/с^2;
$a_{1n} = \pi^2/16 = 0{,}62$ м/с^2; движение точки замедленное.

Примечание: одна из частей задачи К3 (см. ниже) аналогична задаче К1б.

Задача К2
(тема: “Простые движения твердых тел”)

Механизм состоит из ступенчатых колес 1-3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0-К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 – r_1 = 2 см, R_1 = 4 см, у колеса 2 – r_2 = 6 см, R_2 = 8 см, у колеса 3 – r_3 =12 см, R_3 = 16 см. На ободах колес расположены (в произвольном месте обода) точки A, B и C.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $s_4(t)$ – закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2, $V_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т. д. (φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4,s_5 и V_4, V_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1 = 2 с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (V – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (V_5 – скорость груза 5 и т. д.).

Указания. В задаче К2 рассматривается многозвенный механизм, каждое звено которого совершает простое движение – поступательное (рейка 4 и груз 5) или вращение вокруг неподвижной оси (колеса 1-3). Для исследования движения звеньев следует переходить от одного звена к другому, начиная с ведущего. При расчетах нужно учесть, что точки соприкосновения тел имеют одинаковые скорости (так как проскальзывание отсутствует).

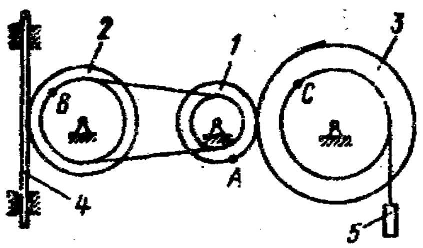


Рис. К2.0

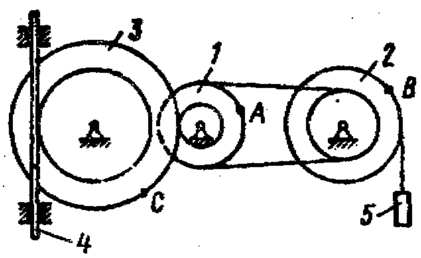


Рис. К2.1

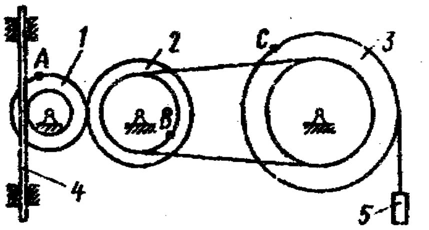


Рис. К2.2

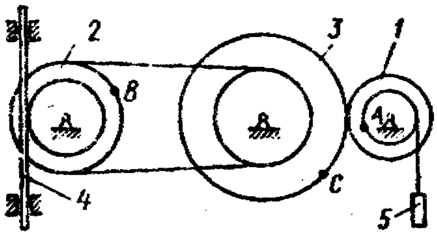


Рис. К2.3

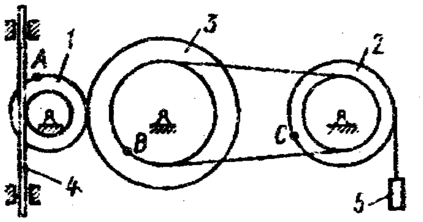


Рис. К2.4

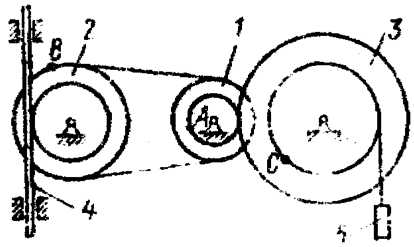


Рис. К2.5

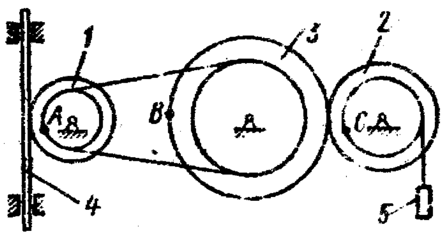


Рис. К2.6

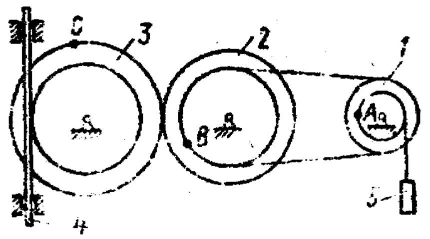


Рис. К2.7

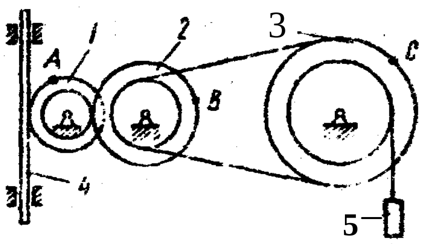


Рис. К2.8

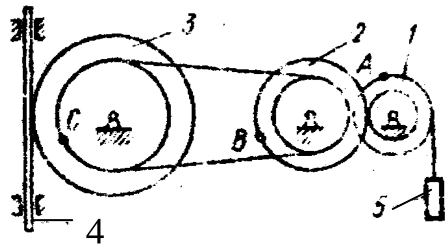


Рис. К2.9

Таблица К2

Номер Условия	Дано	Найти	
		скорости	Ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	V_B, V_C	ε_2, a_A, a_5
1	$V_5 = 2(t^2 - 3)$	V_A, V_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	V_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	V_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	V_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	V_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$V_4 = 3t^2 - 8$	V_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	V_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_A, a_4

Простые движения твердых тел (краткие сведения из теории).

Простых движений два: 1. Поступательное движение тела,

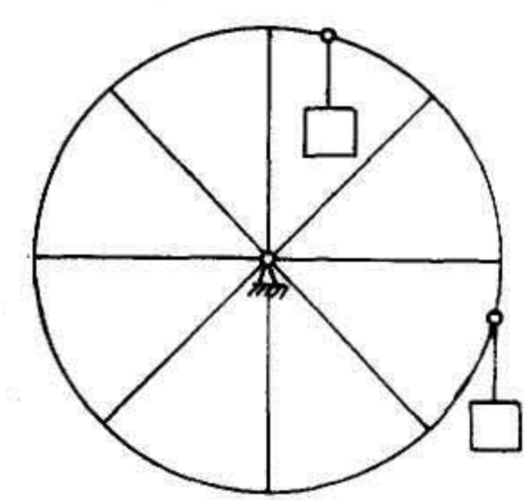
2. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

1. Поступательное движение тела.

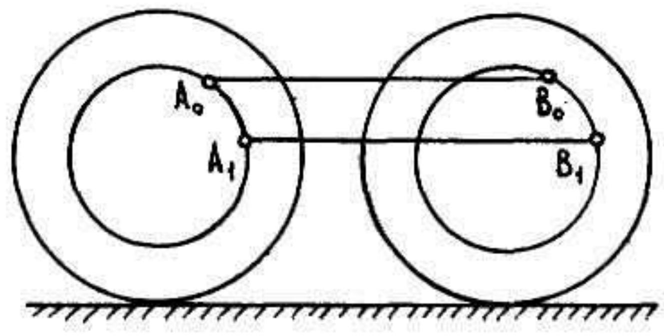
Признак движения: при движении тела любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению.

Основная теорема: при поступательном движении тела все точки описывают одинаковые траектории и в один и тот же момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости, а также одинаковые по величине и направлению ускорения. Из теоремы следует, что это вид движения, когда скорость $\overline{V}$ и ускорение $\overline{a}$ одной точки являются скоростью и ускорением тела в целом (это верно только для поступательного движения).

Задание движения тела. Из теоремы следует: для того, чтобы задать движение тела, надо задать движение одной его точки, что можно сделать векторным, координатным и естественным способом (см. задачу К1). Заметим, что траектории точек - любые линии (не обязательно прямые).



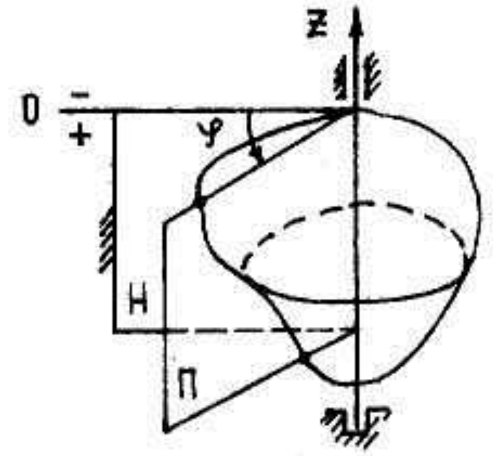
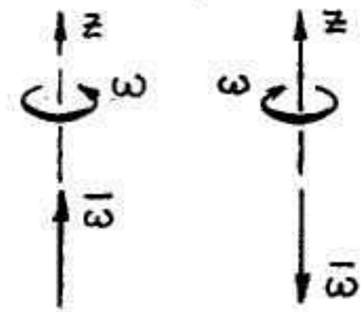
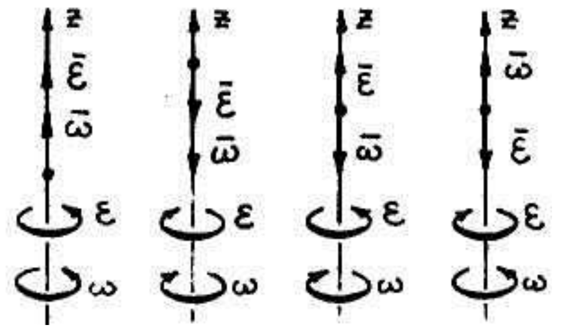
Кабина "колеса обозрения" и стержень AB механизма совершают поступательное движение (см. признак), но точки этих тел описывают, соответственно, окружности и циклоиды.



2. Вращение тела вокруг неподвижной оси (вращательное движение).

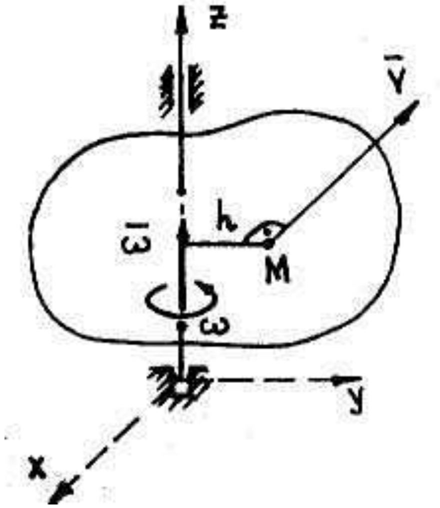
Признак движения: при движении тела две точки тела (или жестко с ним связанные) остаются неподвижными. Через эти точки проходит неподвижная ось вращения.

Движение тела в целом характеризуют три параметра: угол поворота тела φ, угловая скорость тела ω, угловое ускорение тела ε.

Задание вращательного движения тела	Угловая скорость тела	Угловое ускорение тела
 Положение тела определяется углом φ между неподвижной плоскостью (Н) и подвижной (П), связанной с телом. Обе плоскости проходят через ось z вращения тела. $\varphi = \varphi(t)$ - уравнение вращательного движения тела, оно позволяет определить положение тела в любой момент времени t. Начало отсчета угла φ на неподвижной плоскости обозначено 0 (ноль); "+" - направление положительного отсчета угла φ.	Угловая скорость ω тела характеризует быстроту изменения угла φ. $$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$ Если $\omega>0$, то тело вращается в сторону положительного отсчета угла φ, при $\omega<0$ - в сторону отрицательных значений угла φ. Вектор угловой скорости тела $\overline{\omega}$ направлен по оси вращения в ту сторону, откуда поворот тела выглядит происходящим против хода часовой стрелки. Точка приложения на оси не фиксирована (вектор скользящий). 	Угловое ускорение тела ε характеризует быстроту изменения угловой скорости тела ω. $$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$ Чтобы определить характер вращения тела (ускоренное или замедленное) надо сравнить знаки ω и ε. Если знаки одинаковые $(\omega \cdot \varepsilon > 0)$, то вращение тела ускоренное, если знаки разные $(\omega \cdot \varepsilon < 0)$ - вращение замедленное.  ускоренное вращение тела замедленное вращение тела

Определение скорости и ускорения точки вращающегося тела.

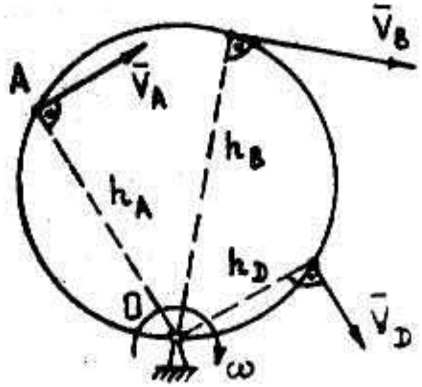
<table>
<tr><th>Скорость точки тела</th><th>Ускорение точки тела</th></tr>
<tr><td>



Модуль скорости точки тела:

$$V = \omega h,$$

где ω - модуль угловой скорости тела, h – расстояние от точки до оси вращения тела. Вектор скорости точки $\overline{V}$ перпендикулярен отрезку длины h и направлен в сторону поворота тела.

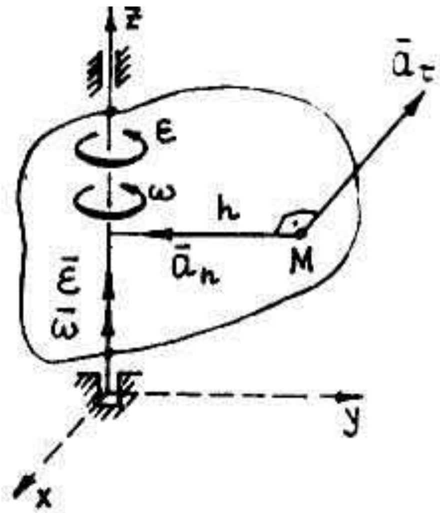


Скорости точек прямо пропорциональны расстояниям от точек до оси Вращения тела:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{h_A}{h_B}.$$

$$V_B > V_A > V_D.$$

</td><td>



Полное ускорения $\overline{a}$ имеет составляющие по осям: касательной ($\overline{a}_\tau$) и главной нормали ($\overline{a}_n$) в данной точке. Составляющие вычисляются исходя из того, что траектория точки – окружность. Модуль касательного ускорения точки $a_\tau = \varepsilon \cdot h$, где ε - модуль углового ускорения тела, h – расстояние от точки до оси вращения тела. Вектор $\overline{a}_\tau$ совпадает по направлению с вектором $\overline{V}$ скорости точки, если вращение тела ускоренное ($\omega\varepsilon > 0$, здесь ω и ε – алгебраические величины) и направлен в сторону, противоположную $\overline{V}$, если вращение тела замедленное ($\omega\varepsilon < 0$). Модуль нормального ускорения точки $a_n = \omega^2 \cdot h$, где ω - модуль угловой скорости тела. Вектор $\overline{a}_n$ направлен от точки к оси вращения тела, перпендикулярно этой оси. Так как $\overline{a}_n \perp \overline{a}_\tau$, то $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

</td></tr>
</table>

Скорости $\overline{V}$ точек вращающегося тела в данный момент времени различны по величине и направлению; ускорения $\overline{a}$ точек тела также различны по величине и направлению.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Простые движения твердых тел: поступательное движение тела, вращение тела вокруг неподвижной оси».

Вопросы, на которые следует обратить внимание и выучить:

1. Признак поступательного движения (определение): любая прямая, принадлежащая телу, остается параллельной своему первоначальному положению.
2. Основная теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек поступательно движущегося тела.
3. Задание поступательного движения тела.
4. Признак вращательного движения (определение).
5. Задание вращательного движения тела (уравнение движения).
6. Определение модуля и направления угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ тела; физический смысл этих векторов.
7. Определение характера вращения тела (ускоренное при $\omega \cdot \varepsilon > 0$ и замедленное при $\omega \cdot \varepsilon < 0$; здесь $\omega = d\varphi/dt$, $\varepsilon = d\omega/dt$ - алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения тела);
8. Определение модуля и направления скорости $\vec{V}$ и ускорения $\vec{a}$ точки вращающегося тела.

Пример К2. Уравнение движения груза 1 (рис. К2): $x_1 = -3t^2 + 7t + 20$; он приводит в движение звено 2; движение затем передается звеньям 3 и 4. Проскальзывание между телами отсутствует. Известно, что $R_2 = 3r_2$, $R_3 = 3{,}6\,r_2$, $r_3 = 2r_2$, $r_2 = 0{,}2$, $O_3A = 3/4\,R_3$. Время *t* задано в секундах, длины – в метрах.

При *t*=1с определить угловые скорости ω_2 и ω_3 тел 2 и 3 соответственно; угловое ускорение ε_3 тела 3, скорость V_4 движения рейки 4, скорость V_A и ускорения a_A^n и a_A^τ точки *A*. Векторы $\overline{V}_4$, $\overline{V}_A$, $\overline{a}_A^n$, $\overline{a}_A^\tau$ построить на рисунке.

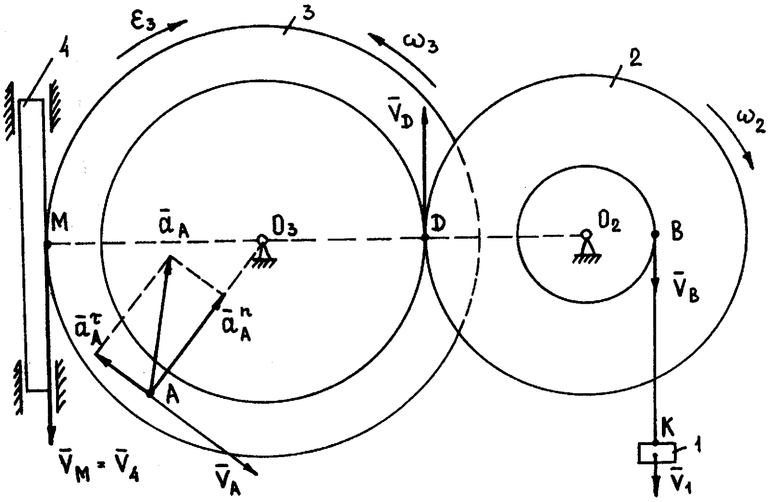


Рис. К2.

Решение. Поступательное движение груза 1 преобразуется во вращательное движение звена 2 (ось вращения O_2 перпендикулярна рисунку), затем во вращательное движение звена 3, которое преобразуется в поступательное движение рейки 4 (рис. К2). Отметим на рис. К2 точки контакта одного тела с другим: точка *K* (груз - трос), точка *B* (трос - звено 2), точка *D* (звено 2 - звено 3), точка *M* (звено 3 - звено 4).

Проскальзывание в точках контакта отсутствует, следовательно, скорости соприкасающихся точек равны. Это равенство скоростей является основным при решении данной и следующей задач.

Будем называть ведущим звеном то звено, движение которого задано. С рассмотрения ведущего звена начинаем решение задачи. В данной задаче это груз 1. Ведущим могло бы быть и любое другое звено – в кинематике это существенного значения не имеет.

По условию, уравнение движения груза 1

$$x_1 = -3t^2 + 7t + 20. \tag{1}$$

Из (1) находим скорость V_1 этого груза

$$V_1 = \frac{dx_1}{dt} = -6t + 7\,. \tag{2}$$

При t=1с V_1 = 1 м/с и вектор $\overline{V}_1$ направлен по вертикали вниз.

Рассмотрим <u>точку *B*.</u>

Так как эта точка принадлежит вертикальной части троса *BK*, то

$$V_B = V_K = V_1;$$

с другой стороны, точка *B* принадлежит вращающемуся телу 2; следовательно,

$$V_B = \omega_2 r_2\,.$$

Для V_B получено два соотношения

$$\begin{cases} V_B = V_1 \ \text{(трос)}, \\ V_B = \omega_2 r_2 \ \text{(звено 2)}. \end{cases}$$

Сравнивая эти соотношения, находим

$$V_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{-6t+7}{0{,}2};\ \omega_2 = \frac{7-6t}{0{,}2}\ \text{с}^{-1}, \tag{3}$$

при t =1с $\omega_2 = 5\text{с}^{-1}$; для V_1 использована формула (2).

Укажем на рис. К2 вектор $\overline{V}_B$; он направлен так же, как вектор $\overline{V}_1$; в то же время вектор $\overline{V}_B \perp O_2B$ и направлен в сторону поворота тела 2. Тело 2, следовательно, вращается по ходу часовой стрелки.

Рассмотрим <u>точку *D*.</u>

$$\begin{cases} V_D = \omega_2 R_2 \ \text{(звено 2)}, \\ V_D = \omega_3 r_3 \ \text{(звено 3)}. \end{cases}$$

Сравнив эти соотношения, найдем

$$\omega_2 R_2 = \omega_3 r_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{r_3}.$$

Подставляя в последнее выражение данные задачи и используя (3), получим

$$\omega_3 = \frac{(7-6t)\cdot 3r_2}{0{,}2\cdot 2r_2}; \quad \omega_3 = 7{,}5(7-6t)\ c^{-1}. \qquad (4)$$

Установим направление поворота тела 3. Скорость точки D перпендикулярна DO_2 и направлена в сторону поворота тела 2. Этот вектор $\overline{V}_D$ и покажет направление поворота тела 3 – против хода часовой стрелки. Изобразим вектор $\overline{V}_D$ на рис. К2 и заметим, что согласно теории $V_D = 3V_B$.

Рассмотрим <u>точку *M*.</u>

$$\begin{cases} V_M = \omega_3 R_3 \ (\text{звено}\ 3), \\ V_M = V_4 \ (\text{звено}\ 4). \end{cases}$$

Сравнив эти соотношения, найдем

$$V_4 = \omega_3 R_3.$$

Подставляя в последнее уравнение данные из (4), получим

$$V_4 = 7{,}5(7-6t)\cdot 3{,}6\cdot 0{,}2;\ V_4 = 5{,}4(7-6t)\ \text{м/с}; \qquad (5)$$

при $t = 1$с $\quad V_4 = 5{,}4$ м/с.

Вектор $\overline{V}_M$ направлен перпендикулярно MO_3 в сторону поворота тела 3, следовательно, вектор $\overline{V}_4$ направлен вниз.

Рассмотрим <u>точку *A*</u>.

Точка A принадлежит звену 3, которое вращается вокруг оси O_3, следовательно, для нахождения $\overline{V}_A, \overline{a}_A^n$ и $\overline{a}_A^\tau$ надо определить угловую скорость ω_3 тела и угловое ускорение ε_3 тела. Зависимость угловой скорости ω_3 от времени найдена выше (4). Определяем угловое ускорение:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt}(7{,}5(7-6t)) = -7{,}5\cdot 6;\ \varepsilon_3 = -45\ \text{с}^{-2}.$$

В момент времени t=1с $\quad \omega_3 = 7{,}5\ \text{с}^{-1}$, $\varepsilon_3 = -45\ \text{с}^{-2}$. Знаки ω_3 и ε_3 разные, следовательно, вращение тела 3 замедленное.

Определим расстояние h_A от точки до оси O_3 :

$$h_A = AO_3 = \frac{3}{4}R_3 = 0{,}54\ \text{м};$$

после чего находим:

$V_A = \omega_3 h_A = 4{,}05$ м/с; вектор $\overline{V}_A \perp AO_3$ и направлен в сторону <u>поворота тела 3;</u>

$a_A^n = \omega_3^2 \cdot h_A \approx 30{,}4$ м/с^2; вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_3 к центру O_3;

$a_A^\tau = |\varepsilon_3| \cdot h_A = 24{,}3$ м/с^2; вектор $a_A^\tau \perp AO_3$ и направлен в сторону, противоположную повороту тела 3 (замедленное вращение тела).

Векторы $\overline{V}_A$, $\overline{a}_A^n$, $\overline{a}_A^\tau$ строим на рис. К2 в точке *A*. Можно вычислить a_A и построить на рис. К2 вектор $\overline{a}_A$. Это рекомендуется сделать самостоятельно. Так как $\overline{a}_n \perp \overline{a}_\tau$, то

$$a_A = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = h \cdot \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}\,.$$

Ответ: при t=1с

$\omega_2 = 5\ \text{с}^{-1}$,- вращение по ходу часовой стрелки;

$\omega_3 = 7{,}5\ \text{с}^{-1}$, $\varepsilon_3 = -45\ \text{с}^{-2}$,- замедленное вращение против хода часовой стрелки;

$V_4 = 5{,}4$ м/с - движение по вертикали вниз;

$V_A = 4{,}05$ м/с, вектор $\overline{V}_A \perp AO_3$ и направлен в сторону поворота тела 3;

$a_A^n \approx 30{,}4$ м/с^2, вектор $\overline{a}_A^n$ направлен по AO_3 к центру O_3;

$a_A^\tau = 24{,}3$ м/с^2, вектор $\overline{a}_A^\tau \perp AO_3$ и направлен в сторону, противоположную вектору $\overline{V}_A$, так как вращение тела замедленное.

Рассмотрим теперь ременную передачу движения. Методика решения задачи при этом не меняется, но необходимо отразить дополнительным кинематическим уравнением тот факт, что в передаче движения от тела 1 к телу 2 участвует ремень.

Пример К2′. Колесо 1 вращается вокруг неподвижной оси O_1 с угловой скоростью

$$\omega_1 = 3t^2\ \text{с}^{-1}, \qquad (6)$$

направление поворота указано на рис. К2′.

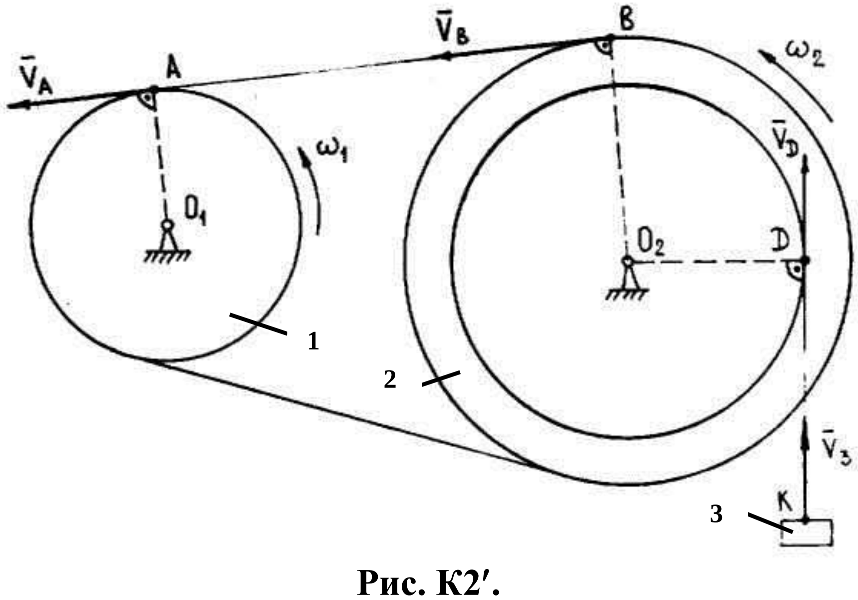


Рис. К2′.

Определить угловую скорость ω_2 колеса 2 и скорость V_3 груза 3 в произвольный момент времени t. Радиусы колес r_1, r_2, R_2 известны. Проскальзывание ремня отсутствует.

Решение. Вращательное движение ведущего звена 1 преобразуется во вращательное движение звена 2, а затем в поступательное движение груза 3. Точки контакта (рис. К2′): *A* (звено 1 - ремень), *B* (ремень - звено 2), *D* (звено 2 - трос *DK*), *K* (трос - звено 3).

Рассмотрим точки *A* и *B.*

$$\begin{cases} V_A = \omega_1 r_1 \ (\text{звено}\,1), \\ V_A = V_B \ (\text{ремень } AB), \\ V_B = \omega_2 R_2 \ (\text{звено}\,2). \end{cases}$$

Сравнив эти соотношения, найдем:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{R_2} = \frac{3t^2 r_1}{R_2}; \quad \omega_2 = \frac{3t^2 r_1}{R_2}. \qquad (7)$$

Направление поворота тела 2 покажет вектор $\overline{V}_B$, который совпадает с вектором $\overline{V}_A$. Тело 2 вращается против хода часовой стрелки.

Рассмотрим точки *D* и *K.*

$$\begin{cases} V_D = \omega_2 r_2 \ (\text{звено } 2), \\ V_D = V_K \ (\text{трос } DK), \\ V_K = V_3 (\text{ тело } 3). \end{cases}$$

Сравнив эти соотношения, найдем

$$V_3 = \omega_2 r_2.$$

Подставляя в последнее выражение значение ω_2 (формула (7)), получим

$$V_3 = \frac{3 r_1 r_2}{R_2} t^2.$$

Вектор $\overline{V}_3$ совпадает по направлению с вектором $\overline{V}_D$. Последний перпендикулярен DO_2 и направлен в сторону поворота тела 2. Следовательно, груз 3 поднимается.

Ответ: $\omega_2 = \dfrac{3r_1}{R_2} t^2 \ \text{с}^{-1}; \quad V_3 = \dfrac{3r_1 r_2}{R_2} t^2 \ \text{м/с}.$

Задача решена в общем виде, но даже в этом случае при построении векторов на рисунке следует соблюдать соотношения "больше-меньше-равно". Например, на рис. К2′ $V_B > V_D$, $V_D = V_3$.

Число вопросов в задаче может быть больше, но если освоена методика решения, то это не вызовет затруднений. Найдите самостоятельно, например, ε_2, a_3.

Примечание: теория вращательного движения твердого тела будет применена также в задачах К3 и К4 (см. ниже).

Задача КЗ
(тема: “Составное (сложное) движение точки”)

Прямоугольная пластина (рис. КЗ.0-К3.5) или круглая пластина радиусом R = 60 см (рис. К3.6-К3.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в табл. КЗ. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. Ось вращения на рис. К3.0-К3.3 и К3.8, К3.9 перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. К3.4-К3.7 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. К3.0-К3.5) или по окружности радиуса R, т.е. по ободу пластины (рис. К3.6-К3.9), движется точка M. Закон ее относительного движения, выражаемый уравнением $s = AM = f_2(t)$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), задан в табл. КЗ отдельно для рис. К3.0-К3.5 и для рис. К3.6-К3.9, при этом для рис. К3.6-3.9 $s = \overset{\cup}{AM}$ и отсчитывается по дуге окружности; там же даны размеры b и l. На всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s<0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1с.

Указания. В задаче КЗ абсолютное (в неподвижной системе отсчета) движение точки является сложным. При решении задачи движение точки по пластине считать относительным, а вращательное движение самой пластины (подвижная система отсчета) – переносным и воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует изобразить точку M на пластине в том положении, в котором нужно определить ее абсолютную скорость (или ускорение), а не в произвольном положении, показанном на рисунках к задаче.

В случаях, относящихся к рис. К3.6-К3.9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени t_1 = 1 с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

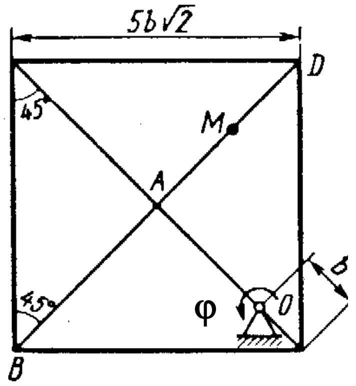


Рис. К3.0

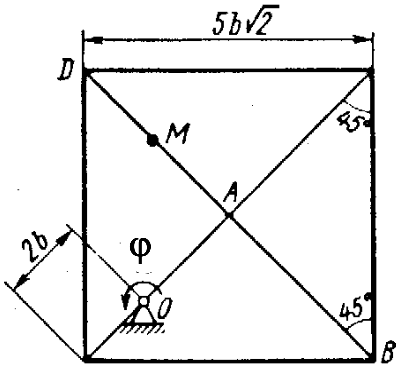


Рис. К3.1

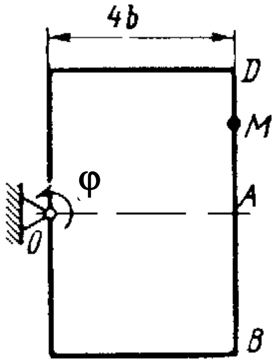


Рис. К3.2

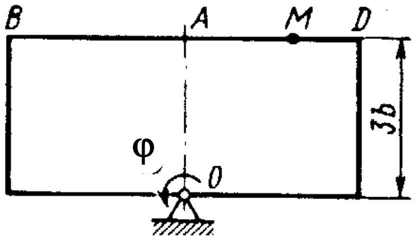


Рис. К3.3

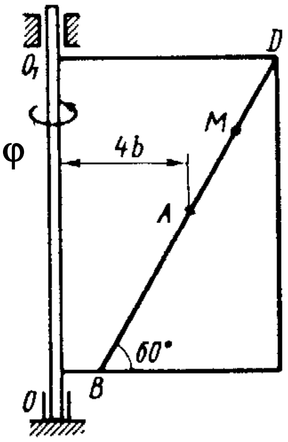


Рис. К3.4

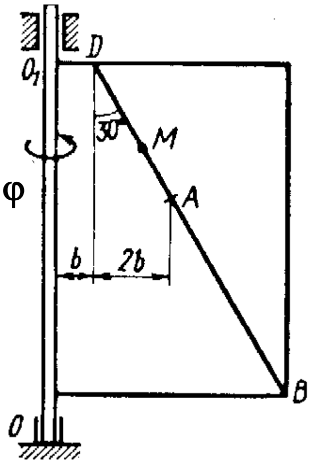


Рис. К3.5

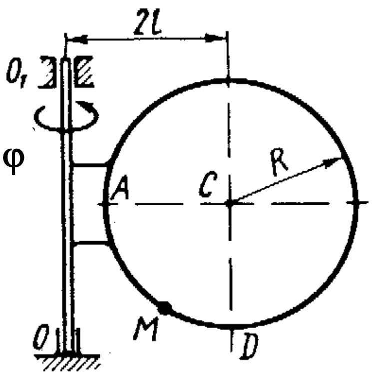


Рис. К3.6

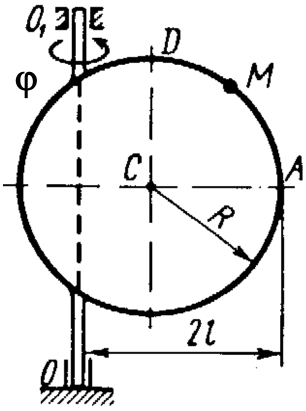


Рис. К3.7

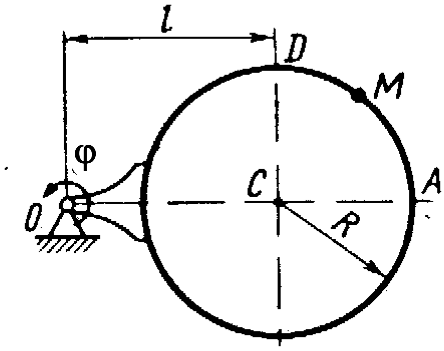


Рис. К3.8

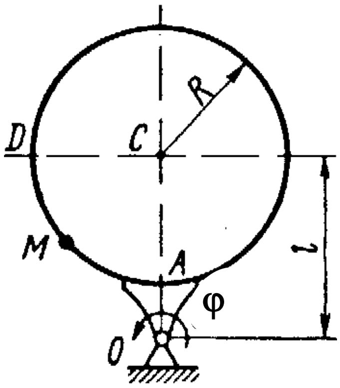


Рис. К3.9

Таблица К3

Номер условия	Для всех рисунков	Рис.0-5		Рис. 6-9	
	$\varphi = f_1(t)$	b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \overset{\smile}{AM} = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^4 - 3t^2)$
1	$3t^2 - 8t$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
2	$6t^3 - 12t^2$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
3	$t^2 - 2t^3$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
5	$2(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
6	$5t - 4t^2$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$
7	$15t - 3t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
8	$2t^3 - 11t$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
9	$6t^2 - 3t^3$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Составное (сложное) движение точки».

Обратите внимание на основные положения теории:

1. В каком случае движение точки называется составным движением (относительно данной системы отсчета)? Чем кинематически отличаются выбранные системы координат.
2. Приведите самостоятельно примеры, в которых движение точки можно рассматривать как составное.
3. Дайте определения **движений** точки: абсолютного, относительного, переносного.
4. Дайте определения **скоростей (ускорений)** точки: абсолютной скорости $\overline{V}$ (абсолютного ускорения $\overline{a}$), относительной скорости $\overline{V}_r = \overline{V}_{\text{отн}}$ (относительного ускорения $\overline{a}_r = \overline{a}_{\text{отн}}$), переносной скорости $\overline{V}_e = \overline{V}_{\text{пер}}$ (переносного ускорения $\overline{a}_e = \overline{a}_{\text{пер}}$). Обратите особое внимание на определение переносной скорости и переносного ускорения точки.
5. Сформулируйте теорему сложения скоростей. Запишите соответствующее уравнение в векторной форме.
6. Сформулируйте теорему сложения ускорений в общем случае (теорема Кориолиса) и в частном случае. Запишите уравнения в векторной форме в обоих случаях.
7. Определение величины и направления ускорения Кориолиса $\overline{a}_{\text{кор}}$. Перечислите случаи, в которых ускорение Кориолиса равно нулю. Поясните.

Составное (сложное) движение точки (краткие сведения из теории).

Движение точки называется составным, если точка участвует в двух или более движениях относительно выбранной системы отсчета. Чаще всего составным является движение точки относительно неподвижной (условно) системы отсчета. Это движение точки называется абсолютным движением, и скорость (ускорение) точки в неподвижной системе отсчета называется абсолютной скоростью $\overline{V}$ (ускорением $\overline{a}$) точки.

Дополнительно выбирается подвижная система отсчета (в каждой задаче есть конкретное движущееся тело, с которым ее связывают). Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы называется переносным движением точки. Абсолютная скорость (ускорение) той точки подвижного тела (с ним связана подвижная система отсчета), с которой в данный момент совпадает движущаяся по телу точка (мысленно остановили точку на теле), называется переносной скоростью $\overline{V}_e$ (ускорением $\overline{a}_e$) точки.

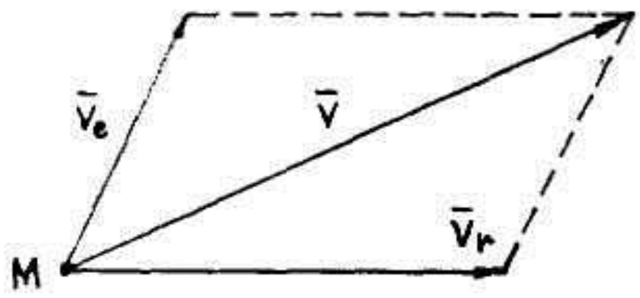
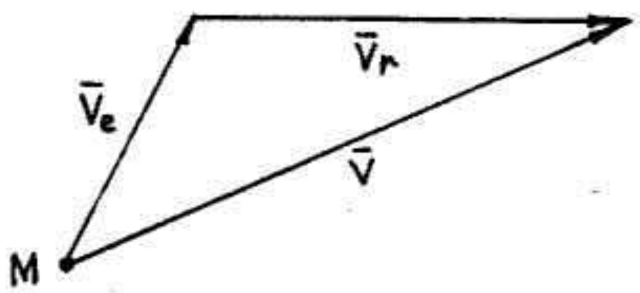
Скорость (ускорение) точки в движении относительно подвижной системы отсчета называется относительной скоростью $\overline{V}_r$ (ускорением $\overline{a}_r$) точки (мысленно останавливаем движение тела).

Пример.

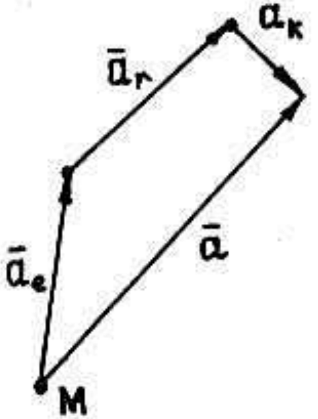
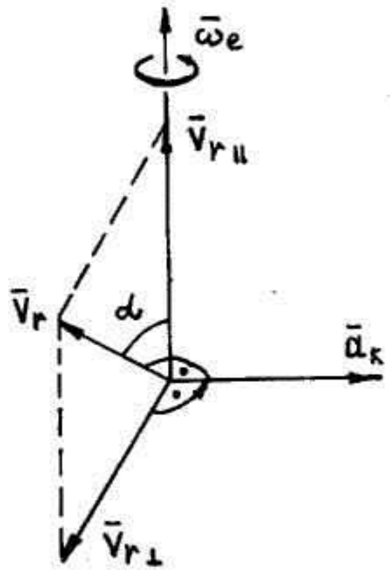
Капля воды стекает по лопатке рабочего колеса вращающейся турбины. Неподвижную систему отсчета свяжем со стенами машинного зала. Подвижную - с лопаткой турбины. Движение турбины (вращательное) - переносное движение капли. Движение капли по лопатке - относительное движение капли. Движение капли относительно стен - абсолютное, оно и является составным.

При вычислениях, связанных с относительным движением точки, применяется теория кинематики точки (см. задачу К1). Вычисления, связанные с переносным движением, зависят от вида движения тела, с которым перемещается подвижная система отсчета. Если движение тела поступательное или вращательное, то применяется рассмотренная выше теория (см. задачу К2). Если тело совершает составное движение, то используется теория, относящаяся к соответствующему движению тела. После выполнения упомянутых вычислений, применяется теория сложения скоростей и ускорений точки при ее сложном движении.

<u>Теорема сложения скоростей при составном движении точки.</u>

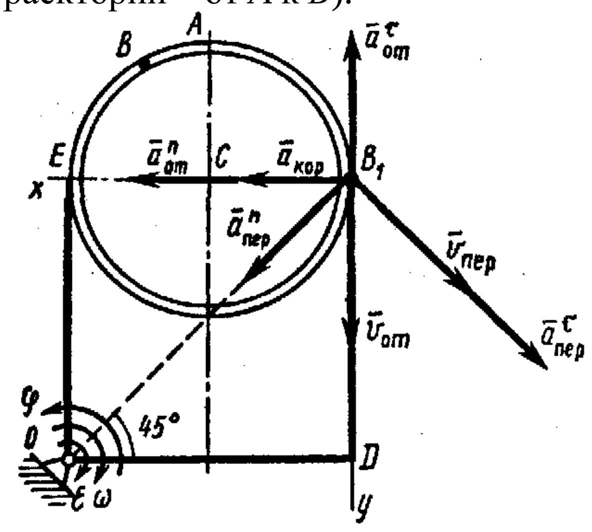
Формулировка теоремы и векторное уравнение	Графическое нахождение $\overline{V}$ Из векторного уравнения	Аналитическое нахождение $\overline{V}$ из векторного уравнения
Абсолютная скорость $\overline{V}$ точки равна <u>векторной</u> сумме переносной скорости $\overline{V}_e$ точки и относительной скорости $\overline{V}_r$ точки: $\overline{V} = \overline{V}_e + \overline{V}_r.$ (1)	Находим $\overline{V}_e$, $\overline{V}_r$ и в соответствии с уравнением (1) строим векторный параллелограмм (или треугольник).  или  Если построение выполнено в масштабе, то из чертежа находим модуль *V*. Можно также вычислить *V*, используя известные стороны и углы построенных треугольников и формулы тригонометрии (например, теорему косинусов).	Находим $\overline{V}_e$, $\overline{V}_r$; выбираем оси координат и уравнение (1) проектируем на эти оси: $V_x = V_{ex} + V_{rx},$ $V_y = V_{ey} + V_{ry},$ $V_z = V_{ez} + V_{rz}.$ Далее находим модуль $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ и направление вектора $\overline{V}$ $\cos(\overline{V}\,\hat{,}\,\overline{i}) = \frac{V_x}{V},$ $\cos(\overline{V}\,\hat{,}\,\overline{j}) = \frac{V_y}{V},$ $\cos(\overline{V}\,\hat{,}\,\overline{k}) = \frac{V_z}{V}.$

Теорема сложения ускорений при составном движении точки (теорема Кориолиса).

Формулировка теоремы и векторное уравнение	Графическое нахождение $\bar{a}$ из векторного уравнения	Аналитическое нахождение $\bar{a}$ из векторного уравнения	Ускорение Кориолиса
Абсолютное ускорение $\bar{a}$ точки в случае, когда переносное движение точки не поступательное, равно векторной сумме переносного ускорения $\bar{a}_e$ точки, относительного ускорения $\bar{a}_r$ точки и ускорения Кориолиса $\bar{a}_K$: $\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_K$. (1) В случае, когда переносное движение точки – поступательное, $a_K = 0$, и $\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r$.	Находим $\bar{a}_e$, $\bar{a}_r$, $\bar{a}_K$. Выбираем масштаб и в соответствии с уравнением (1) строим векторный многоугольник. Вектор, проведенный из начала первого в конец последнего вектора, дает абсолютное ускорение $\bar{a}$ точки. 	Находим $\bar{a}_e$, $\bar{a}_r$, $\bar{a}_K$. Выбираем оси координат и проектируем уравнение (1) на эти оси: $a_x = a_{ex} + a_{rx} + a_{Kx}$, $a_y = a_{ey} + a_{ry} + a_{Ky}$, $a_z = a_{ez} + a_{rz} + a_{Kz}$. Далее находим модуль $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и направление вектора $\bar{a}$ $\cos(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{i}) = \dfrac{a_x}{a}$, $\cos(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{j}) = \dfrac{a_y}{a}$, $\cos(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{k}) = \dfrac{a_z}{a}$.	$\bar{a}_K = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r$; модуль $a_K = 2\omega_e V_r \sin\alpha$, где $\alpha = (\bar{\omega}_e\,\hat{,}\,\bar{V}_r)$, ω_e – модуль переносной угловой скорости, V_r – модуль относительной скорости точки. Определить направление $\bar{a}_K$ можно двумя способами. 1) Правило векторного произведения: вектор $\bar{a}_K$ направлен перпендикулярно плоскости перемножаемых векторов $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\bar{\omega}_e$ к вектору $\bar{V}_r$ выглядит происходящим против хода часовой стрелки. 2) Правило Жуковского: составляющую вектора $\bar{V}_r$, которая перпендикулярна вектору $\bar{\omega}_e$, надо повернуть на 90° в сторону переносного вращения – получим вектор $\bar{a}_K$. 

Рассмотрим два типовых примера (в примере К3а ось переносного вращения перпендикулярна пластине, в примере К3б – лежит в ее плоскости).

Пример К3а. Пластина $OEAB_1D$ ($OE = OD$, рис. К3а) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К3а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса R движется точка B по закону $s = \overset{\cup}{AB} = f_2(t)$ (положительное направление отсчета координаты s на траектории – от A к B).



Дано: $R = 0{,}5$ м, $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$, $s = \pi R\cos(\pi t/3)$ (φ – в радианах, s – в метрах, t – в секундах).

Определить: абсолютную скорость $V_{абс}$ и абсолютное ускорение $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Рис. К3а.

Решение. Рассмотрим абсолютное движение точки B как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением (подвижные оси B_1xy связаны с пластиной). Тогда абсолютная скорость $\bar{V}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{V}_{абс} = \bar{V}_{отн} + \bar{V}_{пер}, \quad \bar{a}_{абс} = \bar{a}^n_{отн} + \bar{a}^\tau_{отн} + \bar{a}^n_{пер} + \bar{a}^\tau_{пер} + \bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где учтено, что

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}^\tau_{отн} + \bar{a}^{\mathrm{n}}_{отн}, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}^\tau_{пер} + \bar{a}^{\mathrm{n}}_{пер}.$$

Определим все, входящие в равенства (1) величины.

1. **Относительное движение** (мысленно остановим пластину). Это движение задано естественным способом (см. задачу К1б). Закон движения точки по траектории:

$$s = \overset{\cup}{AB} = \pi R\cos(\pi t/3). \tag{2}$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) $t_1 = 2$ с, получим

$$s_1 = \pi R\,cos(\pi 2/3) = -0{,}5\pi R.$$

Тогда $\angle ACB = \dfrac{s_1}{R} = -0{,}5\pi.$

Знак минус свидетельствует о том, что точка B в момент t_1 = 2 с находится справа от точки A. Изображаем ее на рис. К3а в этом положении (точка B_1).

Теперь находим числовые значения $V_{\text{отн}}$, $a^{\tau}_{\text{отн}}$ и $a^{\text{n}}_{\text{отн}}$:

$$V_{\text{отн}} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(\pi t/3), \quad a^{\tau}_{\text{отн}} = \dot{V}_{\text{отн}} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(\pi t/3),$$

$$a^{n}_{\text{отн}} = \frac{V^2_{\text{отн}}}{\rho_{\text{отн}}} = \frac{V^2_{\text{отн}}}{R},$$

где $\rho_{\text{отн}}$ - радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R. Для момента времени t_1 = 2с, учитывая, что R = 0,5 м, получим

$$V_{\text{отн}} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12} = -1{,}42 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}_{\text{отн}} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0{,}86\,\text{м/с}^2, \; a^{n}_{\text{отн}} = \frac{\pi^4}{24} = 4{,}06\,\text{м/с}^2. \tag{3}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}^{\tau}_{\text{отн}}$ направлен в сторону положительного отсчета координаты s, а вектор $\bar{V}_{\text{отн}}$ в противоположную сторону; вектор $\bar{a}^{n}_{\text{отн}}$ направлен к центру C окружности. Изображаем все эти векторы на рис. К3а.

2. **Переносное движение** (мысленно остановим точку на пластине). Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$ (см. задачу К2). Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1{,}5t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t$$

и при t_1 =2 с

$$\omega = -2\text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = -4\text{ с}^{-2}. \tag{4}$$

Знаки указывают, что в момент t_1 =2 с направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ; отметим это на рис. К3а соответствующими стрелками.

Для определения $\bar{V}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{пер}}$ найдем сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения O. Из рисунка видно, что $h_1 = 2R\sqrt{2} = 1{,}41\,\text{м}$. Тогда в момент времени t_1 = 2 с, учитывая равенства (4) , получим

$$V_{\text{пер}} = |\omega| h_1 = 2{,}82 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}_{\text{пер}} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 5{,}64\,\text{м/с}^2, \; a^{\text{n}}_{\text{пер}} = \omega^2 h_1 = 5{,}64\,\text{м/с}^2. \tag{5}$$

Изображаем на рис. К3а векторы $\bar{V}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}^{\tau}_{\text{пер}}$ с учетом направления $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ и вектор $\bar{a}^{n}_{\text{пер}}$ (направлен к оси вращения).

3. **Ускорение Кориолиса.** Модуль ускорения Кориолиса определяем по формуле $a_{\text{кор}} = 2\,V_{\text{отн}} \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha$, где α – угол между вектором $\bar{V}_{\text{отн}}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$). В нашем случае этот угол равен 90°, так как ось

вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$. В момент времени t_1 = 2 с, учитывая, что в этот момент $V_{\text{отн}} = 1{,}42$ м/с и $|\omega| = 2$ с$^{-1}$, получим

$$a_{\text{кор}} = 5{,}68 \text{ м/с}^2. \tag{6}$$

Направление $\overline{a}_{\text{кор}}$ найдем по правилу Н.Е.Жуковского: так как вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении $\overline{\omega}$, т.е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\overline{a}_{\text{кор}}$ на рис. К3а. (Иначе направление $\overline{a}_{\text{кор}}$ можно найти, учитывая, что $\overline{a}_{\text{кор}} = 2(\overline{\omega} \times \overline{V}_{\text{отн}})$.) Изображаем вектор $\overline{a}_{\text{кор}}$ на рис. К3а.

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения $V_{\text{абс}}$ и $a_{\text{абс}}$ остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

4. **Определение** $V_{\text{абс}}$**.** Проведем координатные оси B_1xy (см. рис. К3а) и спроектируем почленно обе части равенства $\overline{V}_{\text{абс}} = \overline{V}_{\text{отн}} + \overline{V}_{\text{пер}}$ на эти оси. Получим для момента времени t_1 = 2 с:

$$V_{\text{абс}x} = V_{\text{отн}x} + V_{\text{пер}x} = 0 - V_{\text{пер}} cos 45° = -1{,}99 \text{ м/с};$$

$$V_{\text{абс}y} = V_{\text{отн}y} + V_{\text{пер}y} = V_{\text{отн}} + V_{\text{пер}} \cos 45° = 3{,}41 \text{ м/с}.$$

После этого находим

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{абс}x}^2 + V_{\text{абс}y}^2} = 3{,}95 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\overline{V}_{\text{отн}}$ и $\overline{V}_{\text{пер}}$ равен 45°, значение $V_{\text{абс}}$ можно еще определить по формуле

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_{\text{пер}}^2 + 2V_{\text{отн}} \cdot V_{\text{пер}} \cdot \cos 45°} = 3{,}95 \text{ м/с}.$$

5. **Определение** $a_{\text{абс}}$**.** По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}_{\text{отн}}^{\tau} + \overline{a}_{\text{отн}}^{n} + \overline{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \overline{a}_{\text{пер}}^{\text{n}} + \overline{a}_{\text{кор}}. \tag{7}$$

Для определения $a_{\text{абс}}$ спроектируем обе части равенства (7) на проведенные оси B_1xy. Получим

$$a_{\text{абс}x} = a_{\text{отн}}^{n} + a_{\text{кор}} + a_{\text{пер}}^{n} cos 45° - \left|a_{\text{пер}}^{\tau}\right| cos 45°,$$

$$a_{\text{абс}y} = a_{\text{пер}}^{n} cos 45° + \left|a_{\text{пер}}^{\tau}\right| cos 45° - \left|a_{\text{отн}}^{\tau}\right|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени t_1 = 2 с, найдем, что в этот момент $a_{\text{абс}x} = 9{,}74$ м/с^2; $a_{\text{абс}y} = 7{,}15$ м/с^2.

Тогда $a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс}x}^2 + a_{\text{абс}y}^2} = 12{,}08$ м/с^2.

Ответ: $V_{\text{абс}}$ = 3,95 м/с, $a_{\text{абс}}$ = 12,08 м/с^2.

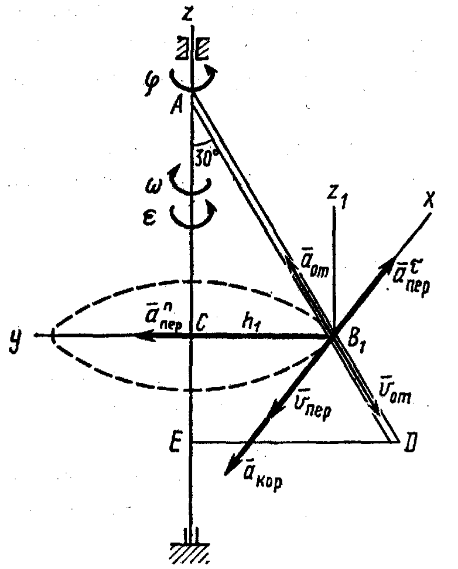


Рис. К3б.

Пример К3б. Треугольная пластина *ADE* вращается вокруг оси *z*, совпадающей со стороной *AE*, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К3б дуговой стрелкой). По гипотенузе *AD* движется точка *B* по закону $s = AB = f_2(t)$; положительное направление отсчета *s* – от *A* к *D*.

Дано: $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$;
$s = AB = 2 + 15t - 3t^2$; (φ – в радианах, *s* – в сантиметрах, *t* – в секундах).

Определить: абсолютную скорость $V_{абс}$ и абсолютное ускорение $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим абсолютное движение точки *B* как сложное, считая ее движение по прямой *AD* относительным, а вращение пластины – переносным (подвижные оси B_1xyz связаны с пластиной). Тогда абсолютная скорость $\bar{V}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ найдутся по формулам:

$$\bar{V}_{абс} = \bar{V}_{отн} + \bar{V}_{пер}, \quad \bar{a}_{абс} = \bar{a}^{n}_{отн} + \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{пер} + \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где учтено, что $\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн}, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}.$

Определим все входящие в равенство (1) величины.

1. **Относительное движение** (мысленно остановим пластину). Это движение задано естественным способом (см. задачу К1б). Закон движения точки по прямолинейной траектории:

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2, \tag{2}$$

поэтому $V_{отн} = \dot{s} = 15 - 6t, \quad a^{\tau}_{отн} = \dot{V}_{отн} = -6, \quad a^{n}_{отн} = V^2_{отн}/\rho = 0$, так как для прямой линии $\rho = \infty$.

В момент времени $t_1 = 2$ с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ см}, \ V_{отн} = 3 \text{ см/с}, \ a_{отн} = -6 \text{ см/с}^2. \tag{3}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{V}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета координаты *s*, а вектор $\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн}$ – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. К3б.

2. **Переносное движение** (мысленно остановим движение точки по пластине). Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$.

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения (см. задачу К2): $\omega = \dot{\varphi} = 0{,}3t^2 - 2{,}2$; $\varepsilon = \dot{\omega} = 0{,}6t$ и при $t_1 = 2$ с,

$$\omega = -1 \text{ с}^{-1}, \ \varepsilon = 1{,}2 \text{ с}^{-2}. \tag{4}$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. К3б соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1 от точки B_1 до оси вращения z: $h_1 = AB_1 \sin 30° = 10$ см. Тогда в момент $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (4), получим

$$V_{\text{пер}} = |\omega| \cdot h_1 = 10 \text{ см/с}, \quad a^{\tau}_{\text{пер}} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12 \text{ см/с}^2, \; a^{\text{n}}_{\text{пер}} = \omega^2 h_1 = 10 \text{ см/с}^2. \qquad (5)$$

Изобразим на рис. К3б векторы $\overline{V}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}^{\tau}_{\text{пер}}$ (с учетом знаков ω и ε) и $\overline{a}^{n}_{\text{пер}}$; направлены векторы $\overline{V}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}^{\tau}_{\text{пер}}$ перпендикулярно плоскости ADE, а вектор $\overline{a}^{n}_{\text{пер}}$ – по линии B_1C к оси вращения.

3. **Ускорение Кориолиса.** Так как угол между вектором $\overline{V}_{\text{отн}}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$) равен 30°, то в момент времени $t_1 = 2$ с

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot |V_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30° = 3 \text{ см/с}^2. \qquad (6)$$

Направление $\overline{a}_{\text{кор}}$ найдем по правилу Н.Е. Жуковского. Для этого вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$ спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\overline{a}^{n}_{\text{пер}}$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону $\overline{\omega}$, т. е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора $\overline{a}_{\text{кор}}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\overline{V}_{\text{пер}}$ (см. рис. К3б).

4. **Определение** $V_{\text{абс}}$**.** Так как $\overline{V}_{\text{абс}} = \overline{V}_{\text{отн}} + \overline{V}_{\text{пер}}$, а векторы $\overline{V}_{\text{отн}}$ и $\overline{V}_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны, то $V_{\text{абс}} = \sqrt{V^2_{\text{отн}} + V^2_{\text{пер}}}$; в момент времени $t_1 = 2$ с $V_{\text{абс}} = 10{,}44$ см/с.

5. **Определение** $a_{\text{абс}}$. По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}^{\tau}_{\text{отн}} + \overline{a}^{n}_{\text{отн}} + \overline{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \overline{a}^{\text{n}}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{кор}}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{\text{абс}}$ проведем координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции $\overline{a}_{\text{абс}}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\overline{a}^{\tau}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}_{\text{кор}}$ лежат на оси x, а векторы $\overline{a}_{\text{отн}}$ и $\overline{a}^{\text{n}}_{\text{пер}}$ расположены в плоскости B_1yz_1, т.е. в плоскости пластины. Тогда, проектируя обе части равенства (7) на координатные оси B_1xyz_1 и учитывая одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_1 = 2$с:

$$a_{\text{абс}x} = \left|a^{\tau}_{\text{пер}}\right| - a_{\text{кор}} = 9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс}y} = a^{\text{n}}_{\text{пер}} + \left|a_{\text{отн}}\right| \sin 30° = 13 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс}z1} = \left|a_{\text{отн}}\right| \cos 30° = 5{,}20 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{\text{абс}}$: $a_{\text{абс}} = \sqrt{a^2_{\text{абс}x} + a^2_{\text{абс}y} + a^2_{\text{абс}z_1}} = 16{,}64 \text{ см/с}^2$.

Ответ: $V_{\text{абс}} = 10{,}44$ см/с, $a_{\text{абс}} = 16{,}64$ см/с^2.

Задача К4 (тема: “Многозвенный механизм. Плоское движение тела”)

Плоский механизм состоит из стержней 1-4 и ползуна *B* или *E* (рис. К4.0-К4.7) или из стержней 1-3 и ползунов *B* или *E* (рис. К4.8, К4.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2, шарнирами; точка *D* находится в середине стержня *AB*. Длины стержней: l_1 =0,4 м, l_2 =1,2 м, l_3 =1,4м, l_4 = 0,6 м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К4а (для рис. 0-4) или в табл. К4б (для рис. 5-9); при этом в табл. К4а ω_1 и ω_2 – **величины постоянные**.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах "Найти".

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы**: по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от *DB* по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 – против хода часовой стрелки и т. д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить, как в примере К4 (см. рис. К4б). Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\overline{V}_B$ и ускорение $\overline{a}_B$ – от точки *B* к *b* (на рис. 5-9).

Указания. Задача К4 – на исследование многозвенного механизма. В отличие от задачи К2, в механизм входят звенья 2 и 3, совершающие сложное движение – плоскопараллельное. При решении задачи для определения скоростей точек этих звеньев и угловых скоростей этих звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому звену 2 и 3 в отдельности.**

При определении ускорения точки звена *AB* исходить из векторного равенства $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}$, где *A* – точка, ускорение $\overline{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка *A* движется по дуге окружности, то $\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n}$); *B* – точка, ускорение $\overline{a}_B$ которой нужно определить (о случае, когда точка *B* тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера К4).

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела». Обратите внимание на основные положения теории:

1. Признак (определение) плоскопараллельного движения тела.
2. Уравнения плоскопараллельного движения.
3. На какие простые движения раскладывается это движение; назовите вид переносного и относительного движений тела.
4. Определение абсолютной скорости точки тела:
   а) метод полюса (теорема сложения скоростей);
   б) теорема о проекциях скоростей точек на прямую, соединяющую точки;
   в) метод мгновенного центра скоростей (МЦС) тела; частные случаи нахождения МЦС тела.

5. Определение абсолютного ускорения точки тела методом полюса (теорема сложения ускорений). Почему это ускорение не содержит ускорения Кориолиса ?

Таблица К4а (к рис. К4.0-К4.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ω_4, 1/c	V точек	ω звена	*a* точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	-	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
1	90	120	150	0	30	-	4	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
2	30	60	30	0	120	5	-	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
3	60	150	150	90	30	-	5	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
4	30	30	60	0	150	4	-	*D, E*	*AB*	*B*	*AB*
5	90	120	120	90	60	-	6	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
6	90	150	120	90	30	3	-	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
7	0	60	60	0	120	-	2	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
8	60	150	120	90	30	2	-	*D, E*	*AB*	*B*	*AB*
9	30	120	150	0	60	-	8	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*

Таблица К4б (к рис. К4.5-К4.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/c	ε_1, 1/c^2	V_B, м/с	a_B, м/с^2	V точек	ω звена	*a* точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	-	-	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
1	0	60	90	0	120	-	-	4	6	*A, E*	*DE*	*A*	*AB*
2	60	150	30	90	30	3	5	-	-	*B, E*	*AB*	*B*	*AB*
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	*D, E*	*DE*	*A*	*AB*
6	0	150	90	0	120	5	8	-	-	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	*A, E*	*AB*	*A*	*AB*
8	90	120	120	90	150	6	10	-	-	*B, E*	*DE*	*B*	*AB*
9	60	60	60	90	30	-	-	5	4	*D, E*	*AB*	*A*	*AB*

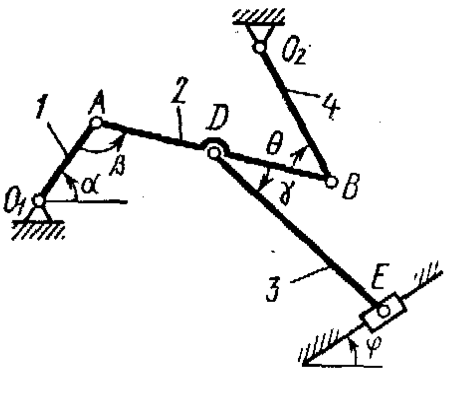


Рис. К4.0

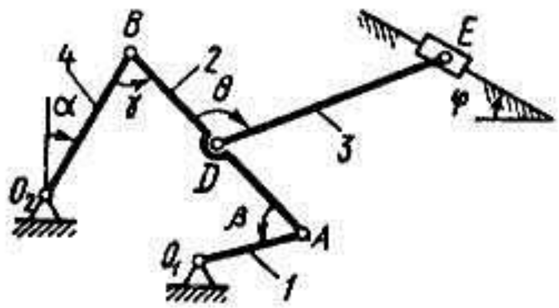


Рис. К4.1

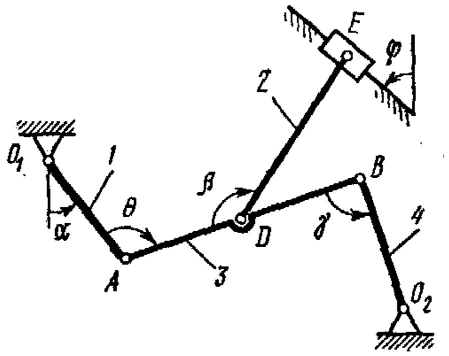


Рис. К4.2

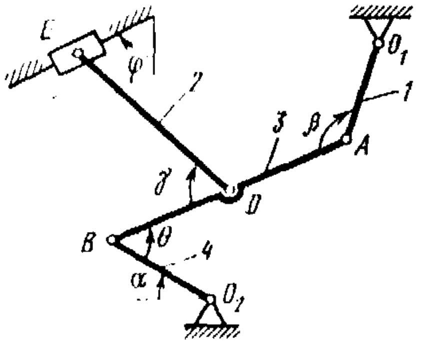


Рис. К4.3

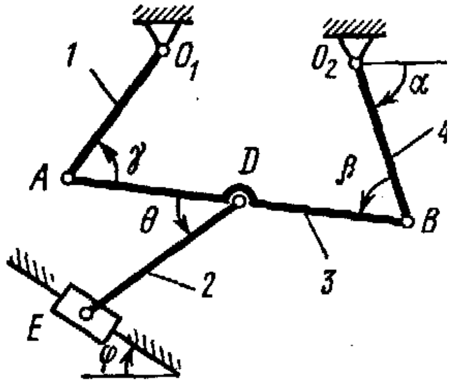


Рис. К4.4

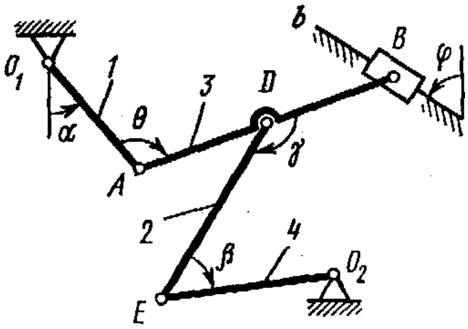


Рис. К4.5

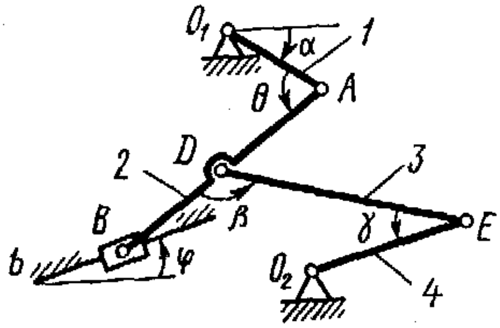


Рис. К4.6

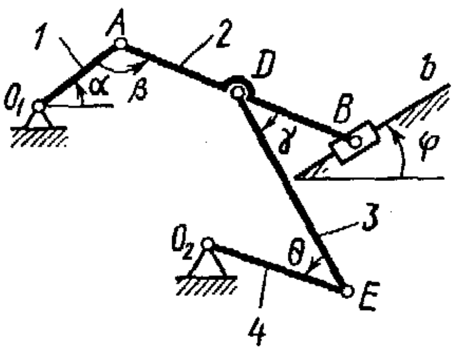


Рис. К4.7

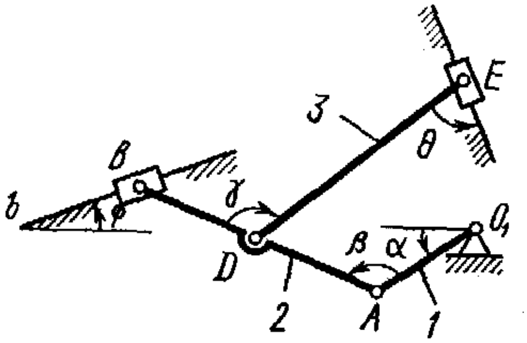


Рис. К4.8

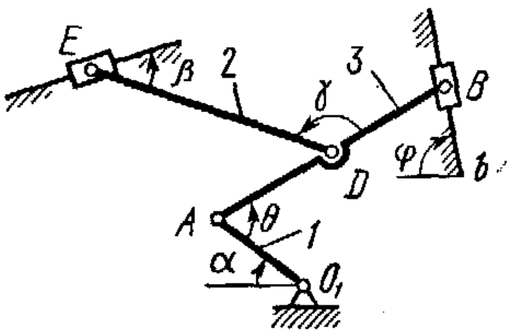


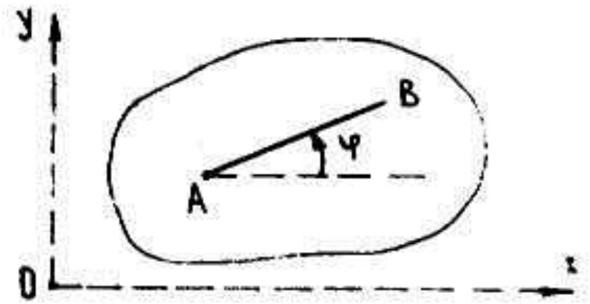
Рис К4.9

<u>Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела (краткие сведения из теории).</u>

<u>Признак движения</u>: при движении тела каждая его точка остается на неизменном расстоянии от некоторой неподвижной плоскости, или иначе: точки тела остаются в плоскостях, параллельных неподвижной плоскости. Примером такого движения является качение колеса по неподвижной поверхности без проскальзывания.

Плоскопараллельное движение является <u>сложным</u> движением и может быть разложено на два простых движения:

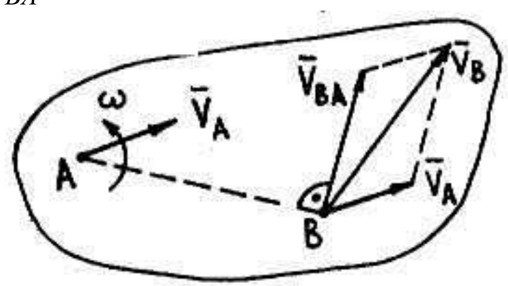
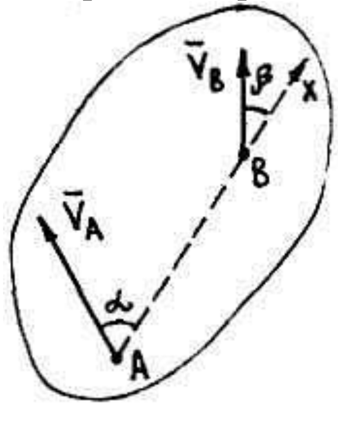
1. <u>Переносное поступательное</u>, при котором все точки перемещаются как полюс (произвольно выбранная точка тела);
2. <u>Относительное</u> движение - <u>вращение</u> тела вокруг полюса.

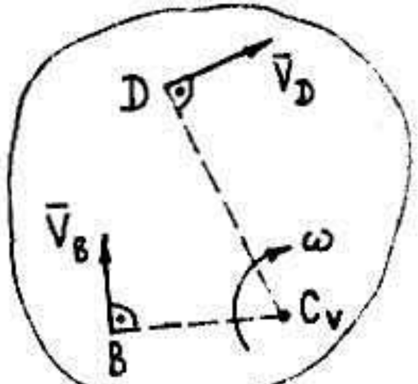
Уравнения движения тела (задание движения)	Кинематические характеристики движения тела	Примечание
 AB - отрезок, жестко связанный с телом. Уравнения плоского движения тела: $\begin{cases} x_A = x(t), \\ y_A = y(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases}$ Точка A - полюс.	φ - угол поворота <u>тела</u>, $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ - угловая скорость <u>тела</u>, $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ - угловое ускорение <u>тела</u>. $\overline{V}_A$ – скорость полюса. $\overline{a}_A$ – ускорение полюса	Характеристики относительного вращения тела ω, ε не меняются при выборе другой точки за полюс (не зависят от выбора полюса). Характеристики переносного поступательного движения тела зависят от выбора полюса.

Определение абсолютной скорости $\bar{V}$ и абсолютного ускорения $\bar{a}$ точки тела, совершающего плоскопараллельное движение.

Абсолютное движение каждой точки тела - составное, следовательно, для определения абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки применимы теорема сложения скоростей и теорема сложения ускорений при сложном движении точки (см. задачу К3). При записи этих теорем следует учесть конкретный вид переносного и относительного движений. За полюс удобно выбрать точку, скорость (ускорение) которой известна или легко может быть определена.

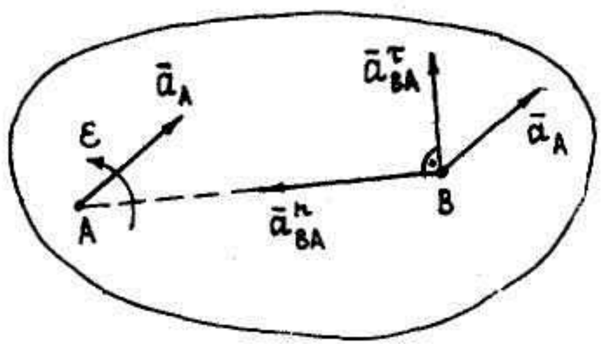
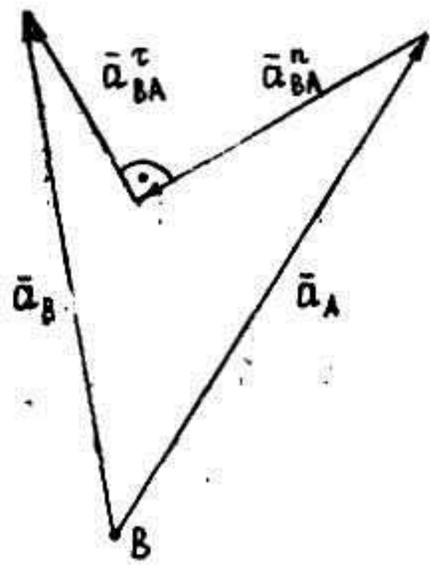
Определение абсолютной скорости точки.

<table>
<tr><td rowspan="2">Теорема сложения скоростей (метод полюса)</td><td colspan="2">Два метода, вытекающие из метода полюса</td></tr>
<tr><td>Теорема о проекциях скоростей</td><td>Метод мгновенного центра скоростей тела (МЦС)</td></tr>
<tr><td>Абсолютная скорость $\bar{V}_B$ любой точки B тела равна векторной сумме скорости $\bar{V}_A$ полюса и скорости $\bar{V}_{BA}$ точки B в относительном движении вокруг полюса A: $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$.
Вектор $\bar{V}_{BA} \perp AB$, модуль $V_{BA} = \omega \cdot AB$.

</td><td>Теорема: проекции абсолютных скоростей точек на прямую, соединяющую точки, алгебраически равны.


$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta$.</td><td>Определение: МЦС тела называется точка C_V подвижной плоскости, абсолютная скорость которой в данный момент времени равна нулю $V_{C_V} = 0$. МЦС тела находится на пересечении перпендикуляров, проведенных в двух точках тела к векторам абсолютных скоростей этих точек.


Если точку C_V взять за полюс, то приходим к выводу: абсолютные скорости точек тела соответствуют мгновенному повороту тела вокруг МЦС тела. $\bar{V}_B \perp BC_V$, $\bar{V}_D \perp DC_V$, $V_B = \omega \cdot BC_V$, $V_D = \omega \cdot DC_V$.</td></tr>
</table>

Определение абсолютного ускорения точки.

Теорема сложения ускорений (метод полюса)	Графическое нахождение $\bar{a}_B$ из векторного уравнения	Аналитическое нахождение $\bar{a}_B$ из векторного уравнения
Абсолютное ускорение $\bar{a}_B$ любой точки B тела равно векторной сумме ускорения $\bar{a}_A$ полюса A и ускорения $\bar{a}_{BA}$ точки B в относительном движении точки вокруг полюса A: $$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA},\text{ или}$$ $$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \qquad (1)$$ Вектор $\bar{a}_{BA}^n$ (нормальное ускорение точки B в движении вокруг полюса A) направлен от точки B к полюсу A. Модуль $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB$. Вектор $\bar{a}_{BA}^\tau$ (касательное ускорение точки B в движении вокруг полюса A) $\perp$ AB. Модуль $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB$.  	Находим (если это возможно) векторы, содержащиеся в правой части (1). Выбираем масштаб и в соответствии с уравнением (1) строим векторный многоугольник. Вектор, проведенный из начала первого в конец последнего вектора, дает абсолютное ускорение $\bar{a}_B$ точки.  	Выбираем оси координат и проектируем уравнение (1) на эти оси: $$a_{Bx} = a_{Ax} + a_{BAx}^n + a_{BAx}^\tau, \qquad (2)$$ $$a_{By} = a_{Ay} + a_{BAy}^n + a_{BAy}^\tau. \qquad (3)$$ Решая (2), (3) и учитывая, что точка B, кроме звена AB, принадлежит еще ползуну или кривошипу, находим a_B и a_{BA}^τ. Тогда $\varepsilon = \left\|a_{BA}^\tau\right\| / AB$.

Пример К4. Механизм (рис. К4а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна *B,* соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, *AD*=*DB*, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7\,\text{с}^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки).

Определить: V_B, V_E, ω_2, a_B, ε_3.

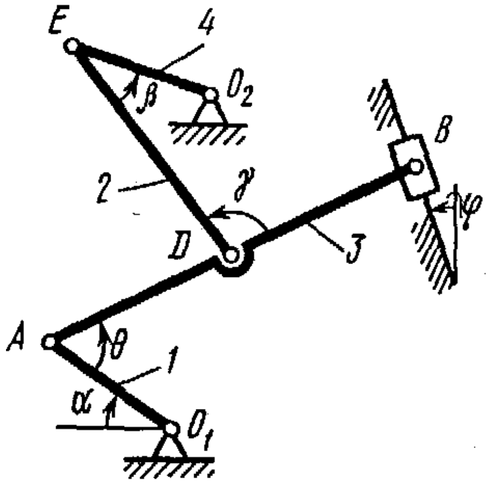


Рис. К4а

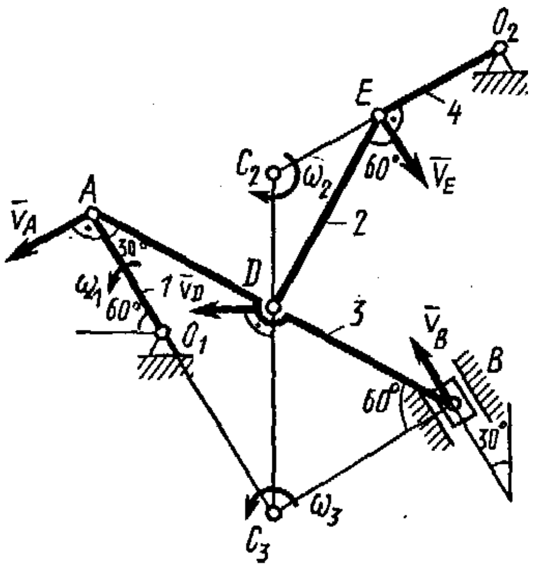


Рис. К4б

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами и длинами стержней (рис. К4б; на этом рисунке в процессе решения задачи изображаем все векторы скоростей).

2. **Определяем V_B.** Точка *B* принадлежит стержню 3, совершающему плоскопараллельное движение. Чтобы найти $\bar{V}_B$, нужно знать направление $\bar{V}_B$ и скорость другой точки звена 3. Такой точкой является точка *A*, принадлежащая еще звену 1 (звено вращается, см. задачу К2).

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \quad \bar{V}_A \perp O_1 A. \qquad (1)$$

Направление $\bar{V}_B$ найдем, учитывая, что точка *B* принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{V}_A$ и направление $\bar{V}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня 3) на прямую, соединяющую эти точки (прямая *AB*). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{V}_B$ **(проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки).** Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$V_B \cos 30° = V_A \cos 60° \text{ и } V_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. **Определяем** $\overline{V}_E$**.** Точка E принадлежит стержню 2, совершающему плоскопараллельное движение. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\overline{V}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню 3. Для этого, зная $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, восставленных из точек A и B. По направлению вектора $\overline{V}_A$ определяем направление **мгновенного поворота стержня 3 вокруг МЦС** $\boldsymbol{C_3}$**.** Вектор $\overline{V}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону мгновенного поворота тела. Величину V_D найдем из пропорции

$$\frac{V_D}{C_3D} = \frac{V_B}{C_3B}. \tag{3}$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB\sin 30° = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$V_D = V_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \;\; \overline{V}_D \perp C_3D. \tag{4}$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню 4, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{V}_E \perp O_2E$. В точках E и D построим перпендикуляры к скоростям $\overline{V}_E$ и $\overline{V}_D$, получим точку C_2 – МЦС стержня 2. По направлению вектора $\overline{V}_D$ определяем направление мгновенного поворота стержня 2 вокруг центра C_2. Вектор $\overline{V}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К4б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E=C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$V_E / C_2E = V_D / C_2D, \qquad V_E = V_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{5}$$

4. **Определяем** $\boldsymbol{\omega_2}$**.** Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = l_2/(2\cos 30°) = 0{,}69\,\text{м}$, то

$$\omega_2 = V_D / C_2D = 0{,}67\,\text{с}^{-1}. \tag{6}$$

5. **Определяем** $\overline{a}_B$ (рис. К4в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню 3. Чтобы найти $\overline{a}_B$, надо знать траекторию точки B и ускорение какой-нибудь другой точки стержня 3. Такой точкой является точка A, принадлежащая еще звену 1. Следовательно, $\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n}$, где численно

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8\,\text{м/с}^2; \; a_A^{n} = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6\,\text{м/с}^2. \tag{7}$$

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К4в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\overline{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\overline{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{V}_B$. Для определения $\overline{a}_B$ воспользуемся равенством (A – полюс):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^\tau + \overline{a}_{BA}^n. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже в точке B векторы: $\overline{a}_A^n$, $\overline{a}_A^\tau$ (переносное ускорение точки B), $\overline{a}_{BA}^n$ (вдоль BA от B к A)

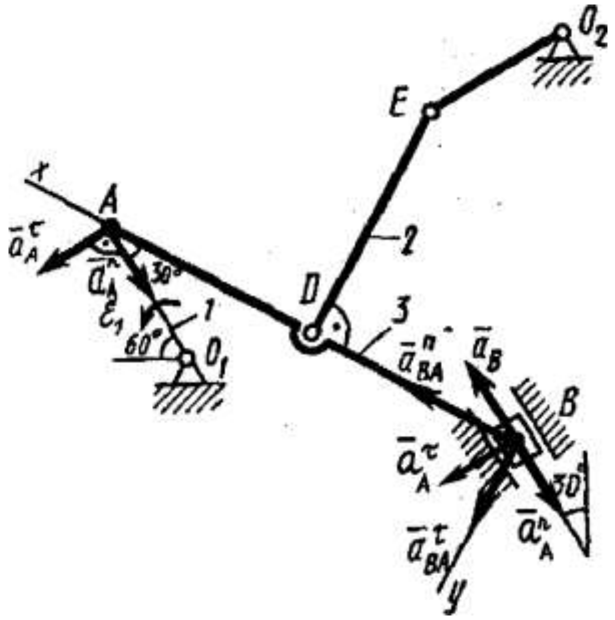


Рис. К4в

и $\overline{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = V_A / C_3A = V_A / l_3 \cos 30° = 0{,}66\,\text{с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0{,}61\,\text{м/с}^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление BA (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\overline{a}_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B \cos 30° = a_A^\tau \cos 60° - a_A^n \cos 30° + a_{BA}^n. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72\,\text{м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как $a_B > 0$, то вектор $\overline{a}_B$ направлен, как показано на рис. К4в.

6. **Определяем ε_3.** Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^τ. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное AB (ось y). Тогда получим

$$-a_B \sin 30° = a_A^\tau \sin 60° + a_A^n \sin 30° + a_{BA}^\tau. \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^\tau = -3{,}58\,\text{м/с}^2$. Знак указывает, что направление $\overline{a}_{BA}^\tau$ противоположно направлению, показанному на рис. К4в.

Из равенства $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_3 l_3$ получим $\varepsilon_3 = \left|a_{BA}^{\tau}\right| / l_3 = 2{,}56\,\text{с}^{-2}$.

Ответ: V_B =0,46 м/с; V_E =0,46 м/с; ω_2 = 0,67 с$^{-1}$; $a_B = 0{,}72\,\text{м/с}^2$; ε_3 = 2,56 с$^{-2}$.

Примечание. Если точка *B*, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К4.0-К4.4, где *B* принадлежит вращающемуся звену 4 и движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\bar{a}_B$ заранее неизвестно. В этом случае $\bar{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\bar{a}_B = \bar{a}_B^{\tau} + \bar{a}_B^{n}$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}_B^{\tau} + \bar{a}_B^{n} = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}. \qquad (13)$$

При этом вектор $\bar{a}_B^{n}$ (см., например, рис. К4.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\bar{a}_B^{\tau}$ – перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_A^{τ}, a_A^{n} и a_{BA}^{n} определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^{\tau} = 0$ или $a_A^{n} = 0$, если точка *A* движется прямолинейно).

Значение a_B^{n} также вычисляется по формуле $a_B^{n} = V_B^2 / \rho = V_B^2 / l$, где l – радиус окружности O_2B, а V_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^{τ} и a_{BA}^{τ} и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a_B^{τ}, можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{\left(a_B^{\tau}\right)^2 + \left(a_B^{n}\right)^2}$. Величина a_{BA}^{τ} служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО КИНЕМАТИКЕ

1. Векторный способ задания движения точки. Определение скорости при векторном способе задания движения точки.
2. Векторный способ задания движения точки. Определение ускорения точки.
3. Координатный способ задания движения точки. Определение траектории и скорости точки (величины и направления).
4. Координатный способ задания движения точки. Определение ускорения точки (величины и направления).
5. Естественный способ задания движения точки. Определение скорости точки.
6. Естественный способ задания движения точки. Касательное, нормальное, полное ускорения (физический смысл, величина, направление).

7. Поступательное движение твердого тела (определение). Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела. Задание движения тела.
8. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (определение). Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Определение характера вращения тела.
9. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
10. Угловая скорость тела как вектор.
11. Составное движение точки. Переносное, относительное, абсолютное движения точки (определения).
12. Составное движение точки. Переносная, относительная, абсолютная скорости точки (определения). Теорема сложения скоростей.
13. Составное движение точки. Переносное, относительное, абсолютное ускорения точки (определения). Теорема сложения ускорений в общем случае (теорема Кориолиса).
14. Определение величины и направления ускорения Кориолиса. Случаи равенства нулю ускорения Кориолиса.
15. Плоскопараллельное (плоское) движение тела (определение). Уравнения движения тела. Разложение движения на простые. Независимость угловых параметров от выбора полюса.
16. Определение абсолютной скорости точки тела методом полюса при плоском движении тела. Теорема о проекциях скоростей точек тела на прямую, проходящую через эти точки.
17. Мгновенный центр скоростей тела, совершающего плоское движение (определение). Нахождение мгновенного центра скоростей тела.
18. Мгновенный центр скоростей тела; определение абсолютной скорости любой точки тела; определение угловой скорости тела при плоском движении тела.
19. Частные случаи нахождения мгновенного центра скоростей тела при плоском движении тела.
20. Определение абсолютного ускорения точки тела методом полюса при плоском движении тела.

ДИНАМИКА

Динамика изучает движение материальных точек и механических систем с учетом сил, которые влияют на это движение.

Задача Д1 (тема: “Динамика точки”)

Груз *D* массой *m,* получив в точке *A* начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе *ABC,* расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0-Д1.9, табл. Д1). На участке *AB* на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\bar{R}$, зависящая от скорости груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке *AB* пренебречь.

В точке *B* груз, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу f=0,2) и переменная сила $\bar{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки *A* до точки *B,* найти закон движения груза на участке *BC,* т.е. $x = x(t)$, где $x = BD$.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Динамика материальной точки».

1. Сформулируйте основные законы динамики материальной точки (Галилея – Ньютона).
2. Запишите дифференциальные уравнения движения точки в векторной и координатной формах.
3. Повторите раздел кинематики: векторный и координатный способы задания движения точки.
4. Сформулируйте первую и вторую задачи динамики точки: постановка каждой задачи и ее решение.

Динамика точки (краткие сведения из теории)

Второй закон динамики точки в инерциальной системе отсчета:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{1}$$

где m – масса точки, $\bar{a} = d\bar{V}/dt = d^2\bar{r}/dt^2$ – абсолютное ускорение точки, $\bar{F}$ – векторная сумма сил, действующих на точку (равнодействующая). Уравнение (1) – это дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме. Спроектировав (1) на оси декартовой системы координат, получаем систему дифференциальных уравнений движения точки в координатной форме:

$$ma_x = F_x,\ ma_y = F_y,\ ma_z = F_z, \tag{2}$$

где $a_x = dV_x/dt = d^2x/dt^2$ и т.д.

Первая задача динамики точки: заданы уравнения движения точки в координатной форме (см. задачу К1)

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t); \tag{3}$$

найти силу $\bar{F}$, действующую на точку. Решение: получив дифференциальные уравнения (2), дифференцируем заданные функции (3), подставляем в (2), находим F_x, F_y, F_z и $\bar{F}$.

Вторая задача динамики точки (основная): задана сила $\bar{F}$, действующая на точку; найти кинематические уравнения движения (3) точки. Решение: составив уравнение (1) и спроектировав его на оси, получим уравнения (2). Добавив начальные условия (при $t = 0$) $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $V_x = V_{x0}$, $V_y = V_{y0}$, $V_z = V_{z0}$ проинтегрируем (2) и найдем (3).

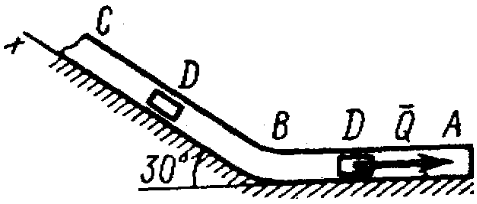


Рис. Д1.0

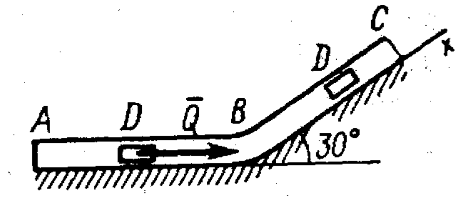


Рис. Д1.1

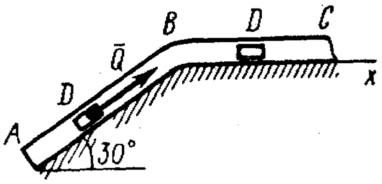


Рис. Д1.2

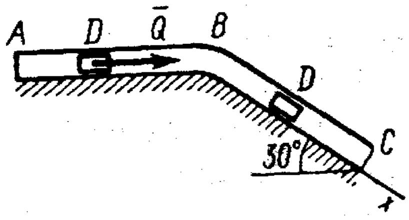


Рис. Д1.3

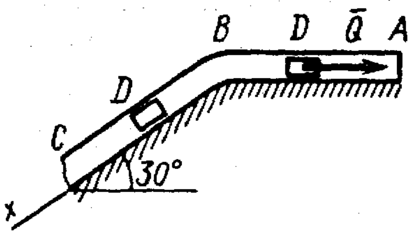


Рис. Д1.4

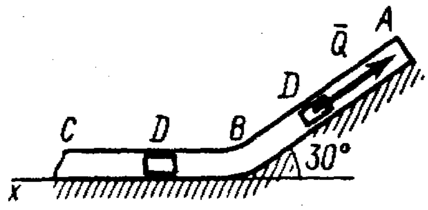


Рис. Д1.5

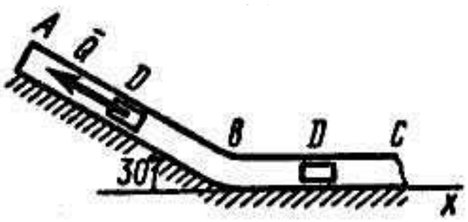


Рис. Д1.6

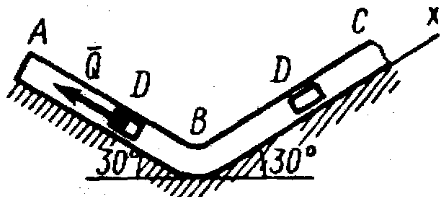


Рис. Д1.7

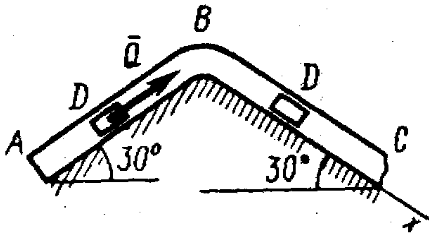


Рис. Д1.8

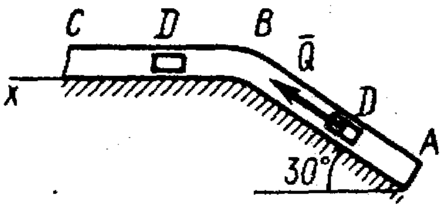


Рис. Д1.9

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	V_0, м/с	Q, Н	R, H	l, м	t_1, с	F_x, H
0	2	20	6	$0{,}4V$	-	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8V^2$	1,5	-	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5V$	-	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6V^2$	5	-	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4V$	-	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0{,}5V^2$	4	-	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}3V$	-	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8V^2$	2,5	-	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5V$	-	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2V^2$	4	-	$-6\sin(4t)$

Указания. Задача Д1 – на составление и интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение первой и второй задач динамики точки). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить векторное уравнение движения точки (груза) на участке *AB*, спроектировать это уравнение на координатную ось, направленную вдоль *AB*, и проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных, учитывая начальные условия (вторая задача динамики точки). Затем, зная время движения на участке *AB* или его длину, определить скорость груза в точке *B*. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке *BC*.

После этого нужно составить векторное уравнение движения точки (груза) на участке *BC* и спроектировать это уравнение на две координатные оси, направленные вдоль *BC* и перпендикулярно *BC*. Так как в первое полученное уравнение входит сила трения $F_{\text{тр}} = fN$, то нужно сначала найти нормальную реакцию N из второго уравнения (первая задача динамики точки). Затем нужно подставить найденное значение N в первое уравнение и проинтегрировать это уравнение с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке *B*, и полагая, что в этот момент времени $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке *AB* в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти в уравнении от переменных V_x, t к переменным V_x, x, учитывая, что

$$\frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}.$$

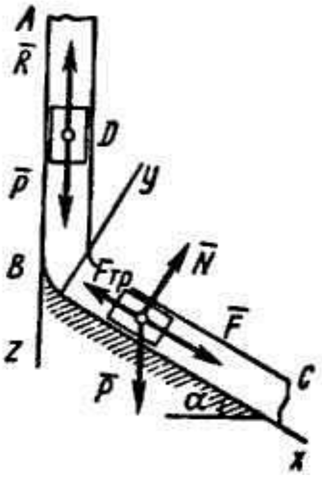


Рис. Д1

Пример Д1. На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления $\overline{R}$; расстояние от точки A, где $V = V_0$, до точки B равно l. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: m=2 кг, $R = \mu V^2$, где μ = 0,4 кг/м, V_0 = 5 м/с, l = 2,5 м, F_x = 16 sin (4t).

Определить: $x = f(t)$ – закон движения груза на участке BC.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза **на участке *AB*,** считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и приложенные к нему силы $\overline{P}$ и $\overline{R}$. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в векторной форме:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{P} + \overline{R}. \qquad (1)$$

Проводим ось Az в сторону движения точки и проектируем (1) на эту ось:

$$m\frac{dV_z}{dt} = mg - \mu V^2, \qquad (2)$$

где учтено, что $P = mg$, $R = \mu V^2$. Подчеркнем, что в уравнении (2) **все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят.** Учитывая, что $V_z = V$ и делая замену $dV/dt = V\,dV/dz$, получим уравнение

$$mV\frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2. \qquad (3)$$

Разделим обе части (3) на m и введем обозначение

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2 \text{ м}^{-1}.$$

Тогда уравнение (3) приобретает вид

$$V\frac{dV}{dz} = g - kV^2. \qquad (4)$$

Решим уравнение (4). Разделим переменные V и z, выполнив два действия: обе части (4) умножим на dz и разделим на $(g - kV^2)$; получим:

$$\frac{VdV}{g-kV^2}=dz.$$

Интегрируя это уравнение, найдем:

$$-\frac{1}{2k}\ln(g-kV^2)=z+C_1. \qquad (5)$$

Находим C_1. Подставим в (5) начальные условия: $t=0$, $z=z_0=0$, $V=V_0$.

$$-\frac{1}{2k}\ln(g-kV_0^2)=C_1.$$

Найденное выражение для C_1 подставляем в (5):

$$-\frac{1}{2k}\ln(g-kV^2)=z-\frac{1}{2k}\ln(g-kV_0^2),$$

или

$$\ln\frac{g-kV^2}{g-kV_0^2}=-2kz \quad \text{и} \quad \frac{g-kV^2}{g-kV_0^2}=e^{-2kz}.$$

Отсюда

$$V^2=\frac{g}{k}-\left(\frac{g}{k}-V_0^2\right)e^{-2kz}. \qquad (6)$$

Полагая в равенстве (6) z = l = 2,5 м, $V_0=5$ м/с, $g=10$ м/с^2, e = 2,7 и подставляя ранее найденное k = 0,2 м $^{-1}$, определим скорость V_B груза в точке B:

$$V_B=6{,}4 \text{ м/с}. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим движение груза **на участке *BC*;** найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0=V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы (активные и реакции связей): $\overline{P}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{\text{тр}}$, $\overline{F}$. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в векторной форме:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt}=\overline{P}+\overline{N}+\overline{F}_{\text{тр}}+\overline{F}. \qquad (8)$$

Проведем из точки B оси Bx (в сторону движения точки) и By и проектируем (8) на ось Bx:

$$m\frac{dV_x}{dt}=mg\sin\alpha-fN+16\sin(4t), \qquad (9)$$

где учтено, что $P=mg$, $F_{\text{тр}}=fN$, $F_x=16\sin(4t)$. Сила N неизвестна; следовательно, прежде чем интегрировать (9), найдем N, решив первую задачу динамики точки. Для этого спроектируем векторное уравнение (8) на ось By:

$$ma_y=N-mg\cos\alpha. \qquad (10)$$

Учтем, что движение точки происходит по прямой, $y\equiv const$ и, следовательно, $a_y=\ddot{y}\equiv 0$. Тогда из (10) получаем $N=mg\cos\alpha$. Подставим этот результат в (9):

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t).$$

Подставим в это уравнение заданные численные значения (чтобы избежать громоздкой записи). Тогда получим

$$\frac{dV_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \qquad (11)$$

Решим уравнение (11). Разделим переменные V_x и t. Умножим обе части (11) на dt:

$$dV_x = 3{,}2\,dt + 8\sin(4t)\,dt;$$

интегрируя, найдем

$$V_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \qquad (12)$$

Находим C_2. Подставим в (12) начальные условия: $t = 0$, $V_x = V_B$, где V_B дается равенством (7). Найденное значение $C_2 = 8{,}4$ подставляем в (12):

$$V_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4.$$

Так как $V_x = dx/dt$, то

$$\frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \qquad (13)$$

Решим уравнение (13). Разделим переменные x и t. Умножим обе части (13) на dt:

$$dx = 3{,}2t\ dt - 2\cos(4t)\ dt + 8{,}4\ dt;$$

интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t + C_3 \qquad (14)$$

Находим C_3. Подставим в (14) начальные условия: $t = 0$, $x = x_0 = 0$. Найденное значение $C_3 = 0$ подставляем в (14):

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t.$$

Ответ: $x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t$, где x – в метрах, t – в секундах.

Задача Д2
(тема “Теорема о движении центра масс системы”)

Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 = 2 кг и D_2 массой m_2 = 6 кг и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3 = 2 кг, движущейся вдоль горизонтальных гладких направляющих (рис. Д2.0-Д2.9, табл. Д2). В момент времени t_0 = 0, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r = 0,4 м и R = 0,8 м.

При движении грузов угол $\varphi_1 = \angle A_1C_3D_1$ изменяется по закону $\varphi_1 = f_1(t)$, а угол $\varphi_2 = \angle A_2C_3D_2$ – по закону $\varphi_2 = f_2(t)$. В табл. Д2 эти зависимости даны отдельно для рис. 0-4 и 5-9, где φ выражено в радианах, t – в секундах.

Считая грузы материальными точками, определить закон изменения со временем величины, указанной в таблице в столбце “Найти”, т.е. $x_3 = f_3(t)$ и $N = f(t)$, где x_3 – координата центра C_3 плиты ($x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты), N – полная нормальная реакция направляющих.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему «Теорема о движении центра масс». Ответьте на вопросы:

1. Что называется механической системой? Понятие о внешних и внутренних силах, действующих на точки системы.
2. Что такое центр масс системы? Запишите формулы для координат центра масс системы.
3. Сформулируйте теорему о движении центра масс и запишите уравнение движения центра масс системы в векторной и координатной формах.
4. Запишите условия, при которых координата центра масс остается постоянной.

Таблица Д2

Номер Условия	Рис. 0-4		Рис.5-9		Найти
	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	
0	$\frac{\pi}{3}(t^2+1)$	$\frac{\pi}{6}(t^2-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2+2)$	x_3
1	$\pi(2-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+3)$	$\frac{\pi}{4}(2t-1)$	$\frac{\pi t}{6}$	N
2	$\frac{\pi}{4}(t^2+2)$	$\frac{\pi}{6}(5-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	πt^2	x_3
3	$\frac{\pi t}{3}$	$\frac{\pi}{2}(t-2)$	$\frac{\pi}{6}(3t-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t)$	N
4	$\frac{\pi}{4}(1-3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2-4)$	$\frac{\pi t^2}{2}$	$\frac{\pi}{4}(2-t^2)$	x_3
5	$\frac{\pi}{6}(t+2)$	$\frac{\pi}{4}(1-t)$	$\pi(3-t)$	$\frac{\pi}{6}(t-1)$	N
6	πt^2	$\frac{\pi}{6}(1-2t^2)$	$\frac{\pi}{4}(2t^2-3)$	$\frac{\pi}{3}(2-t^2)$	x_3
7	$\frac{\pi}{3}(5-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+4)$	$\frac{\pi t}{6}$	$\frac{\pi}{4}(4-t)$	N
8	$\frac{\pi}{6}(t^2+3)$	$\frac{\pi}{2}(2-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	$\pi(t^2+2)$	x_3
9	$\frac{\pi}{2}(4-t)$	$\pi(t+5)$	$\frac{\pi}{6}(2t-1)$	$\frac{\pi}{2}(2-t)$	N

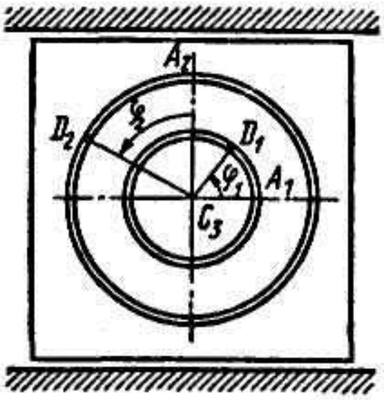


Рис. Д2.0

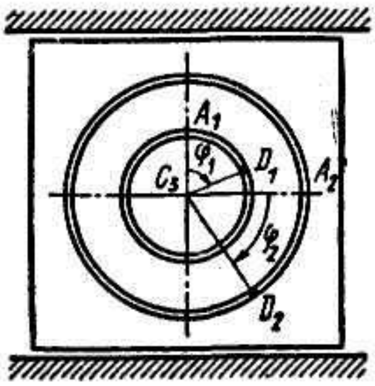


Рис. Д2.1

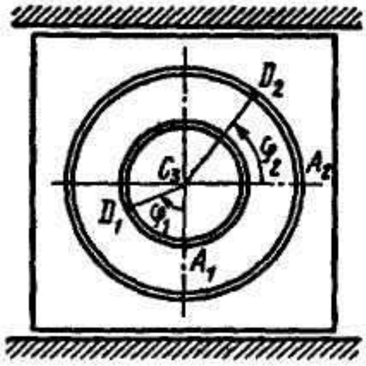


Рис. Д2.2

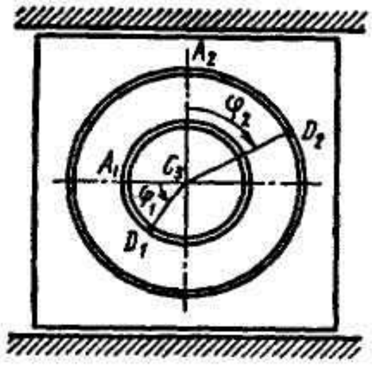


Рис. Д2.3

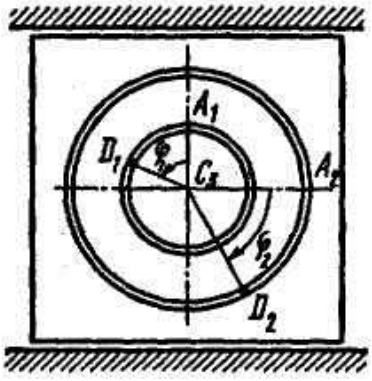


Рис. Д2.4

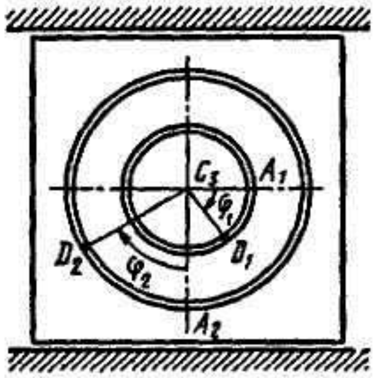


Рис. Д2.5

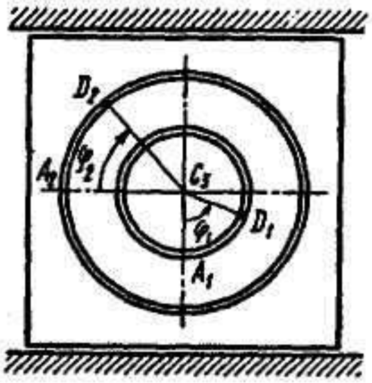


Рис. Д2.6

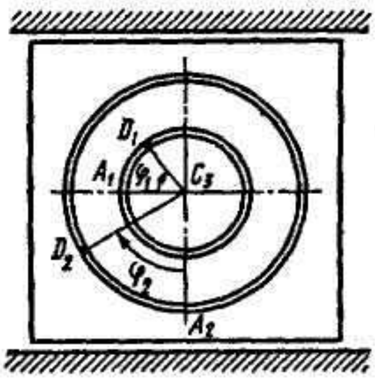


Рис. Д2.7

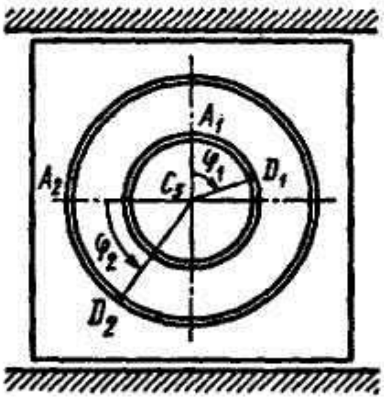


Рис. Д2.8

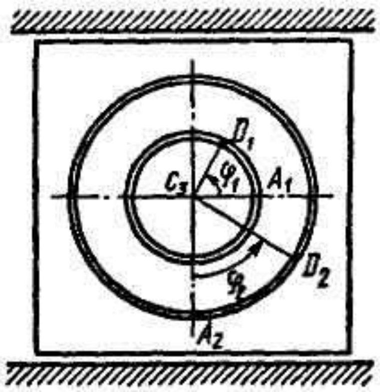


Рис. Д2.9

Теорема о движении центра масс системы
(краткие сведения из теории)

Основные понятия

Механической системой называется множество взаимодействующих точек и тел. Центром масс системы называется геометрическая точка C, декартовы координаты которой равны $x_C = \dfrac{\sum m_k x_k}{M}$, $y_C = \dfrac{\sum m_k y_k}{M}$, $z_C = \dfrac{\sum m_k z_k}{M}$, где x_k, y_k, z_k – координаты точки системы, m_k – масса точки, $M = \sum m_k$ – масса системы. Силы взаимодействия точек системы называются внутренними силами; они обозначаются $\overline{F}^{\,i}$. Силы, действующие на точки системы со стороны точек и тел, не входящих в систему, называются внешними силами; они обозначаются $\overline{F}^{\,e}$. Свойства внутренних сил: главный вектор $R^i = \sum \overline{F}_k^{\,i} = 0$, главный момент $\overline{M}_O^{\,i} = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{\,i}) = 0$.

Дифференциальное уравнение движения центра масс системы в векторной форме

$$M\,\overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^{\,e}\,, \tag{1}$$

где M – масса системы, $\overline{a}_C$ – абсолютное ускорение центра масс системы, $\sum \overline{F}_k^{\,e}$ – векторная сумма внешних сил, действующих на точки системы. По форме уравнение (1) совпадает с дифференциальным уравнением движения материальной точки $m\overline{a} = \overline{F}$ и *теорема о движении центра масс системы* формулируется следующим образом:

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действуют силы, приложенные к точкам системы.

Следовательно, применяя эту теорему, можно решать две задачи динамики, аналогично задаче Д1.

Частные случаи (законы сохранения движения центра масс).

а) Из уравнения (1) следует: если внешние силы таковы, что $\sum \bar{F}_k^e = 0$, то $\bar{a}_C = \dfrac{d\bar{V}_C}{dt} = 0$ и, следовательно, $\bar{V}_C = const$; это означает, что центр масс системы движется прямолинейно и равномерно.

б) Записав уравнение (1) в проекции на ось, получим

$$Ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e. \qquad (2)$$

Частный случай: если выполнены одновременно два условия

$$\sum F_{kx}^e = 0 \text{ и } V_{Cx} = 0 \text{ при } t = 0,$$

то $x_C = const$ – координата x_C центра масс системы остается постоянной и равной своему начальному значению

$$x_C(t) = x_C(0),$$

где $x_C(t)$ – координата центра масс в произвольный момент времени, $x_C(0)$ – координата центра масс в начальный момент времени.

Указания. Задача Д2 – на применение теоремы о движении центра масс системы. При решении этой задачи следует составить дифференциальное уравнение движения центра масс системы в векторной форме. Для определения $x_3 = f_3(t)$ следует спроектировать это уравнение на горизонтальную ось x (решаем вторую задачу динамики), а для определения N – на вертикальную ось y (решаем первую задачу динамики).

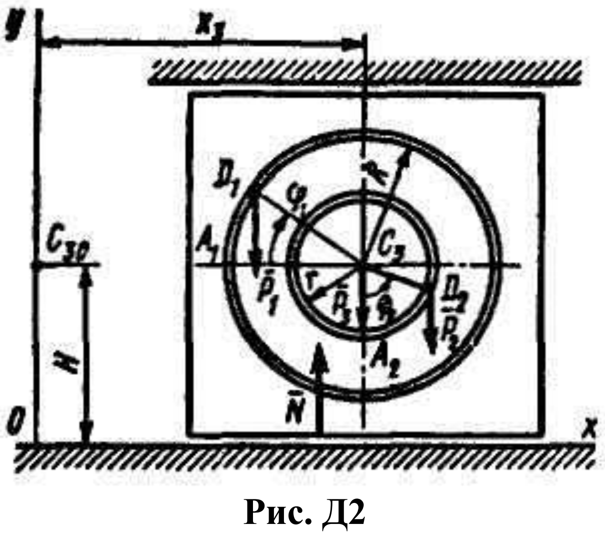


Рис. Д2

Пример Д2. Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д2). В момент времени t_0=0, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r и R, по законам $\varphi_1 = f_1(t)$ и $\varphi_2 = f_2(t)$.

Дано: m_1 = 6 кг, m_2 = 8 кг, m_3 = 12 кг, r = 0,6 м, R = 1,2 м, $\varphi_1 = \pi t$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}(1-t)$ (t – в секундах).

Определить: $x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты, $N = f(t)$ – закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и грузов D_1 и D_2 в произвольном положении (рис. Д2). Изобразим на рисунке действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ и реакцию направляющих $\bar{N}$. Запишем уравнение движения центра масс системы в векторной форме:

$$M\,\bar{a}_C = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{N}\,. \qquad (1)$$

Проведем координатные оси *Oxy* так, чтобы ось *y* проходила через точку C_{30}, где находился центр масс плиты в момент времени t_0=0.

а) **Определение перемещения** $x_3(t)$ (вторая задача динамики). Для определения $x_3 = f_3(t)$ спроектируем уравнение (1) на ось *x*. Получим

$$M\,\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \quad \text{или} \quad M\,\ddot{x}_C = 0, \qquad (2)$$

так как все внешние силы перпендикулярны оси *x* и поэтому $\sum F_{kx}^e = 0$.

Отметим также, что $V_{Cx} = 0$ при $t = 0$. Поэтому, интегрируя дважды уравнение (2), получим:

$$M\,x_C = const \qquad (3)$$

(закон сохранения координаты центра масс системы). Из (3) следует, что

$$M\,x_C(t) = M\,x_C(0)\,. \qquad (4)$$

Определим значение $M\,x_C(t)$. Координата x_C центра масс системы определяется по формуле

$$M\,x_C = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3. \qquad (5)$$

Из рис. Д2 видно, что в произвольный момент времени абсциссы грузов равны соответственно $x_1 = x_3 - R\cos\varphi_1$, $x_2 = x_3 + r\sin\varphi_2$. Подставляя эти выражения в формулу (5) и учитывая заданные зависимости φ_1 и φ_2 от *t*, получим

$$M\,x_C(t) = (m_1 + m_2 + m_3)x_3(t) - m_1R\cos(\pi t) + m_2r\sin\left(\pi/2 - \pi t/2\right). \qquad (6)$$

Определим значение $M\,x_C(0)$. Подставляя в (6) *t*=0, $x_3(0)$=0, получим

$$M\,x_C(0) = -m_1R + m_2r\,. \qquad (7)$$

В соответствии с уравнением (4), приравниваем правые части (6) и (7):

$$-m_1R + m_2r = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1R\cos(\pi t) + m_2r\cos\left(\pi t/2\right).$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x_3.

Ответ: $x_3 = 0{,}09[3\cos(\pi t) - 2\cos\left(\pi t/2\right) - 1]$ м, где *t* – в секундах.

б) **Определение реакции** *N* (первая задача динамики). Для определения $N = f(t)$ спроектируем векторное уравнение (1) на вертикальную ось *y* (см. рис. Д2):

$$M\,\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \quad \text{или} \quad M\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3. \qquad (8)$$

Отсюда получим, учитывая, что P_1=m_1g, и т.д.:

$$N = M\,\ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3)g\,, \qquad (9)$$

где $\ddot{y}_C$ пока неизвестно. Для нахождения $\ddot{y}_C$ определим сначала $y_C(t)$. Координата y_C центра масс системы определяется по формуле

$$M\,y_C = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3. \qquad (10)$$

Из рис. Д2 видно, что в произвольный момент времени ординаты грузов равны соответственно $y_1 = H + R\sin\varphi_1$, $y_2 = H - r\cos\varphi_2$, а $y_3 = H = OC_{30} = const$.

Подставляя эти выражения в формулу (10) и учитывая заданные зависимости φ_1 и φ_2 от t, получим

$$M\,y_C(t) = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R\sin(\pi t) - m_2 r\cos(\pi/2 - \pi t/2)$$

или $M\,y_C(t) = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R\sin(\pi t) - m_2 r\sin(\pi t/2)$.

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдем $M\,\ddot{y}_C = -m_1 R\pi^2 \sin(\pi t) + m_2 r(\pi^2/4)\sin(\pi t/2)$.

Подставив это значение $M\,\ddot{y}_C$ в уравнение (9), определим искомую зависимость N от t.

Ответ: $N = 254{,}8 - 1{,}2\pi^2\,[6\sin(\pi t) - \sin(\pi t/2)]$, где t – в секундах, N – в ньютонах.

Задача Д3
(тема: "Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси")

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R или прямоугольная со сторонами R и $2R$, где R=1,2 м) массой $m_1 = 24$ кг вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси z, отстоящей от центра масс C платформы на расстояние $OC = b$ (рис. Д3.0-Д3.9, табл. Д3); размеры для всех прямоугольных платформ показаны на рис. Д3.0а (вид сверху).

В момент времени $t_0 = 0$ по желобу платформы начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз D массой $m_2 = 8$ кг по закону $s = AD = F(t)$, где s выражено в метрах, а t – в секундах. Одновременно на платформу начинает действовать пара сил с моментом M (задан в Ньютоно-метрах; при $M < 0$ его направление противоположно показанному на рисунке).

Определить, пренебрегая массой вала, зависимость $\omega = f(t)$, т.е. угловую скорость платформы, как функцию времени.

На всех рисунках груз D показан в положении, при котором $s > 0$ (когда $s < 0$, груз находится по другую сторону от точки A). Изображая чертеж решаемой задачи, провести ось z на заданном расстоянии $OC = b$ от центра C.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Теорема об изменении кинетического момента системы». Ответьте на вопросы:

1. Вычисление моментов количества движения материальной точки относительно неподвижного центра и неподвижной оси.
2. Определения: кинетический момент механической системы относительно неподвижного центра и неподвижной оси.
3. Сформулируйте теоремы об изменении кинетических моментов механической системы относительно неподвижного центра и неподвижной оси, запишите соответствующие уравнения.
4. Чему равен кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения?

5. Что такое момент инерции твердого тела относительно оси? Что такое радиус инерции?
6. Сформулируйте теорему о моментах инерции относительно параллельных осей.
7. Запишите дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Таблица Д3

Номер условия	b, м	$s = F(t)$, м	M, Нм
0	R	$-0{,}4\,t^2$	6
1	$R/2$	$-0{,}6\,t^2$	$4\,t$
2	R	$-0{,}8\,t^2$	-6
3	$R/2$	$10\,t$	$-8\,t$
4	R	$0{,}4\,t^3$	10
5	$R/2$	$-0{,}5\,t$	$-9\,t^2$
6	R	$-0{,}6\,t$	8
7	$R/2$	$0{,}8\,t$	$6\,t^2$
8	R	$0{,}4\,t^3$	$-10\,t$
9	$R/2$	$0{,}5\,t^2$	$12\,t^2$

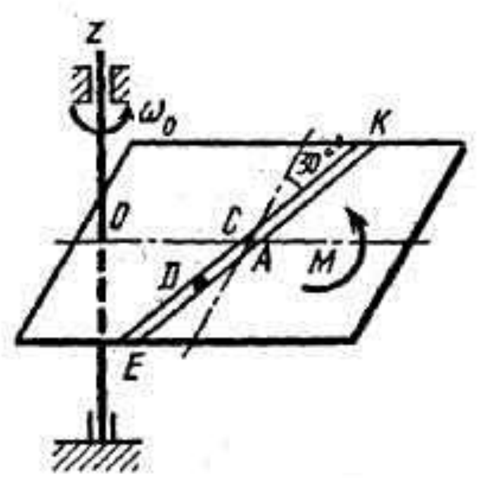


Рис. Д3.0

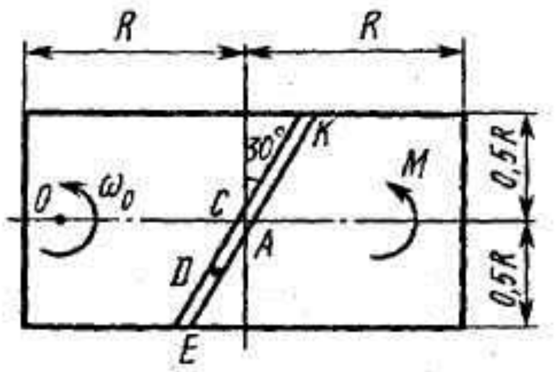


Рис. Д3.0а

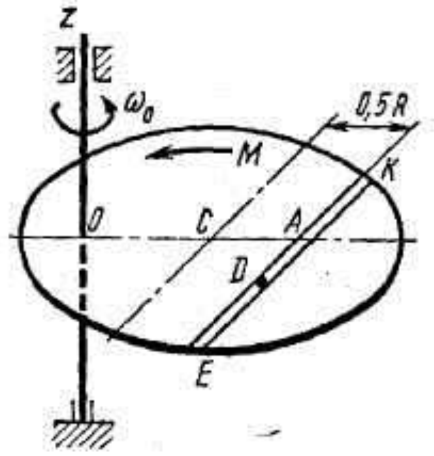


Рис. Д3.1

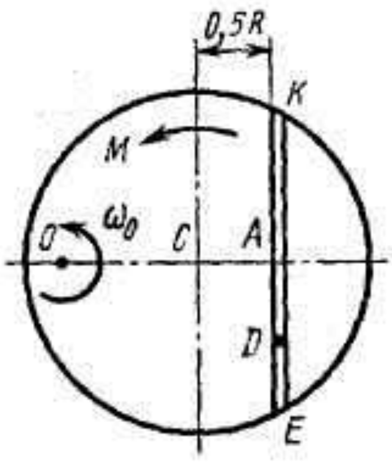


Рис. Д3.1а

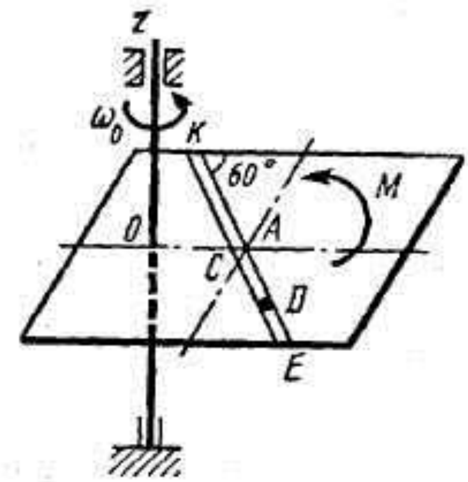


Рис. Д3.2

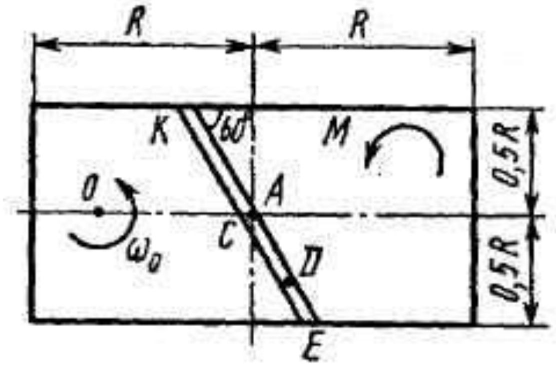


Рис. Д3.2а

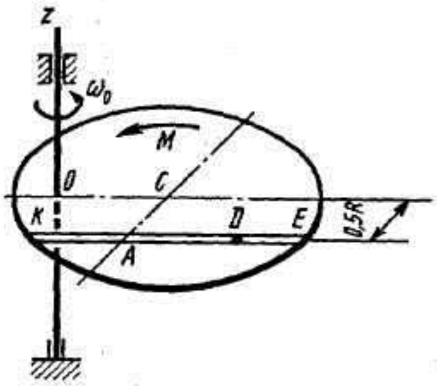


Рис. Д3.3

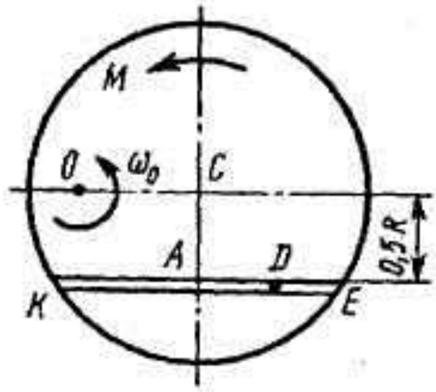


Рис. Д3.3а

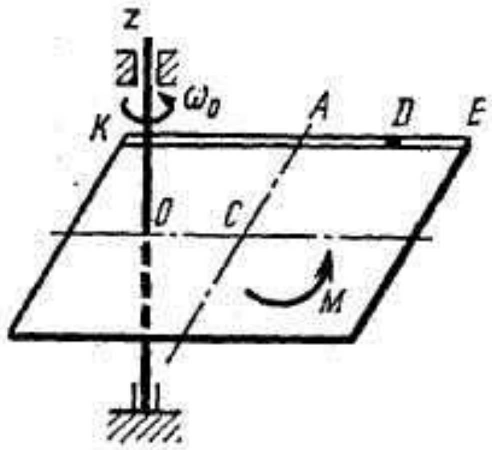


Рис. Д3.4

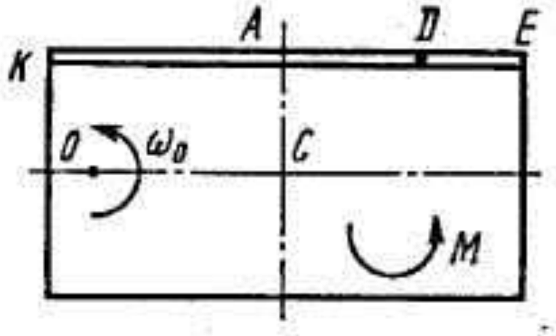


Рис. Д3.4а

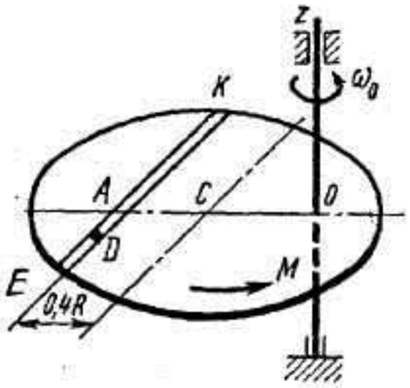


Рис. Д3.5

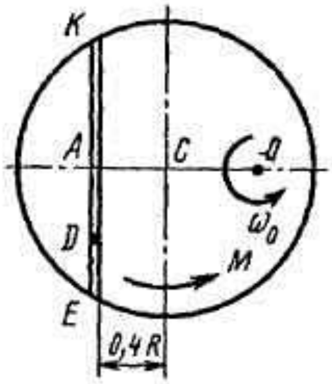


Рис. Д3.5а

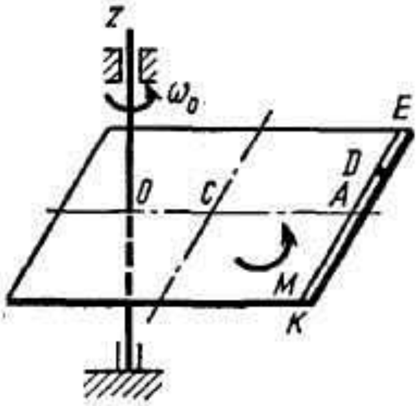


Рис. Д3.6

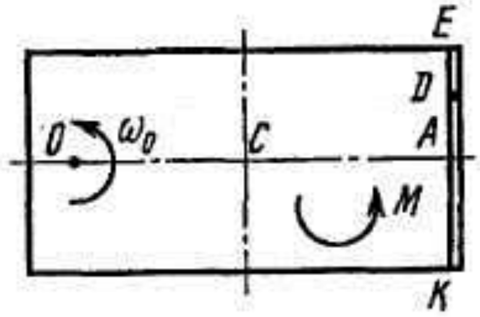


Рис. Д3.6а

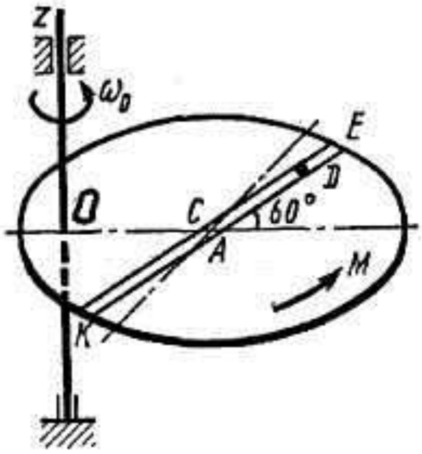


Рис. Д3.7

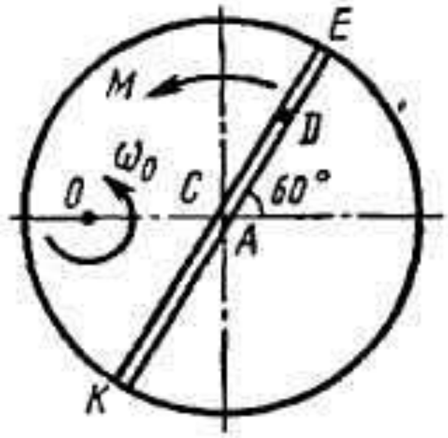


Рис. Д3.7а

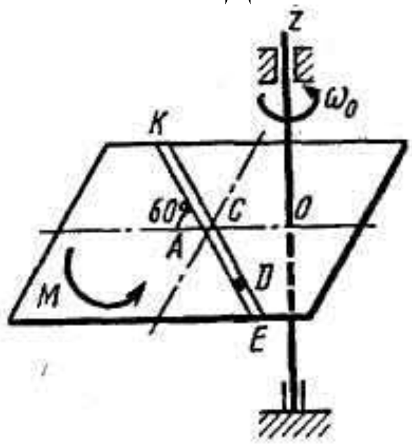


Рис. Д3.8

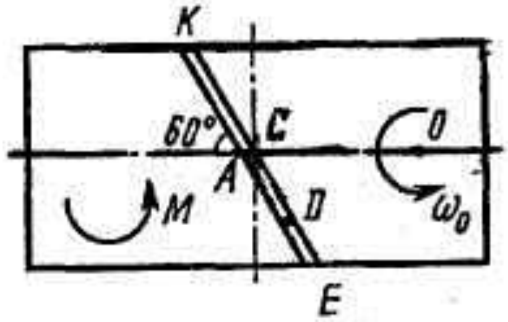


Рис. Д3.8а

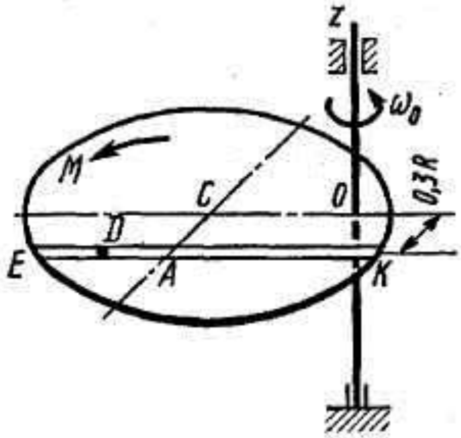


Рис. Д3.9

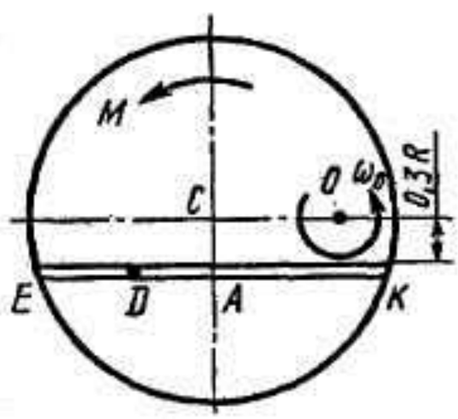


Рис. Д3.9а

Теорема об изменении кинетического момента механической системы
(краткие сведения из теории)

Основные понятия

Количество движения (импульс) точки – это вектор, равный $m\overline{V}$, где m – масса точки, $\overline{V}$ – абсолютная скорость точки.

Момент количества движения точки относительно какой-либо оси z $m_z(m\overline{V})$ определяется так же, как момент силы относительно оси z $m_z(\overline{F})$; в частности, $m_z(m\overline{V}) = 0$ если вектор $\overline{V}$ параллелен z или прямая, на которой расположен вектор $\overline{V}$, пересекает ось z.

Кинетический момент системы K_z относительно какой-либо оси z равен (алгебраической) сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси:

$$K_z = \sum m_z(m_k \overline{V}_k).$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно (неподвижной) оси вращения z равен

$$K_z = J_z \omega, \tag{1}$$

где ω – угловая скорость тела,

$$J_z = \sum m_k h_k^2 \; –$$

– *момент инерции* тела относительно оси z; здесь m_k – масса точки тела, h_k – расстояние от этой точки до оси z.

Момент инерции тела зависит от формы тела и положения оси z. Значения J_z для однородных тел простой формы (кольцо, стержень, диск, прямоугольник, цилиндр и т. д.) приводятся в справочниках по механике; значения J_z, необходимые для решения данной задачи, приведены ниже в указаниях к решению.

Если задан радиус инерции ρ тела, то $J_z = M\rho^2$, где M – масса тела.

Теорема Гюйгенса (теорема о моментах инерции относительно параллельных осей): $J_{Az} = J_{Cz} + Md^2$; где J_{Cz} – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, J_{Az} – момент инерции тела относительно оси Az, параллельной оси Cz, M – масса тела, d – расстояние между осями Az и Cz.

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси

Формулировка: производная по времени от кинетического момента системы относительно *неподвижной* оси z равна (алгебраической) сумме моментов *внешних* сил относительно этой оси; математическая запись:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e). \tag{2}$$

Частный случай (закон сохранения K_z)

Если внешние силы таковы, что $\sum m_z(\overline{F}_k^e) = 0$, то $K_z = const$, то есть $K_z(t) = K_z(0)$.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела

Для вращающегося твердого тела, подставляя (1) в (2) и учитывая, что $J_z = const$, найдем

$$J_z \varepsilon = \sum m_z(\overline{F}_k^e) \ -$$

– *дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела*; здесь $\varepsilon = \dot{\omega}$ – угловое ускорение тела.

Указания. Задача Д3 – на применение теоремы об изменении кинетического момента системы. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент K_z системы относительно оси z определяется как алгебраическая сумма кинетического момента платформы и момента количества движения груза. При этом следует учесть, что количество движения груза равно произведению его массы на абсолютную скорость $\overline{V}_{\text{абс}}$, которая складывается из относительной $\overline{V}_{\text{отн}}$ и переносной $\overline{V}_{\text{пер}}$ скоростей, т.е. $\overline{V}_{\text{абс}} = \overline{V}_{\text{отн}} + \overline{V}_{\text{пер}}$. Поэтому и количество движения этого груза $m\overline{V}_{\text{абс}}$ равно $m\overline{V}_{\text{абс}} = m\overline{V}_{\text{отн}} + m\overline{V}_{\text{пер}}$. Тогда для вычисления момента количества движения груза D $m_z(m\overline{V}_{\text{абс}})$ можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика): $m_z(m\overline{V}_{\text{абс}}) = m_z(m\overline{V}_{\text{отн}}) + m_z(m\overline{V}_{\text{пер}})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил. Подробнее ход решения разъяснен в примере Д3.

При решении задачи полезно изобразить на вспомогательном чертеже вид платформы сверху (с конца оси z), как это сделано на рис. Д3.0а-Д3.9а.

Момент инерции однородной пластины массы m относительно оси Cz, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс C, равен:

для прямоугольной пластины со сторонами a_1 и a_2 $\qquad J_{Cz} = \dfrac{m\left(a_1^2 + a_2^2\right)}{12}$;

для круглой пластины радиуса R $\qquad J_{Cz} = \dfrac{mR^2}{2}$.

Пример Д3. Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами $2l$ и l), имеющая массу m_1, жестко скреплена с вертикальным валом и вращается вместе с ним вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 (рис. Д3а). В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать пара сил с вращающим моментом $M = -kt$ (на рис. Д3 отрицательный знак M уже учтен в показанных противоположных направлениях M и ω_0); одновременно груз D массой m_2, находящийся в желобе AB в точке C, начинает двигаться по желобу (под действием внутренних сил) по закону $s = CD = F(t)$.

Дано: m_1 = 16 кг, m_2 = 10 кг, l = 0,5м, $\omega_0 = 2$ с$^{-1}$, $s = 0{,}4\,t^2$ (s – в метрах, t – в секундах), $k = 6$ Н$\cdot$м/с.

Определить: $\omega = f(t)$ – закон изменения угловой скорости платформы.

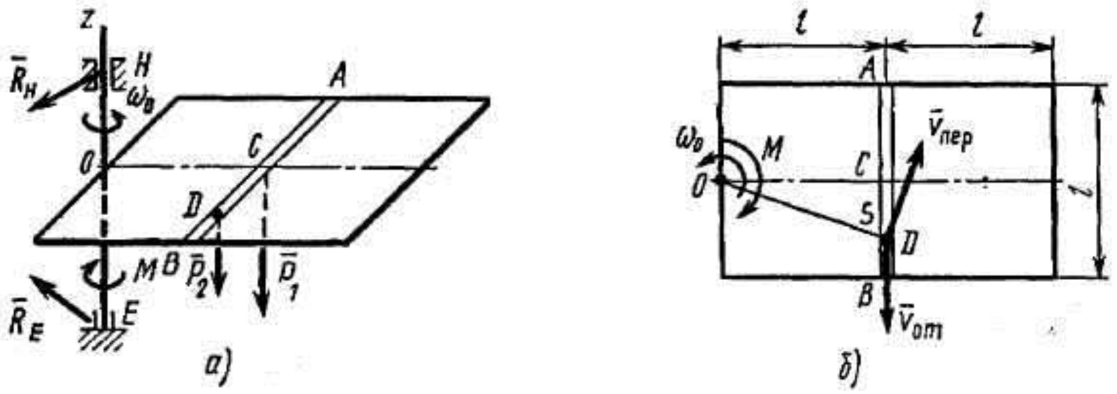


Рис. Д3

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза D. Для определения угловой скорости ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2$, реакции подпятника $\bar{R}_E$, подшипника $\bar{R}_H$ и вращающий момент M. Так как силы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ параллельны оси z, а реакции $\bar{R}_E$ и $\bar{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси z равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0 (т.е. против хода часовой стрелки), получаем

$$\sum m_z(\bar{F}_k^e) = M = -kt,$$

и уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt. \qquad (2)$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, получим

$$K_z = -\frac{kt^2}{2} + C_1. \qquad (3)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{\text{пл}} + K_z^D, \qquad (4)$$

где $K_z^{\text{пл}}$ и K_z^D – кинетические моменты относительно оси *z* платформы и груза *D* соответственно.

Поскольку платформа вращается вокруг оси *z*, то ее кинетический момент равен произведению момента инерции относительно оси *z* на угловую скорость:

$$K_z^{\text{пл}} = J_z \omega. \qquad (5)$$

Значение момента инерции платформы относительно оси *z* найдем по теореме Гюйгенса:

$$J_z = J_{Cz} + m_1 \cdot (OC)^2 = J_{Cz} + m_1 l^2, \qquad (6)$$

где J_{Cz} – момент инерции платформы относительно оси *Cz*, параллельной оси z и проходящей через центр масс платформы C.

Момент инерции J_{Cz} относительно оси, проходящей через центр масс платформы перпендикулярно ее плоскости, равен:

$$J_{Cz} = m_1[(2l)^2 + l^2]/12 = 5m_1 l^2/12.$$

Тогда

$$J_z = 5\, m_1 l^2/12 + m_1 l^2 = 17 m_1 l^2/12.$$

Следовательно,

$$K_z^{\text{пл}} = (17 m_1 l^2/12)\,\omega. \qquad (7)$$

Для определения K_z^D обратимся к рис. Д3б и рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным движением, а вращение самой платформы вокруг оси z – переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза $\overline{V}_D = \overline{V}_{\text{отн}} + \overline{V}_{\text{пер}}$, и по теореме Вариньона,

$$K_z^D = m_z(m_2 \overline{V}_{\text{отн}}) + m_z(m_2 \overline{V}_{\text{пер}}). \qquad (8)$$

Так как груз D движется по закону $s = CD = 0{,}4t^2$, то

$$\upsilon_{\text{отн}} = \dot{s} = 0{,}8t.$$

Изображаем вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$ на рис. Д3б с учетом знака $\dot{s}$ (при $\dot{s} < 0$ направление $\overline{V}_{\text{отн}}$ было бы противоположным).

Затем, учитывая направление угловой скорости ω, изображаем вектор переносной скорости $\overline{V}_{\text{пер}}$ $(\overline{V}_{\text{пер}} \perp OD)$. Модуль переносной скорости равен

$$V_{\text{пер}} = \omega \cdot OD.$$

Тогда равенство (8) примет вид:

$$K_z^D = -m_2 V_{\text{отн}} \cdot OC + m_2 V_{\text{пер}} \cdot OD = -m_2 \cdot 0{,}8t \cdot l + m_2\,\omega (OD)^2. \qquad (9)$$

Но на рис. Д3б видно, что

$$OD^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0{,}16t^4,$$

тогда

$$K_z^D = -\,m_2 \cdot 0{,}8t \cdot l + m_2\,\omega(l^2 + 0{,}16t^4). \qquad (10)$$

Подставляя $K_z^{\text{пл}}$ и K_z^D из (7) и (10) в равенство (4), получим с учетом данных задачи:

$$K_z = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega + m_2\,\omega(l^2 + 0{,}16t^4) - m_2 \cdot 0{,}8t \cdot l = (8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t. \qquad (11)$$

Тогда уравнение (3), где $k = 6$, принимает вид

$$(8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t = -3t^2 + C_1. \qquad (12)$$

Постоянную интегрирования определяем из начального условия: при $t = 0$ $\omega = \omega_0 = 2$ с$^{-1}$, откуда получаем

$$C_1 = (8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega_0 = 16{,}34.$$

При этом значении C_1 из уравнения (12) находим искомую зависимость ω от *t*.

Ответ:

$$\omega = \frac{16{,}34 + 4t - 3t^2}{8{,}17 + 1{,}6t^4},$$

где t – в секундах, ω – в с$^{-1}$.

Задача Д4
(тема: “Теорема об изменении кинетической энергии системы”)

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 = 0,3 м, r_3 = 0,1 м и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0{,}2$ м, блока 4 радиуса R_4 = 0,2 м и катка (или подвижного блока) 5 (рис. Д4.0-Д4.9, табл. Д4); тело 5 считать сплошным однородным цилиндром (диском), массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c. Массами пружины и нитей пренебречь.

Под действием силы $F = F(s)$, зависящей от перемещения s точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении системы на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s точки приложения силы $\overline{F}$ станет равным $s_1 = 0{,}2$ м. Искомая величина указана в столбце "Найти" таблицы, где обозначено: υ_1, υ_2, υ_{C5} – скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, считая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 5 на рис. 2), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Теорема об изменении кинетической энергии системы».

Ответьте на вопросы:

1. Что такое кинетическая энергия точки и системы?
2. Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при поступательном, вращательном и плоском движениях.
3. Формулы для вычисления работы силы на бесконечно малом перемещении точки приложения силы (элементарная работа силы; различные формы записи).
4. В каких случаях работа силы равна нулю? Поясните, используя любую формулу для вычисления элементарной работы силы.
5. Вычисление работы силы на конечном перемещении точки приложения силы или за конечное время (полная работа).
6. Формулы для вычисления работы:
   а) силы тяжести,
   б) упругой силы,
   в) пары сил (момента).
7. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии системы в любой форме и запишите соответствующее уравнение.

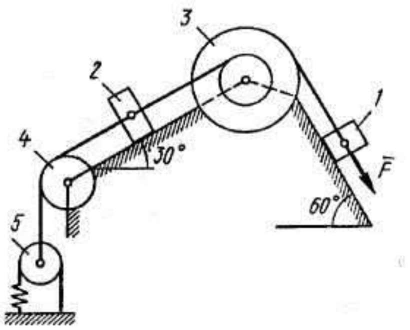


Рис. Д4.0

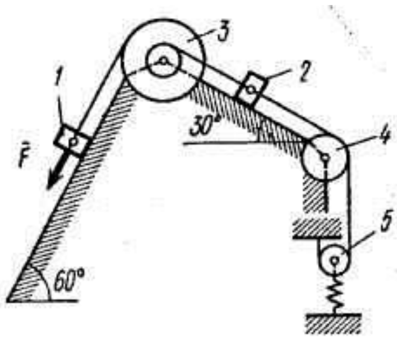


Рис. Д4.1

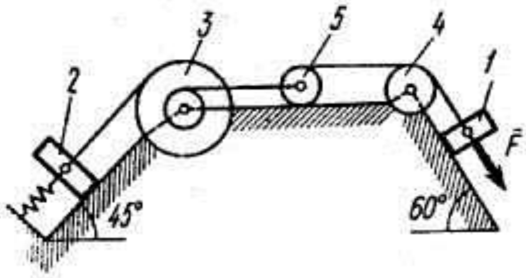


Рис. Д4.2

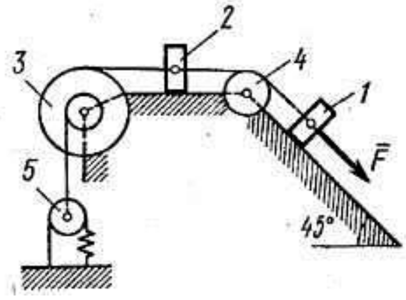


Рис. Д4.3

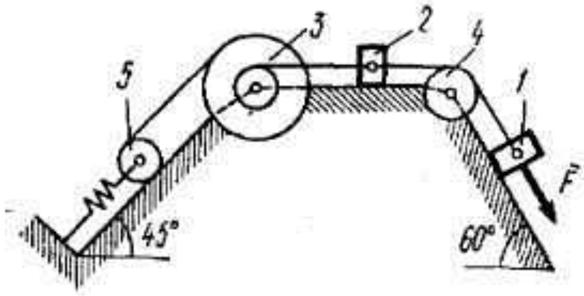


Рис. Д4.4

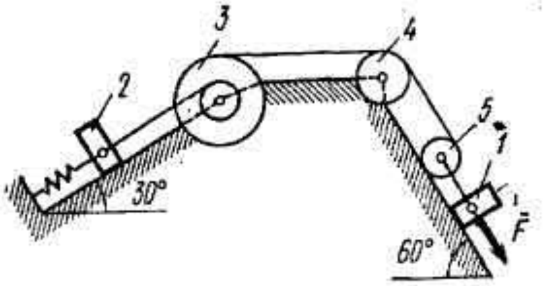


Рис. Д4.5

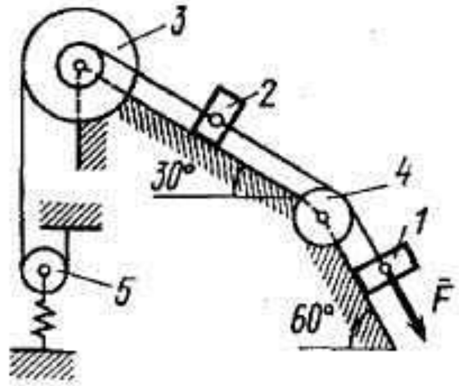


Рис. Д4.6

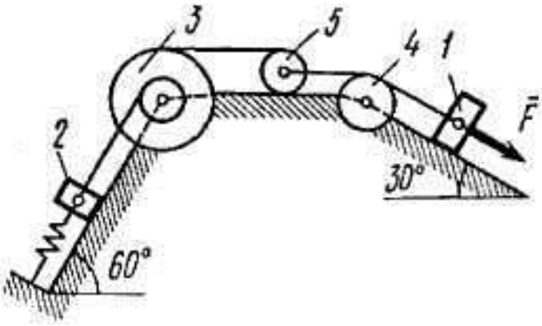


Рис. Д4.7

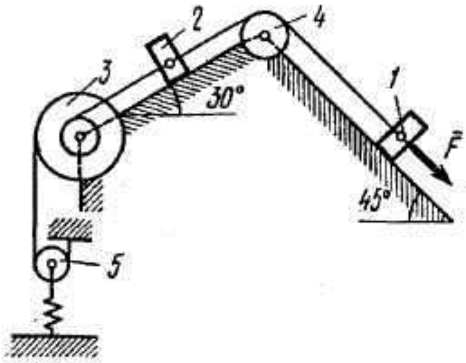


Рис. Д4.8

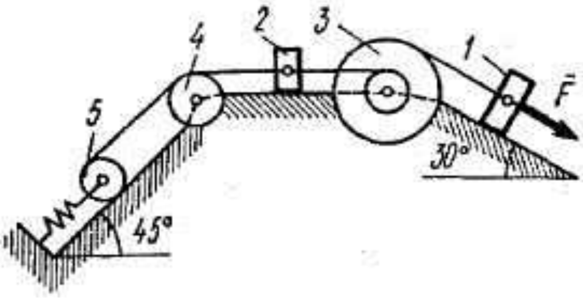


Рис. Д4.9

Таблица Д4

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н / м	M, Н·м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80(4+5s)	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	50(8+3s)	υ_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60(6+5s)	υ_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80(5+6s)	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40(9+4s)	υ_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	50(7+8s)	υ_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	40(8+9s)	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	60(8+5s)	υ_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50(9+2s)	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80(6+7s)	υ_{C5}

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы (краткие сведения из теории)

Кинетическая энергия. Кинетической энергией точки называется величина $\dfrac{mV^2}{2}$, где m – масса точки, $\bar{V}$ – абсолютная скорость точки. Кинетическая энергия механической системы

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}, \qquad (1)$$

где m_k – масса точки системы, $\bar{V}_k$ – абсолютная скорость этой точки.

Для твердого тела из (1) следует, что

при поступательном движении твердого тела

$$T = \frac{MV^2}{2},$$

где M – масса тела, $\bar{V}$ – скорость тела;

при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость тела;

при плоском движении тела

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{J_{Cz}\omega^2}{2},$$

где M – масса тела, $\bar{V}_C$ – скорость центра масс тела, J_{Cz} – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс C тела, перпендикулярно плоскости сечения, ω – угловая скорость тела.

Момент инерции тела относительно оси *z* – это величина

$$J_z = \sum m_k h_k^2 ,$$

где m_k – масса точки тела, h_k – расстояние от этой точки до оси *z*.

Момент инерции тела зависит от формы тела и положения оси *z*. Значения J_z для однородных тел простой формы (кольцо, стержень, диск, прямоугольник, цилиндр и т. д.) приводятся в справочниках по механике; значения J_z, необходимые для решения данной задачи, приведены ниже в указаниях к решению.

Если задан радиус инерции ρ тела, то $J_z = M\rho^2$, где *M* – масса тела.

Элементарная работа силы *dA* на бесконечно малом перемещении *ds* точки, в которой приложена сила, равна

$$dA = F\ ds \cos(\overline{F} \,\widehat{,}\, \overline{V}) , \tag{2}$$

где $\overline{F}$ – сила, *ds* – модуль бесконечно малого перемещения точки, $\overline{V}$ – скорость точки, в которой приложена сила (направление $d\overline{s}$ совпадает с направлением $\overline{V}$). Выражение (2) – одна из возможных форм записи dA. Например, если учесть, что $V = ds/dt$, то из (2) следует еще одна форма записи:

$$dA = F\ V\ \cos(\overline{F} \,\widehat{,}\, \overline{V})\, dt , \tag{3}$$

где *dt* – время бесконечно малого перемещения. Из (2) (или (3)) следует, что

$$dA = 0 \quad \text{если} \quad \overline{F} \perp \overline{V} ;$$

$$dA = 0 \quad \text{если} \quad \overline{V} = 0 ;$$

$$dA > 0 \quad \text{если} \quad (\overline{F} \,\widehat{,}\, \overline{V}) < \pi/2 ;$$

$$dA < 0 \quad \text{если} \quad (\overline{F} \,\widehat{,}\, \overline{V}) > \pi/2 .$$

Если сила приложена к точке вращающегося тела, то, применяя (2), получим

$$dA = M_z\ d\varphi, \tag{4}$$

где M_z – момент силы относительно оси вращения тела, $d\varphi$ – бесконечно малый угол поворота тела. Если на тело действует пара сил, то (4) дает элементарную работу пары сил, где M_z – момент пары сил относительно оси *z*.

Работа силы на конечном перемещении точки из M_0 в M_1

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F \cos(\overline{F} \,\widehat{,}\, \overline{V})\, ds . \tag{5}$$

Из (5) следуют выражения для работы силы в частных случаях.

Работа силы тяжести (постоянной):

$$A(\overline{P}) = \pm P\, h_C ,$$

где $P = mg$ – сила тяжести, h_C – перемещение центра масс тела по вертикали. Знак “–“ соответствует движению центра масс вверх.

Работа упругой силы пружины:

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = \frac{c\lambda_0^2}{2} - \frac{c\lambda^2}{2},$$

где c – жесткость пружины, λ_0 и λ – начальное и конечное удлинение (или сжатие) пружины.

Работа пары сил, приложенной к вращающемуся телу, при повороте тела на угол φ_1, равна

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z(\varphi)d\varphi,$$

где $M_z(\varphi)$ – момент пары сил относительно оси вращения. Если $M_z(\varphi) = M = const$, то

$$A = M\varphi_1.$$

Если пара сил препятствует вращению тела, то A<0.

Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Формулировка (в интегральной (конечной) форме): изменение кинетической энергии системы на некотором конечном перемещении системы из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к точкам системы на соответствующих конечных перемещениях точек приложения этих сил.

Математическая запись:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Если система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями или стержнями (*неизменяемая система*), то $\sum A_k^i = 0$.

Указания. Задача Д4 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении кинетической энергии катка 5, совершающего плоское движение, для установления зависимости между скоростями его точек или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (кинематика). При вычислении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение s_1, учитывая, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Последовательность действий при решении задачи см. в примере Д4.

Момент инерции шкива, блока или катка массы m относительно оси Cz, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс C, равен:

для сплошного однородного диска (цилиндра) радиуса R $\qquad J_{Cz} = \dfrac{mR^2}{2}$;

для блока, масса которого равномерно распределена по ободу радиуса R $\qquad J_{Cz} = mR^2$;

для ступенчатого шкива с радиусом инерции ρ $\qquad J_{Cz} = m\rho^2$.

Пример Д4. Механическая система (рис. Д4а) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 3. К центру E блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c, ее начальная деформация равна нулю; массами нити и пружины пренебречь.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 0$, $m_3 = 4$ кг, $m_4 = 0$, $m_5 = 10$ кг, $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м, $\rho_3 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}1$, $c = 240$ Н / м, $M = 0{,}6$ Н · м, $F = 20\,(3+2s)$ Н, $s_1 = 0{,}2$м.

Определить: угловую скорость ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$, где s_1 – перемещение центра масс катка 1.

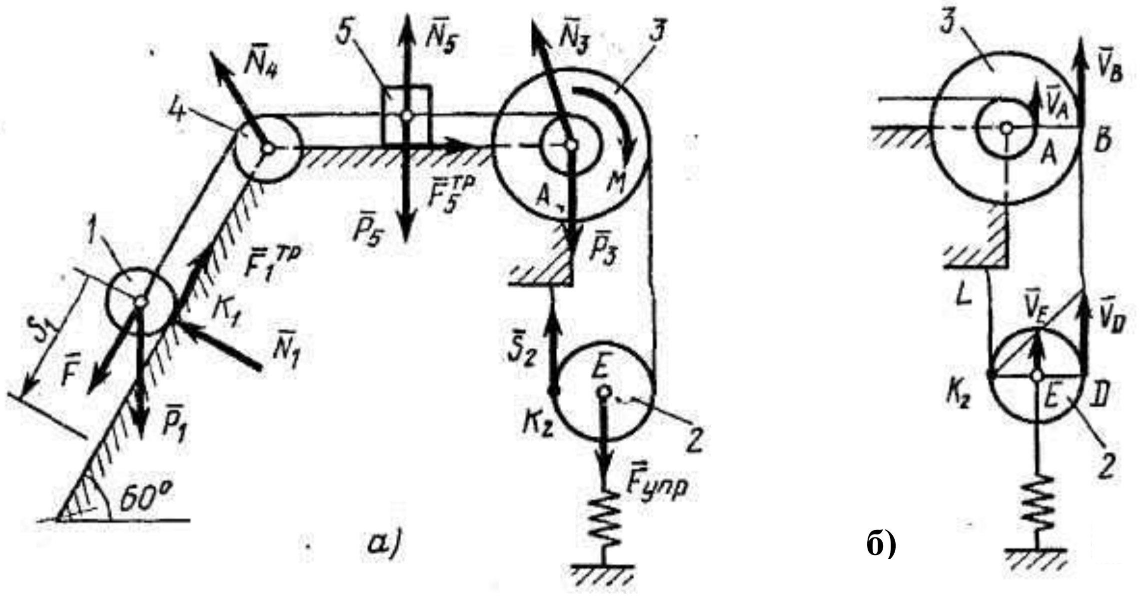


Рис. Д4

Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями (рис. Д4а).

Для определения искомой угловой скорости ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в интегральной (конечной) форме:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i\,, \tag{1}$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях, $\sum A_k^e$ и $\sum A_k^i$ – алгебраические суммы работ действующих на систему внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального положения в конечное.

Сразу отметим в (1) равные нулю слагаемые. В начальный момент система находилась в покое, поэтому начальная кинетическая энергия равна нулю (T_0=0). Далее, так как система является неизменяемой, то $\sum A_k^i = 0$. Поэтому на рисунке изображены только **внешние** силы, действующие на тела системы, а внутренние силы не показаны.

2. Определяем кинетическую энергию системы T в конечном положении (левая часть уравнения (1)). Величина T равна сумме кинетических энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5\,. \tag{2}$$

Так как по условию задачи массы тел 2 и 4 равны нулю, эти тела не обладают кинетической энергией, однако для общности изложения мы проведем здесь вычисление кинетической энергии этих тел (но при решении своей задачи следует сразу полагать кинетическую энергию тел, массами которых пренебрегаем, равной нулю).

<u>Кинетическая энергия катка 1</u>, совершающего плоское (сложное) движение, равна

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1\, \upsilon_{C1}^2 + \frac{1}{2} J_{C1z}\, \omega_1^2, \tag{3}$$

где m_1 – масса катка 1,

υ_{C1} – скорость его центра масс C_1,

ω_1 – угловая скорость катка 1,

J_{C1z} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости катка. Так как каток 1 является однородным цилиндром, то

$$J_{C1z} = \frac{m_1\, r_1^2}{2}\,. \tag{4}$$

<u>Кинетическая энергия блока 4</u>, совершающего вращательное движение,

равна

$$T_4 = \frac{1}{2} J_{z4}\, \omega_4^2, \tag{5}$$

где ω_4 – угловая скорость блока 4,

J_{z4} – момент инерции блока относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости блока. Если блок 4 является однородным диском, то $J_{z4} = (m_4 r_4^2)/2$. Так как $m_4 = 0$, то $J_{z4} = 0$ и, следовательно, $T_4 = 0$.

Кинетическая энергия груза 5, совершающего поступательное движение, равна

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5\, \upsilon_5^2, \tag{6}$$

где m_5 – масса груза 5, υ_5 – его скорость.

Кинетическая энергия блока 3, совершающего вращательное движение, равна

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{z3}\, \omega_3^2, \tag{7}$$

где ω_3 – угловая скорость блока 3,

J_{z3} – момент инерции блока относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости блока. Так как блок 3 является ступенчатым, и для него заданы масса m_3 и радиус инерции ρ_3, то его момент инерции J_{z3} вычисляется по формуле:

$$J_{z3} = m_3\, \rho_3^2. \tag{8}$$

Кинетическая энергия подвижного блока 2, совершающего плоское (сложное) движение, равна

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2\, \upsilon_E^2 + \frac{1}{2} J_{Ez}\, \omega_2^2, \tag{9}$$

где m_2 – масса подвижного блока 2,

υ_E – скорость его центра масс E,

ω_2 – угловая скорость подвижного блока 2,

J_{Ez} – момент инерции блока относительно оси, проходящей через его центр масс E перпендикулярно плоскости блока. Если блок 2 является однородным диском, то $J_{Ez} = (m_2 r_2^2)/2$. Так как $m_2 = 0$, то $J_{Ez} = 0$ и, следовательно, $T_2 = 0$.

Таким образом, с учетом выражений (3)-(9) кинетическую энергию системы можно записать в виде:

$$T=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{C1}^2+\frac{m_1 r_1^2}{4}\omega_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_E^2+\frac{m_2 r_2^2}{4}\omega_2^2+ \\ +\frac{1}{2}m_3\rho_3^2\omega_3^2+\frac{m_4 r_4^2}{4}\omega_4^2+\frac{1}{2}m_5\upsilon_5^2. \qquad (10)$$

3. Выполняем кинематический расчет системы, т.е. выражаем все входящие в (10) линейные и угловые скорости (υ_{C1}, ω_1, υ_E, ω_2, ω_4, υ_5) через искомую угловую скорость ω_3.

Каток 1 катится без скольжения по наклонной неподвижной плоскости, следовательно, абсолютная скорость точки K_1 касания катка с плоскостью равна нулю. Поэтому точка K_1 является мгновенным центром скоростей катка 1, откуда следует:

$$\upsilon_{C1}=\omega_1\cdot K_1C_1=\omega_1 r_1. \qquad (11)$$

Первая нить, перекинутая через блок 4, соединяет центр катка C_1 с грузом 5. Принимая во внимание, что нить нерастяжима и не скользит по блоку 4, получим

$$\upsilon_{C1}=\omega_4 r_4=\upsilon_5. \qquad (12)$$

Вторая нить одним концом привязана к грузу 5, а другой ее конец намотан на малый барабан радиуса r_3 ступенчатого блока 3, поэтому

$$\upsilon_5=\omega_3 r_3. \qquad (13)$$

Из сравнения выражений (11)-(13) получаем:

$$\upsilon_{C1}=\omega_3 r_3=\upsilon_5; \quad \omega_1=\omega_3\frac{r_3}{r_1}; \quad \omega_4=\omega_3\frac{r_3}{r_4}. \qquad (14)$$

Третья нить одним концом привязана к неподвижной точке L, а другой ее конец, огибая подвижный блок 2, намотан на большой барабан радиуса R_3 ступенчатого блока 3 (см. рис. Д4б). Участок нити BD не скользит по блокам 2 и 3, поэтому

$$\upsilon_D=\upsilon_B=\omega_3 R_3. \qquad (15)$$

Подвижный блок 2 совершает плоское движение. Точка K_2, в которой с блока 2 сходит неподвижный участок нити LK_2, является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы катится по участку нити LK_2). Отсюда следует:

$$\upsilon_D=\omega_2\cdot K_2D=\omega_2\cdot 2r_2, \qquad \upsilon_E=\omega_2\cdot K_2E=\omega_2 r_2. \qquad (16)$$

Из сравнения выражений (15) и (16) получаем:

$$\omega_2 = \omega_3 \frac{R_3}{2r_2}; \quad \upsilon_E = \omega_3 \frac{R_3}{2}. \tag{17}$$

Подставив результаты кинематического расчета (14) и (17) в выражение для кинетической энергии (10), с учетом невесомости блоков 2 и 4 получаем окончательно:

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \tag{18}$$

4. Вычисление работ сил. Укажем на рисунке все внешние силы (активные и реакции связей), действующие на точки системы (последовательно по рисунку рассматривая тела системы, начиная с катка 1): $\overline{F}$, $\overline{P}_1$, $\overline{F}_1^{\text{тр}}$, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_4$, $\overline{P}_5$, $\overline{F}_5^{\text{тр}}$, $\overline{N}_5$, $\overline{P}_3$, M, $\overline{N}_3$, $\overline{F}_{\text{упр}}$, $\overline{S}_2$. Здесь учтено, что $P_2 = P_4 = 0$. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда центр C_1 катка 1 пройдет путь s_1.

$$\sum A_k^e = A(\overline{F}) + A(\overline{P}_1) + A(\overline{F}_1^{\text{тр}}) + A(\overline{N}_1) + A(\overline{N}_4) + A(\overline{P}_5) +$$
$$+ A(\overline{F}_5^{\text{тр}}) + A(\overline{N}_5) + A(\overline{P}_3) + A(M) + A(\overline{N}_3) + A(\overline{F}_{\text{упр}}) + A(\overline{S}_2).$$

Отметим в этом выражении равные нулю слагаемые (последовательно по рисунку рассматривая тела системы, начиная с катка 1).

Каток 1.

$A(\overline{F}_1^{\text{тр}}) = A(\overline{N}_1) = 0$, так как скорость точки K_1 приложения этих сил равна нулю (качение без скольжения). Следует отметить, что модуль силы трения $\overline{F}_1^{\text{тр}}$ **не равен** произведению коэффициента трения на нормальную реакцию. При качении без скольжения сила трения должна лишь удовлетворять неравенству $\left|\overline{F}_1^{\text{тр}}\right| \le f \left|\overline{N}_1\right|$ (определение силы трения при качении рассмотрено в задаче Д5). Работы $A(\overline{F})$ и $A(\overline{P}_1)$ будут вычислены ниже.

Блок 4.

$A(\overline{N}_4) = 0$, так как реакция $\overline{N}_4$ приложена к точке, лежащей на неподвижной оси блока 4.

Груз 5.

$A(\overline{P}_5) = A(\overline{N}_5) = 0$, так как силы перпендикулярны скоростям точек, в которых они приложены. Работа $A(\overline{F}_5^{\text{тр}})$ будет вычислена ниже.

Шкив 3.

$A(\overline{P}_3) = A(\overline{N}_3) = 0$, так как силы приложены к точке, лежащей на неподвижной оси блока 3. Работа $A(M)$ будет вычислена ниже.

Подвижный блок 2.

$A(\overline{S}_2)=0$, так как скорость точки K_2 приложения реакция $\overline{S}_2$ равна нулю (блок 2 катится без скольжения по неподвижной части нити, подобно тому, как каток 1 катится по неподвижной плоскости). Работа $A(\overline{F}_{\text{упр}})$ будет вычислена ниже.

Таким образом, сумма работ всех действующих внешних сил

$$\sum A_k^e = A(\overline{F})+A(\overline{P}_1)+A(\overline{F}_5^{\text{тр}})+A(M)+A(\overline{F}_{\text{упр}}).$$

Вычислим каждое из этих слагаемых (последовательно по рисунку рассматривая тела системы, начиная с катка 1).

Каток 1.

Вычислим $A(\overline{F})$. Так как сила $\overline{F}$ зависит от переменной s, то работа силы $\overline{F}$ на конечном перемещении определяется выражением:

$$A(\overline{F})=\int_0^{s_1} F(s)\cos(\overline{F}\,\hat{,}\,\overline{\upsilon}_{C1})\,ds.$$

Сила $\overline{F}$ совпадает по направлению со скоростью $\overline{\upsilon}_{C1}$ центра катка 1, $\cos(\overline{F}\,\hat{,}\,\overline{\upsilon}_{C1})=1$, тогда

$$A(\overline{F})=\int_0^{s_1} 20(3+2s)\,ds=20(3s_1+s_1^2). \tag{19}$$

Вычислим $A(\overline{P}_1)$. Сила тяжести $\overline{P}_1$ постоянна и образует со скоростью $\overline{\upsilon}_{C1}$ угол 30°. Работа силы $\overline{P}_1$:

$$A(\overline{P}_1)=P_1\,s_1\cos 30^\circ=P_1\,s_1\sin 60^\circ \tag{20}$$

Груз 5.

Вычислим работу $A(\overline{F}_5^{\text{тр}})$. Сначала найдем величину $F_5^{\text{тр}}$ силы трения. Она определяется аналогично тому, как это было сделано в задаче Д1. Выделим из системы груз 5. На него действуют силы: $\overline{P}_5$, $\overline{F}_5^{\text{тр}}$, $\overline{N}_5$, $\overline{Q}_5$, где $\overline{Q}_5$ – суммарная реакция левой и правой частей нити. Уравнение движения груза 5 имеет вид:

$$m_5\,\overline{a}_5=\overline{P}_5+\overline{F}_5^{\text{тр}}+\overline{N}_5+\overline{Q}_5,$$

где $\overline{a}_5$ – ускорение груза 5, совпадающее по направлению с его скоростью $\overline{\upsilon}_5$. Спроектируем это уравнение на ось y, перпендикулярную направлению движения груза 5 (см. рис. Д1 и пример решения задачи Д1):

$$m_5\,a_{5y}=N_5-P_5\ ,$$

Так как $a_{5y}=0$, то $N_5=P_5$ и $F_5^{\text{тр}}=f\,N_5=f\,P_5$. В случае движения груза по наклонной плоскости следует ось y выбрать перпендикулярно плоскости движения груза. Сила трения $\overline{F}_5^{\text{тр}}$ направлена противоположно скорости груза $\overline{\upsilon}_5$, $\cos(\overline{F}_5^{\text{тр}} \widehat{,} \overline{\upsilon}_5) = -1$, поэтому работа силы трения отрицательна:

$$A(\overline{F}_5^{\text{тр}}) = -F_5^{\text{тр}} s_5 = -f P_5 s_5 \quad . \tag{21}$$

<u>Шкив 3.</u>

Вычислим работу $A(M)$. Момент сопротивления M направлен противоположно направлению вращения блока, поэтому его работа отрицательна:

$$A(M) = -M \varphi_3 . \tag{22}$$

<u>Подвижный блок 2.</u>

Вычислим работу $A(\overline{F}_{\text{упр}})$. Работа силы упругости пружины $\overline{F}_{\text{упр}}$ равна:

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2),$$

где c – жесткость пружины, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины.

По условию задачи начальная деформация пружины отсутствует, $\lambda_0 = 0$. Конечное удлинение пружины равно перемещению s_E конца пружины E, совпадающего с центром блока 2, тогда:

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = -\frac{c}{2} s_E^2 , \tag{23}$$

Таким образом, сумма работ внешних сил, действующих на точки системы, равна:

$$\sum A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_5 - M \varphi_3 - \frac{c}{2} s_E^2 \tag{24}$$

5. Так как зависимость между линейными и угловыми перемещениями такая же, как между соответствующими скоростями, с помощью результатов кинематического расчета (14) и (17) выразим входящие в выражение (24) перемещения s_5, s_E и угол поворота φ_3 через перемещение s_1:

$$\upsilon_5 = \upsilon_{C1} \quad \Rightarrow \quad s_5 = s_1 ;$$

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_{C1}}{r_3} \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = \frac{s_1}{r_3} ;$$

$$\upsilon_E = \omega_3 \frac{R_3}{2} = \frac{\upsilon_{C1}}{r_3} \cdot \frac{R_3}{2} \quad \Rightarrow \quad s_E = \varphi_3 \frac{R_3}{2} = \frac{s_1}{2} \cdot \frac{R_3}{r_3} .$$

Подставляя эти соотношения в (24), выразим сумму работ внешних сил через заданное перемещение s_1 тела 1:

$$\sum A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f\,P_5\,s_1 - M\,\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\cdot\frac{R_3^2}{r_3^2}\cdot s_1^2. \qquad (25)$$

5. Подставив выражения кинетической энергии (18) и и суммы работ внешних сил (25) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$ и $\sum A_k^i = 0$, приходим к равенству:

$$\left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 =$$

$$= 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f\,P_5\,s_1 - M\,\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\cdot\frac{R_3^2}{r_3^2}\cdot s_1^2.$$

Подставляя в это равенство числовые значения, которые имеют заданные величины, находим искомую угловую скорость ω_3.

Ответ: $\omega_3 = 8{,}1$ с$^{-1}$.

Задача Д5
(тема: “Динамика плоскопараллельного движения твердого тела”)

Барабан радиуса R весом P имеет выточку (как у катушки) радиуса $r = 0{,}6R$ (рис. Д5.0-Д5.9, табл. Д5). К концам намотанных на барабан нитей приложены постоянные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, направления которых определяются углом β; кроме сил на барабан действует пара с моментом M; когда в таблице $M < 0$, направление момента противоположно показанному на рисунке. При движении, начинающемся из состояния покоя, барабан катится без скольжения по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α так, как показано на рисунках.

Пренебрегая сопротивлением качению, определить закон движения центра масс C барабана, т.е. $x_C = f(t)$, и наименьшее значение коэффициента трения f о плоскость, при котором возможно качение без скольжения. Барабан рассматривать как сплошной однородный цилиндр радиуса R.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела».

Ответьте на вопросы:

1. Запишите дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
2. В каком случае дифференциальное уравнение вращательного движения вокруг подвижной оси имеет тот же вид, что и уравнение вращательного движения относительно неподвижной оси?
3. На какие простые движения и как раскладывается плоскопараллельное движение тела (кинематика)?
4. Запишите дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.
5. Какое соотношение связывает угловую скорость катящегося тела и скорость его центра масс при качении без скольжения?
6. В каких пределах может изменяться сила трения при качении тела?

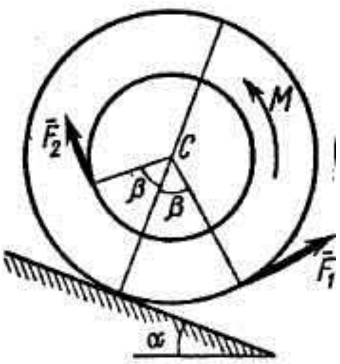


Рис. Д5.0

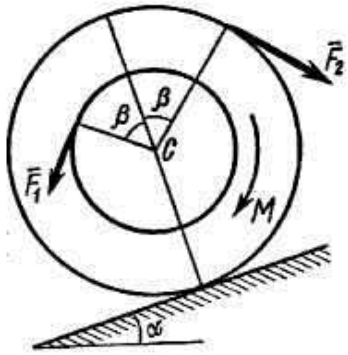


Рис. Д5.1

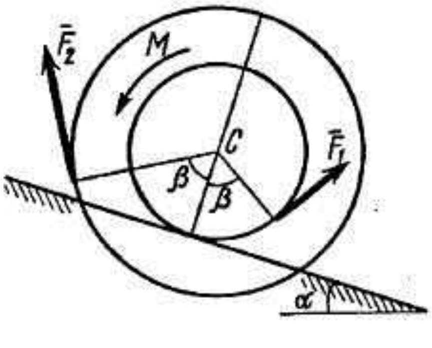


Рис. Д5.2

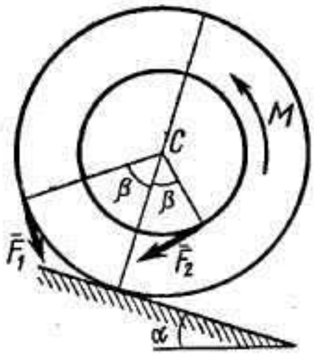


Рис. Д5.3

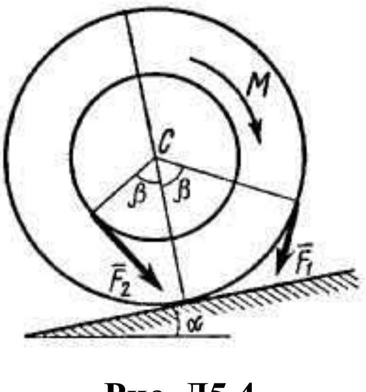


Рис. Д5.4

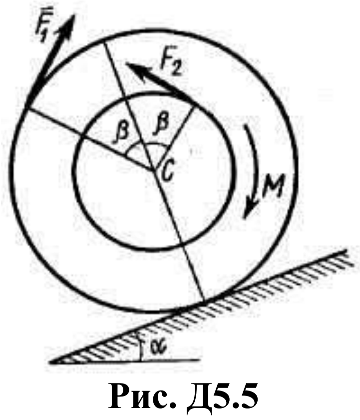


Рис. Д5.5

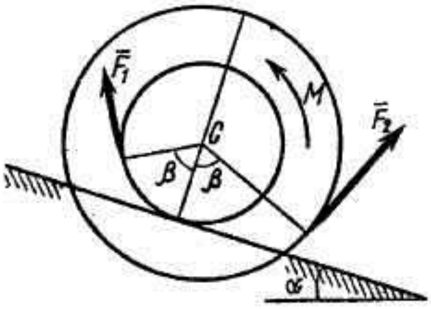


Рис. Д5.6

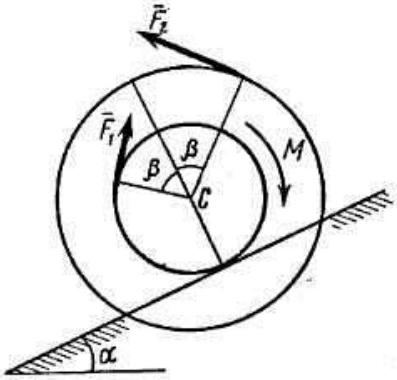


Рис. Д5.7

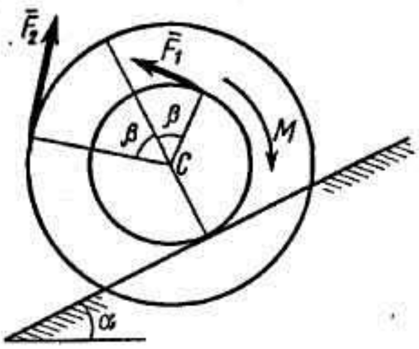


Рис. Д5.8

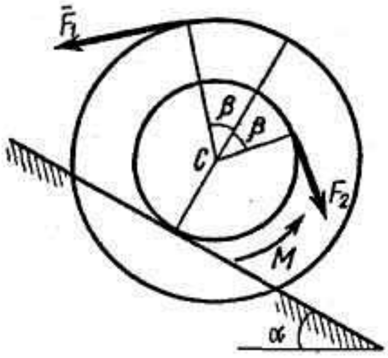


Рис. Д5.9

Таблица Д5

Номер условия	α	β	F_1	F_2	M
	град				
0	30	60	0	$0{,}4P$	0
1	30	30	$0{,}2P$	0	0
2	0	30	0	$0{,}2P$	$0{,}1PR$
3	30	–	0	0	$0{,}4PR$
4	30	90	$0{,}1P$	0	$-0{,}2PR$
5	0	60	$0{,}3P$	$0{,}1P$	0
6	30	0	0	$0{,}3P$	$0{,}2PR$
7	0	60	$0{,}2P$	0	$0{,}3PR$
8	30	90	0	$0{,}2P$	$-0{,}4PR$
9	30	60	$0{,}1P$	0	$-0{,}3PR$

Динамика плоскопараллельного движения твердого тела
(краткие сведения из теории)

Плоскопараллельное движение твердого тела – это составное движение. Выбирая за полюс центр масс C тела, раскладываем плоскопараллельное движение на переносное поступательное, при котором все точки движутся как полюс C, и относительное вращательное вокруг оси Cz, проходящей через C перпендикулярно плоскости сечения тела.

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела представляют собой систему уравнений: уравнение (1) движения центра масс и уравнение (2) вращательного движения твердого тела вокруг оси Cz, проходящей через центр масс тела и движущейся поступательно вместе с центром масс. Поэтому второе уравнение совпадает с уравнением вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

$$M\,\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e, \qquad (1)$$

$$J_{Cz}\varepsilon = \sum m_{Cz}(\bar{F}_k^e). \qquad (2)$$

Проектируя векторное уравнение (1) на взаимно перпендикулярные оси x и y, параллельные плоскости сечения тела, получим уравнения движения тела в координатной (алгебраической форме):

$$M\,a_{Cx} = \sum F_{kx}^e,$$

$$M\,a_{Cy} = \sum F_{ky}^e,$$

$$J_{Cz}\varepsilon = \sum m_{Cz}(\bar{F}_k^e).$$

Эти уравнения обычно дополняются кинематическими уравнениями, дающими, в частности, соотношение между угловым ускорением ε тела и ускорением $\bar{a}_C$ центра масс тела. Решая эту полученную систему динамических и кинематических уравнений, можно находить как ускорения, так и силы, в зависимости от условий и вопросов задачи (первая и вторая задачи динамики).

Указания. Задача Д5 – на применение дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела. При составлении уравнений следует, во избежание ошибок в знаках, направить координатную ось x в ту сторону, куда предполагается направленным движение центра C барабана, и считать тогда все моменты положительными, когда они направлены в сторону вращения барабана. Если фактически направление движения центра другое, то в ответе получится $a_C < 0$, но найденное значение $|a_C|$ будет верным. Силу трения, когда неясно, куда она направлена, можно направлять в любую сторону (результат от этого не зависит).

Составленные динамические уравнения следует дополнить кинематическими, дающими, в частности, соотношение между a_C и угловым ускорением ε тела.

Определяя наименьшее значения коэффициента трения, при котором возможно качение без скольжения, учесть, что сила трения не может быть больше предельной, т.е. что $F_{\text{тр}} \leq fN$, откуда $f \geq F_{\text{тр}} / N$. Следовательно, $f_{\min} = F_{\text{тр}} / N$. Если при расчетах получится $F_{\text{тр}} < 0$, то это означает, что сила $\overline{F}_{\text{тр}}$ направлена в другую сторону и $f_{\min} = |F_{\text{тр}}| / N$; в остальном весь расчет будет верен (N в данной задаче не может получиться <0, так как барабан не отрывается от поверхности).

Пример Д5. Барабан (сплошной однородный цилиндр) радиуса R и весом P начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом наклона α, на барабан действуют сила $\overline{F}$, направление которой определяется углом β, и пара сил с моментом M (рис. Д5).

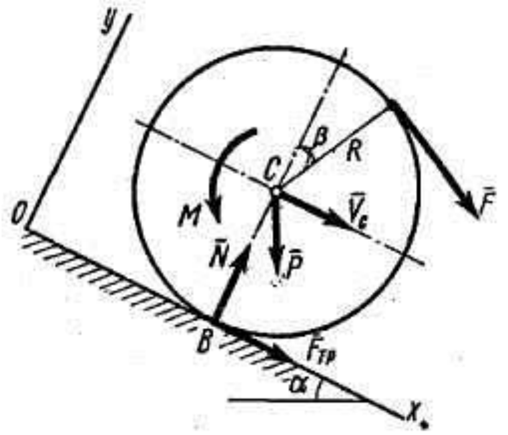


Рис. Д5

Дано: P, $F = 0{,}8P$, $M = 1{,}1PR$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

Определить:

1) $x_C = x_C(t)$ – закон движения центра масс барабана;

2) $f_{\min}$ – наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение без скольжения.

Решение. Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил $\overline{P}$, $\overline{F}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{\text{тр}}$ и пары сил, момент которой равен M. Так как направление силы трения $\overline{F}_{\text{тр}}$ заранее неизвестно, выбираем его произвольно. Ось x проводим вдоль наклонной плоскости вниз, ось y проводим перпендикулярно наклонной плоскости так, чтобы начальное положение центра масс находилось на оси y.

Составляем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения барабана:

– дифференциальное уравнение движения центра масс в векторной форме:

$$M\overline{a}_C = \overline{P} + \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_{\text{тр}};$$

– дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси:

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}; \qquad m\ddot{x}_C = P\sin\alpha + F\cos\beta + F_{\text{тр}}; \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}; \qquad m\ddot{y}_C = -P\cos\alpha - F\sin\beta + N; \tag{2}$$

– дифференциальное уравнение вращательного движения барабана относительно подвижной оси Cz, проходящей через центр масс и движущейся поступательно вместе с центром масс барабана:

$$J_{Cz}\,\varepsilon = \sum m_{Cz}(\overline{F}_k); \qquad \frac{mR^2}{2}\varepsilon = FR - F_{\text{тр}}R - M. \tag{3}$$

За положительное направление для моментов сил принято направление в ту сторону, куда будет вращаться барабан при движении центра от оси Oy.

В систему уравнений (1)-(3) входят пять неизвестных: $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, ε, N, $F_{\text{тр}}$. Дополним эту систему двумя кинематическими уравнениями; для этого выполним кинематические расчеты. Так как в задаче $y_C = R = \text{const}$, то

$$\ddot{y}_C = 0. \tag{4}$$

Далее установим соотношение между $\ddot{x}_C = a_C$ и ε. Барабан катится без скольжения по неподвижной плоскости, поэтому $V_B = 0$ (см. рис. Д5), следовательно, точка B является мгновенным центром скоростей барабана. Тогда

$$\upsilon_C = \omega \cdot BC = \omega R, \quad a_C = \dot{\upsilon}_C = \dot{\omega} R = \varepsilon R, \quad \text{или}$$

$$\varepsilon = \ddot{x}_C / R \tag{5}$$

Подставляя кинематические уравнения (4), (5) в систему (1)-(3) и разделив уравнение (3) на R, получим

$$m\ddot{x}_C = P\sin\alpha + F\cos\beta + F_{\text{тр}}; \tag{6}$$

$$0 = -P\cos\alpha - F\sin\beta + N; \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_C = F - F_{\text{тр}} - \frac{M}{R}. \tag{8}$$

В уравнениях (6)-(8) остались три неизвестные $\ddot{x}_C$, N, $F_{\text{тр}}$.

1) Определяем закона движения центра масс $x_C = x_C(t)$.

Сначала найдем $\ddot{x}_C$. Для этого сложим почленно равенства (6) и (8), тем самым исключив неизвестную $F_{\text{тр}}$:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = F(1+\cos\beta) + P\sin\alpha - \frac{M}{R}.$$

Подставляя численные значения, найдем

$$\ddot{x}_C = 0{,}6g. \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (9), получим

$$\dot{x}_C = 0{,}6gt + C_1; \tag{10}$$

$$x_C = 0{,}3gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{11}$$

Начальные условия: $t = 0$, $\upsilon_C = \dot{x}_C = 0$ (так как движение начинается из состояния покоя), $x_C = 0$ (так как ось y проходит через начальное положение точки C). Подставляя эти начальные условия в (10) и (11), получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Окончательно находим следующий закон движения центра масс C:

$$x_C = 0{,}3gt^2.$$

2) Определение минимального коэффициента трения $f_{\min}$, при котором возможно качение барабана без скольжения.

Сила трения должна удовлетворять условию

$$F_{\text{тр}} \le fN. \tag{12}$$

Найдем нормальную реакцию N из уравнения (7):

$$N = P\cos\alpha + F\sin\beta = P\cos 30^\circ + 0{,}8P\sin 30^\circ.$$

$$N = 1{,}27P. \qquad (13)$$

Значение $F_{тр}$ проще всего найти из уравнения (8), заменив в нем $\ddot{x}_C$ его значением (9). Получим

$$0{,}3mg = F - F_{тр} - \frac{M}{R}.$$

Отсюда

$$F_{тр} = F - M/R - 0{,}3P = 0{,}8P - 1{,}1P - 0{,}3P = -0{,}6P. \qquad (14)$$

Знак указывает, что направление силы $\overline{F}_{тр}$ противоположно показанному на рисунке. Подставляя модуль значения $F_{тр}$ из (14) и значение N из (13) в неравенство (12), получим

$$0{,}6P \le 1{,}27Pf,$$

откуда находим, что

$$f \ge 0{,}47.$$

Следовательно, наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение барабана без скольжения, равен $f_{min} = 0{,}47$.

Ответ: $x_C = 0{,}3gt^2$, $f_{min} = 0{,}47$.

Задача Д6
(тема: "Принцип Даламбера для механической системы")

Вертикальный вал AK (рис. Д6.0-Д6.9, табл. Д6), вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\,с^{-1}$. Вал имеет две опоры: подпятник в точке A и цилиндрический подшипник в точке, указанной в табл. Д6 ($AB = BD = DE = EK = b$). К валу жестко прикреплены невесомый стержень 1 длиной $l_1 = 0{,}4$ м с точечной массой $m_1 = 6$ кг на конце и однородный стержень 2 длиной $l_2 = 0{,}6$ м, имеющий массу $m_2 = 4$ кг; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу и углы α и β указаны в таблице. Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных подсчетах принять $b = 0{,}4$ м.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Принцип Даламбера». Ответьте на вопросы:

1. Сформулируйте принцип Даламбера для точки.
2. Как определяется модуль и направление силы инерции для точки? В каких случаях сила инерции равна нулю?
3. Сформулируйте принцип Даламбера для системы.
4. Чему равны главный вектор и главный момент сил инерции системы?
5. Запишите уравнения равновесия произвольной системы сил и плоской системы сил в координатной форме (вспомнив соответствующие уравнения статики).

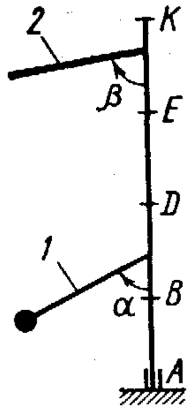


Рис. Д6.0

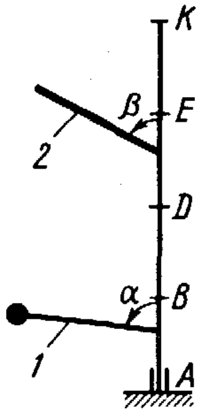


Рис. Д6.1

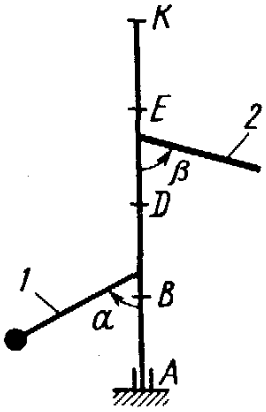


Рис. Д6.2

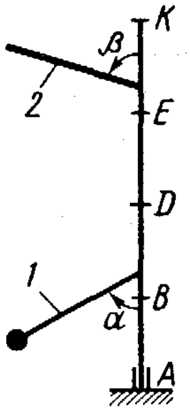


Рис. Д6.3

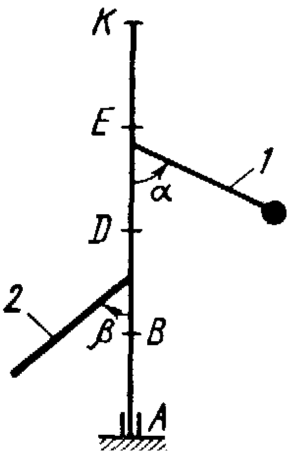


Рис. Д6.4

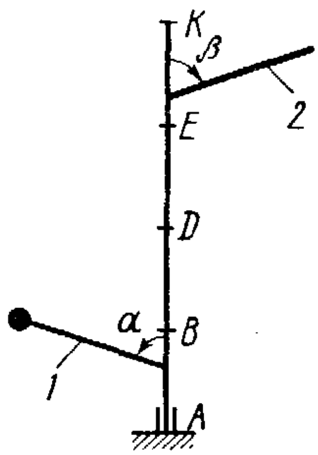


Рис. Д6.5

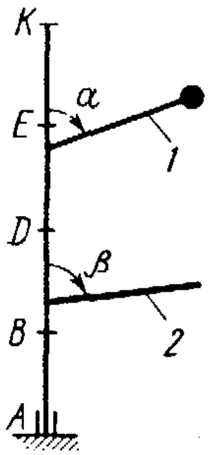


Рис. Д6.6

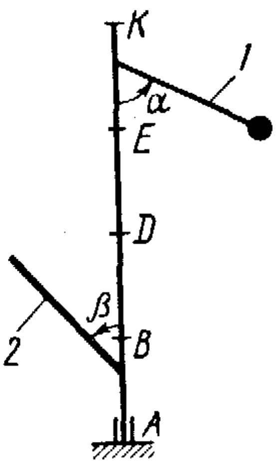


Рис. Д6.7

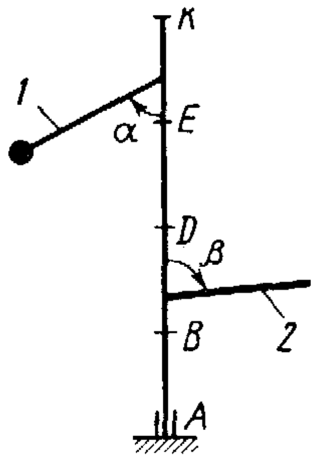


Рис. Д6.8

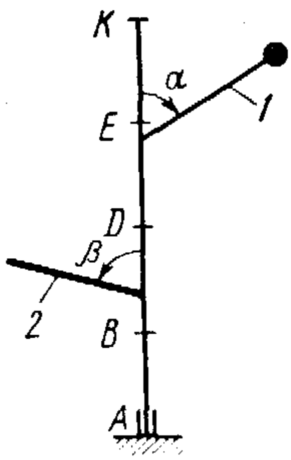


Рис. Д6.9

Таблица Д6

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление		α, град.	β, град.
		стержня 1 в точке	стержня 2 в точке		
0	*B*	*D*	*K*	30	45
1	*D*	*B*	*E*	45	60
2	*E*	*D*	*B*	60	75
3	*K*	*D*	*E*	75	30
4	*B*	*E*	*D*	90	60
5	*D*	*K*	*B*	30	45
6	*E*	*B*	*K*	45	30
7	*K*	*E*	*B*	60	75
8	*D*	*E*	*K*	75	60
9	*E*	*K*	*D*	90	45

Принцип Даламбера для точки и системы (краткие сведения из теории)

Принцип Даламбера для точки. Рассмотрим дифференциальное уравнение движения точки в инерциальной системе отсчета в векторной форме:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{1}$$

где $\bar{F}$ – векторная сумма всех сил, действующих на точку (активных и реакций связей). Перенесем вектор $m\bar{a}$ в правую часть уравнения (1): $\bar{F} + (-m\bar{a}) = 0$; обозначим $\bar{F}^{\text{ин}} = -m\bar{a}$; тогда получим уравнение

$$\bar{F} + \bar{F}^{\text{ин}} = 0, \tag{2}$$

где

$$\bar{F}^{\text{ин}} = -m\bar{a}; \tag{3}$$

эта величина называется *силой инерции* точки.

Уравнение (2) по форме соответствует уравнению равновесия сил в векторной форме. В этом и состоит *принцип Даламбера для точки:* если к приложенным к точке силам добавить силу инерции (3), то полученная система сил (активных, реакций связей и сил инерции) будет уравновешенной и задачу динамики можно решать, применив методы статики.

Такой метод решения задач динамики называется методом *кинетостатики*.

Сила инерции точки $\overline{F}^{\text{ин}} = -m\overline{a}$ (см. (3)). Модуль силы инерции точки равен $\left|\overline{F}^{\text{ин}}\right| = m|\overline{a}|$; направлена сила инерции $\overline{F}^{\text{ин}}$ в сторону, противоположную абсолютному ускорению точки $\overline{a}$. Поэтому для построения $\overline{F}^{\text{ин}}$ на рисунке следует сначала построить вектор $\overline{a}$ (или его составляющие, например, $\overline{a}_\tau$ и $\overline{a}_n$), и затем построить $\overline{F}^{\text{ин}}$ в сторону, противоположную вектору $\overline{a}$ (или $\overline{F}_\tau^{\text{ин}}$ и $\overline{F}_n^{\text{ин}}$ в стороны, противоположные $\overline{a}_\tau$ и $\overline{a}_n$, соответственно).

Принцип Даламбера для системы. Применим описанный выше принцип Даламбера к каждой точке системы. К силам, действующим на каждую точку (внешним и внутренним), добавляется сила инерции (3). Получаем систему сил (внешних, внутренних и сил инерции) для всех точек системы.

Из раздела “Статика” известно, что система сил в общем случае приводится к главному вектору, приложенному в центре приведения и к паре сил, момент которой равен главному моменту системы сил относительно центра приведения. Можно разбить все силы на группы – внешние, внутренние, и силы инерции – и найти главный вектор и главный момент для каждой группы сил отдельно. Так как главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, то в уравнениях равновесия сил останутся только внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции.

Принцип Даламбера для системы формулируется следующим образом: если к внешним силам (активным и реакциям связей), действующим на каждую точку системы, добавить силу инерции (3), то полученная система сил будет уравновешенной и для нее справедливы уравнения статики.

Уравнения равновесия сил (внешних (активных и реакций связей) и сил инерции) в векторной форме:

$$\overline{R}^e + \overline{R}^{\text{ин}} = 0;$$

$$\overline{M}_O^e + \overline{M}_O^{\text{ин}} = 0,$$

где $\overline{R}^e$, $\overline{M}_O^e$ – главный вектор и главный момент относительно произвольного центра O внешних сил (активных и реакций связей); $\overline{R}^{\text{ин}}$, $\overline{M}_O^{\text{ин}}$ – главный вектор и главный момент относительно произвольного центра O сил инерции. В алгебраической (координатной) форме уравнения равновесия записываются различным образом, в зависимости от типа получившейся системы сил (произвольная система сил, плоская система сил и т. д., см. раздел “Статика”).

Главный вектор сил инерции не зависит от центра приведения и может быть вычислен заранее:

$$\overline{R}^{\text{ин}} = \sum \overline{F}_k^{\text{ин}} = -M\,\overline{a}_C,$$

где M – масса тела (системы), $\overline{a}_C$ – абсолютное ускорение центра масс тела (системы). Главный вектор *не обязательно* приложен в центре масс (так как центр приведения – произвольная точка).

Главный момент сил инерции относительно центра приведения O:

$$\overline{M}_O^{\text{ин}} = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{\text{ин}}).$$

Главный момент зависит от центра приведения O и заранее может быть вычислен только в некоторых частных случаях (для некоторых видов движения тела и различных центров приведения).

Указания. Задача Д6 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что система сил инерции точек стержня 2 представляет собой систему параллельных сил, направленных в одну сторону и, следовательно, имеет равнодействующую $\overline{R}^{\text{ин}}$. Модуль равнодействующей $R^{\text{ин}} = m a_C$, где a_C – ускорение центра масс C стержня. Линия действия силы $\overline{R}^{\text{ин}}$ *не проходит* через точку C, так как силы инерции образуют линейно распределенную нагрузку (см. пример Д6).

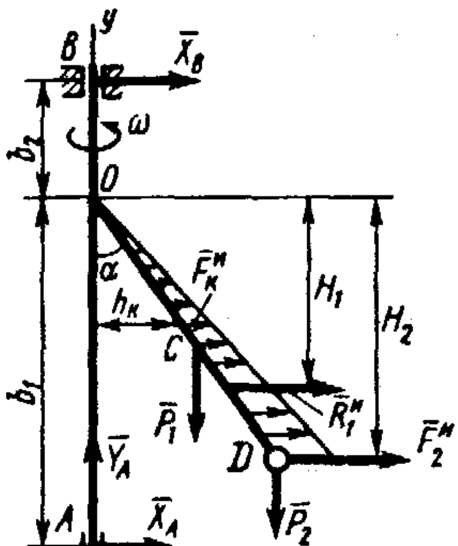


Рис. Д6

Пример Д6. С невесомым валом AB, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен однородный стержень OD длиной l и массой m_1, имеющий на конце груз массой m_2 (рис. Д6).

Дано: $b_1 = 0{,}6$ м, $b_2 = 0{,}2$ м, $\alpha = 30^\circ$, $l = 0{,}5$ м, $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $\omega = 6\,\text{с}^{-1}$.

Определить: реакции подпятника A и подшипника B.

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала AB, стержня OD и груза, и применим принцип Даламбера. Проведем неподвижные оси Axy, лежащие в данный момент времени в плоскости, образуемой валом и стержнем, и изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2$, составляющие $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ реакции подпятника и реакцию $\overline{X}_B$ подшипника (X_A, Y_A, X_B надо определить).

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции точек стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно ($\omega = \text{const}$), то точки стержня имеют только нормальные ускорения $\overline{a}_{nk}$ направленные к оси вращения; численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k – расстояние от точки от оси. Тогда силы инерции $\overline{F}_k^{\text{ин}}$ будут направлены от оси вращения; численно $F_k^{\text{ин}} = m_k a_{nk} = m_k \omega^2 h_k$, где m_k – масса точки. Поскольку $\overline{F}_k^{\text{ин}}$ пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\overline{R}_1^{\text{ин}}$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника (точку пересечения медиан), т.е. на расстоянии H_1 от вершины O, где $H_1 = (2/3)H_2$, $H_2 = l\cos\alpha$ (см. рис. Д6).

Известно, что равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору; численно главный вектор сил инерции стержня $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_C$, где $\overline{a}_C$ – ускорение центра масс стержня. Так как стержень вращается с постоянной угловой скоростью, то ускорение $\overline{a}_C$ центра масс стержня имеет только нормальную составляющую: $a_C = a_{Cn} = \omega^2 h_C = \omega^2 \cdot OC \cdot \sin\alpha$. В результате получим $R_1^{\text{ин}} = m_1 \omega^2 (l/2) \sin\alpha = 13{,}5$ Н.

Аналогично для силы инерции $\overline{F}_2^{\text{ин}}$ груза найдем, что она направлена от оси вращения; численно $F_2^{\text{ин}} = m_2 \omega^2 l \sin\alpha = 18$ Н.

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости Axy, то и реакции подпятника A и подшипника B тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении на рисунке.

По принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + R_1^{\text{ин}} + F_2^{\text{ин}} = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \sum m_B(\overline{F}_k) = 0; \quad & X_A(b_1 + b_2) - P_1(l/2)\sin\alpha - P_2 l \sin\alpha + \\ & + R_1^{\text{ин}}(H_1 + b_2) + F_2^{\text{ин}}(H_2 + b_2) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции (в своей задаче решение уравнений равновесия должно быть выполнено подробно).

Ответ: X_A = -11,8 Н, Y_A = 49,1 Н, X_B = -19,7 Н.

Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{X}_B$ направлены противоположно показанным на рис. Д6.

Задача Д7
(тема: “Принцип возможных перемещений”)

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами α, β, γ, φ, θ (рис. Д7.0-Д7.9, табл. Д7а и Д7б). Длины стержней механизма (кривошипов) равны: l_1 = 0,4 м, l_4 = 0,6 м (размеры l_2 и l_3 произвольны); точка *E* находится в середине соответствующего стержня.

На ползун *B* механизма действует сила упругости пружины $\overline{F}$; численно $F = c\lambda$, где *c* – коэффициент жесткости пружины, λ – ее деформация. Кроме того, на рис. Д7.0 и Д7.1 на ползун *D* действует сила $\overline{Q}$, а на кривошип O_1A – пара сил с моментом *M*; на рис. Д7.2- Д7.9 на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2.

Определить, чему равна при равновесии деформация λ пружины, и указать, растянута пружина или сжата.

Значения всех заданных величин для рис. Д7.0-Д7.4 приведены в табл. Д7а, а для рис. Д7.5-Д7.9 в табл. Д6б. В этих таблицах сила *Q* дана в ньютонах, а моменты M, M_1, M_2 – в ньютоно-метрах.

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере Д7 (см. рис. Д7, а также рис. Д7.10б). Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну *B* стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. Д7.10а), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. Д7.10б, где одновременно иначе изображены направляющие).

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Принцип возможных перемещений».

Ответьте на вопросы:

1. Как определяется число степеней свободы системы?
2. Что такое обобщенные координаты?
3. Что называется возможными перемещениями системы?
4. Формулы для вычисления элементарной работы силы на возможном перемещении (сравните с формулами, которые применили в задаче Д4).
5. Какие связи называются идеальными?
6. Сформулируйте принцип возможных перемещений для системы и запишите соответствующее уравнение.
7. Запишите уравнение мощностей, эквивалентное принципу возможных перемещений.

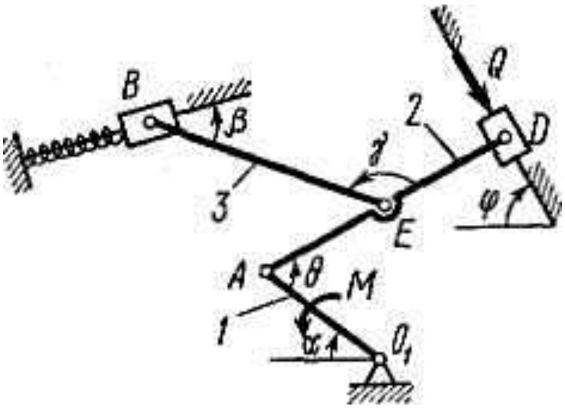


Рис. Д7.0

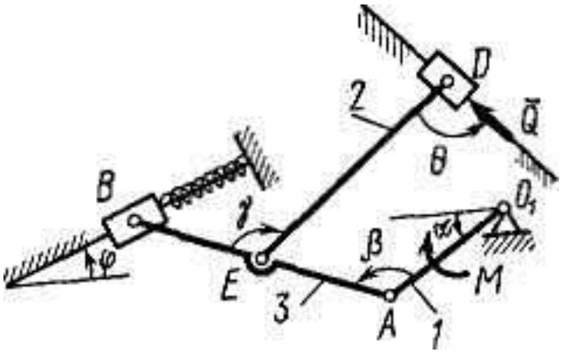


Рис. Д7.1

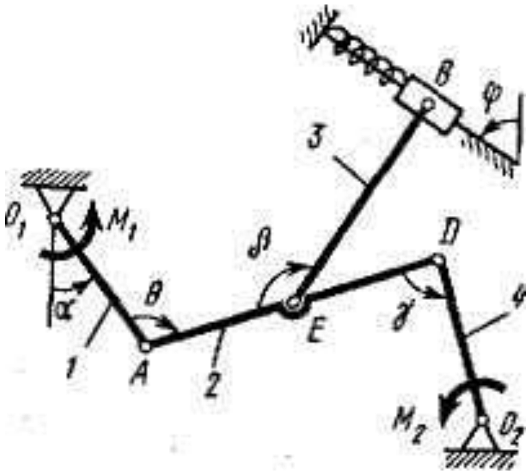


Рис. Д7.2

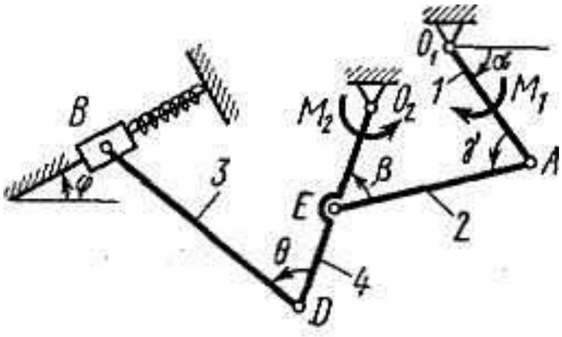


Рис. Д7.3

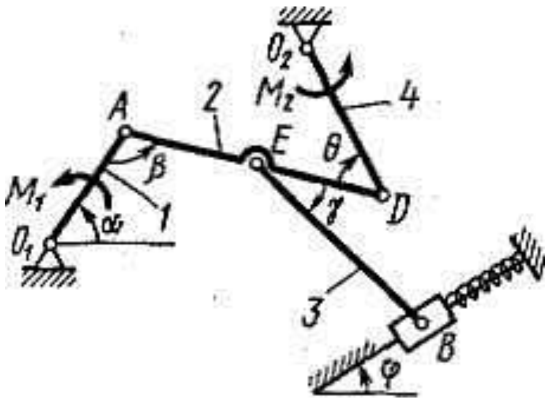


Рис. Д7.4

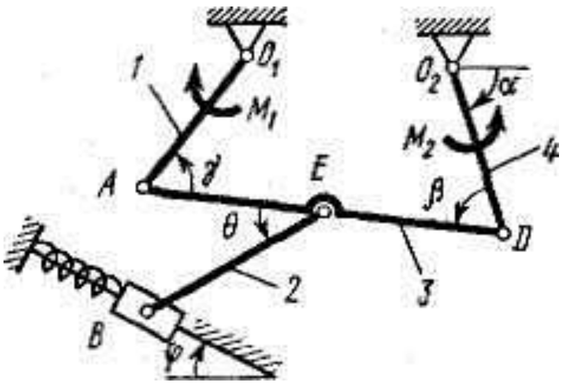


Рис. Д7.5

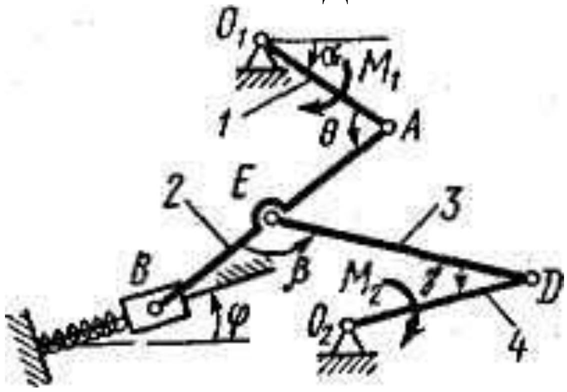


Рис. Д7.6

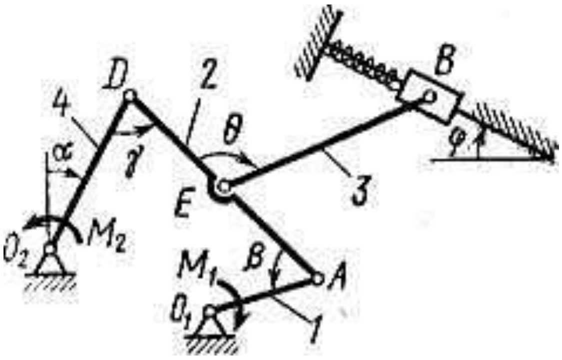


Рис. Д7.7

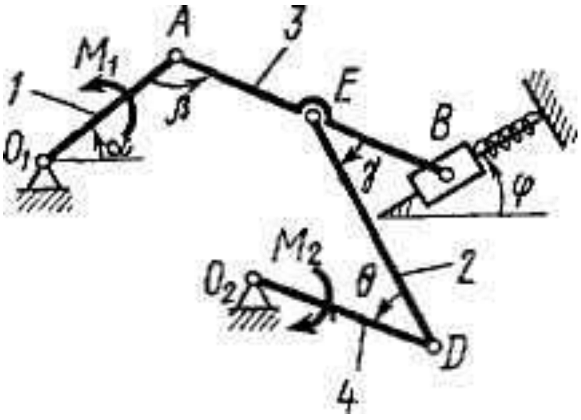


Рис. Д7.8

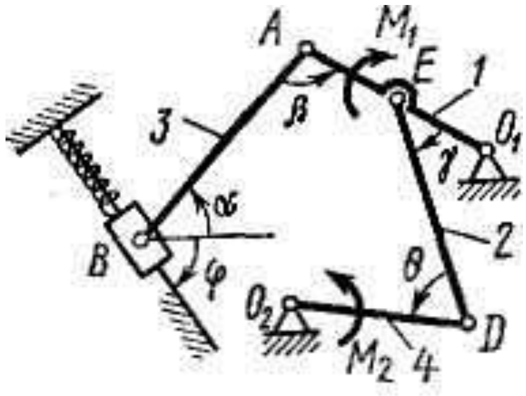


Рис. Д7.9

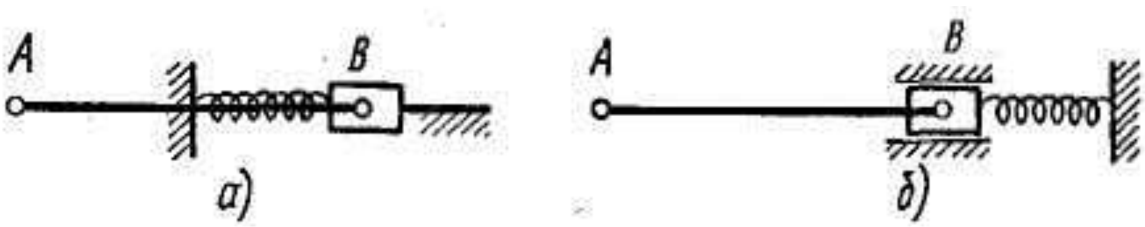


Рис. Д7.10

Таблица Д7а (к рис. Д7.0-Д.7.4)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	Для рис. 0-1		Для рис. 2-4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	90	60	180	100	400	120	460
1	60	150	30	90	30	160	120	380	140	440
2	30	120	120	0	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	0	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	320	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	90	0	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	90	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблица Д7б (к рис. Д7.5-Д7.9)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

Принцип возможных перемещений
(краткие сведения из теории)

Возможным перемещением механической системы называется совокупность

а) бесконечно малых

б) мысленных

перемещений точек системы, при которых

в) не нарушаются связи,

наложенные на систему. Возможное перемещение любой точки системы будем изображать элементарным вектором $\delta\bar{s}$, направленным в сторону перемещения.

Число степеней свободы. Число независимых перемещений точек системы называется *числом степеней свободы* системы. Если система состоит из n точек, на которые наложены k геометрических (не накладывающих ограничений на скорости точек) связей, то она имеет $s = 3n - k$ степеней свободы. В дальнейшем связи считаются геометрическими. Следовательно, чтобы задать положение такой системы в любой момент времени, не нужно задавать все координаты всех точек, а надо задать только независимые параметры.

Независимые параметры, число которых равно числу степеней свободы, и которые однозначно определяют положение всей системы в любой момент времени, называются **обобщенными координатами** и обозначаются

$$q_1,\ q_2, \ldots,\ q_S,$$

где s – число степеней свободы. В качестве обобщенных координат можно выбрать декартовы координаты точек, углы поворота тел и т.д.

Идеальные связи. Связи называются *идеальными*, если сумма элементарных работ реакций связей, наложенных на систему, равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A_k^R = 0.$$

(Элементарная работа на возможном перемещении обозначается δA). Все встречавшиеся ранее связи (шарниры, поверхности, нити, подшипники и т.д.) – идеальные при отсутствии трения. Если трение имеется и работа силы трения отлична от нуля, то сила трения включается в число активных сил.

Принцип возможных перемещений. Формулировка: для *равновесия* системы с геометрическими идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех *активных* сил, действующих на точки системы, на любом возможном перемещении системы из данного положения была равна нулю:

$$\sum \delta A_k^a = 0, \tag{1}$$

или (с учетом выражений для элементарной работы силы, см. задачу Д4)

$$\sum F_k^a \delta s_k \cos(\overline{F}_k^a \,\hat{,}\, \delta\overline{s}_k) = 0,$$

а также

$$\sum F_k^a V_k \cos(\overline{F}_k^a \,\hat{,}\, \overline{V}_k) = 0. \tag{2}$$

В (2) выполнено деление на $\delta t \neq 0$ и поэтому суммируются мощности сил.

Указания. Задача Д7 – на применение условия равновесия механической системы – принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, т. е. одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму мощностей всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. Все вошедшие в составленное уравнение скорости следует выразить через какую-либо одну из них.

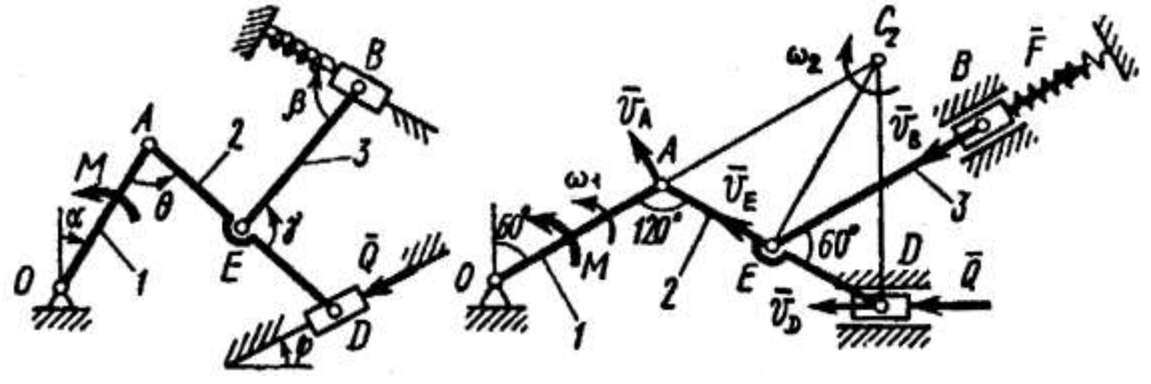
Чтобы найти деформацию пружины λ, надо из полученного соотношения определить силу упругости *F*. На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т.е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление силы, укажет знак силы.

Последовательность действий при решении задачи см. в примере Д7.

Пример Д7. Механизм (рис. Д7а), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней 1, 2, 3 и ползунов *B*, *D*, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой *O* шарнирами. К ползуну *B* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*, к ползуну *D* приложена сила $\overline{Q}$, а к стержню 1 (кривошипу) – пара сил с моментом *M*.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 0°$, $\gamma = 60°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 120°$, $l_1 = 0{,}4$ м, $AE = ED$, c=125 Н/см, $M = 150$ Н·м, $Q = 350$ Н.

Определить: деформацию λ пружины при равновесии механизма.



а) б)

Рис. Д7

Решение.

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. Д7б); при этом, согласно указанию к задаче Д7, прикрепляем пружину к ползуну с другой стороны (так, как если бы было $\beta = 180°$).

Система состоит из стержней 1, 2, 3 и ползунов *B*, *D*; система имеет одну степень свободы.

Применим принцип возможных перемещений:

$$\sum \delta A_k^a = 0,$$

или

$$\sum F_k V_k \cos(\overline{F}_k \,\widehat{,}\, \overline{V}_k) = 0 \qquad (1)$$

(так как в задаче К4 мы уже встречались с определением скоростей точек плоского механизма).

2. Покажем на рисунке действующие на точки механизма активные силы: силу $\overline{Q}$, силу упругости $\overline{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пару с моментом *M*.

Неизвестную силу F найдем с помощью уравнения (1), а зная F и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ.

3. Сообщим системе возможное перемещение. При этом стержень 1 приобретет угловую скорость ω_1, ползун *B* – скорость $\overline{V}_B$, ползун *D* – скорость $\overline{V}_D$; эти скорости потребуются при вычислении слагаемых в (1). Так как система имеет одну степень свободы, то V_B и V_D можно выразить через ω_1. Ход расчетов такой же, как в задаче К4.

4. Кинематическая часть задачи. Все вычисления и построения векторов проводятся для заданного положения механизма (механизм не перемещается в новое положение), так как возможные перемещения – бесконечно малые.

Сначала найдем и изобразим на рисунке скорость точки *A* (направление вектора скорости $\overline{V}_A$ определяется направлением угловой скорости ω_1):

$$V_A = l_1\,\omega_1; \quad \overline{V}_A \perp OA..$$

Определим и изобразим на рисунке скорость точки *D*. Скорость $\overline{V}_D$ – вдоль направляющих ползуна *D*. По теореме о проекциях скоростей точек абсолютно твердого тела, проекции скоростей $\overline{V}_D$ и $\overline{V}_A$ на прямую *AD* алгебраически равны (имеют одинаковые модули и знаки):

$$V_D \cos 30° = V_A \cos 30°, \quad \text{и} \quad V_D = V_A = l_1\,\omega_1. \qquad (2)$$

Чтобы определить скорость точки B, найдем сначала скорость точки E. Для этого построим мгновенный центр скоростей C_2 стержня 2. Он находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_D$, восставленных из точек *A* и *D*. Покажем направление мгновенного поворота стержня 2 (вокруг C_2), учитывая направление $\overline{V}_A$ или $\overline{V}_D$. Так как $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60°$, то ΔAC_2D – равносторонний и C_2E в нем высота, поскольку *AE* = *ED*. Тогда скорость $\overline{V}_E$, перпендикулярная C_2E, будет направлена по прямой *EA* (при изображении $\overline{V}_E$ учитываем направление мгновенного поворота стержня 2).

Воспользовавшись опять теоремой о проекциях скоростей точек *E* и *A* на прямую *EA*, получим

$$V_E = V_A \cos 30° = l_1\omega_1 \cos 30°.$$

Значение скорости V_E можно найти и другим способом, составив пропорцию

$$\frac{V_E}{V_A} = \frac{EC_2}{AC_2} = \cos 30^\circ.$$

Находим V_B, применив еще раз теорему о проекциях скоростей $\overline{V}_B$ и $\overline{V}_E$ на прямую *BE* и учитывая, что $\overline{V}_B$ параллельна направляющим ползуна *B*.

$$V_B = V_E \cos 60° = l_1\omega_1 \cos 30° \cdot \cos 60° = 0{,}43 l_1\,\omega_1.$$

$$V_B = 0{,}43\, l_1\,\omega_1. \qquad (3)$$

Изображаем $\overline{V}_B$ на рисунке.

5. Составим уравнение (1) для показанных на рисунке сил и скоростей.

Мощность силы $\overline{Q}$: $QV_D \cos 0 = QV_D$.

Мощность силы $\overline{F}$: $FV_B \cos 180° = -FV_B$.

Мощность пары сил: $M\omega_1$, так как элементарная работа пары (см. задачу Д4) $\delta A = M\delta\varphi$, а мощность равна $\dfrac{\delta A}{\delta t} = M\,\dfrac{\delta\varphi}{\delta t} = M\omega$.

В итоге, уравнение (1) принимает вид

$$M\,\omega_1 + QV_D - F\,V_B = 0.$$

Заменяя здесь V_D и V_B их значениями (2) и (3) и вынося ω_1 за скобки, получаем

$$(M + l_1 Q - 0{,}43 l_1 F)\,\omega_1 = 0. \qquad (4)$$

Так как равенство (4) выполняется при любой возможной угловой скорости ω_1, то

$$M + l_1 Q - 0{,}43 l_1 F = 0. \qquad (5)$$

Из уравнения (5) находим значение силы упругости F и определяем деформацию пружины $\lambda = F / c$.

Ответ: λ = 13,5 см. Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.

Задача Д8
(тема: “Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа)”)

Механическая система состоит из ступенчатых шкивов 1 и 2 весом P_1 и P_2 с радиусами ступеней R_1=R, r_1=0,4 R; R_2=R , r_2=0,8 R (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу); грузов 3, 4 и сплошного однородного цилиндрического катка 5 весом P_3, P_4, P_5 соответственно (рис. Д8.0-Д8.9, табл. Д8). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Грузы скользят по плоскостям без трения, а катки катятся без скольжения. Кроме сил тяжести на одно из тел системы действует постоянная сила $\overline{F}$, а на шкивы 1 и 2 при их вращении действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно M_1 и M_2.

Составить для данной системы уравнение Лагранжа и определить из него величину, указанную в таблице в столбце "Найти", где обозначено: ε_1, ε_2 – угловые ускорения шкивов 1 и 2; a_3, a_4, a_{C5} – ускорения грузов 3, 4 и центра масс катка 5 соответственно. Когда в задаче надо определить ε_1 или ε_2, считать R = 0,25 м. Тот из грузов 3, 4, вес которого равен нулю, на чертеже не изображать. Шкивы 1 и 2 всегда входят в систему.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа)».

Ответьте на вопросы:

1. Что такое число степеней свободы системы, обобщенные координаты и обобщенные скорости?
2. Что называется возможными перемещениями точек системы?
3. Как вычисляется работа силы на возможном перемещении?
4. Что такое обобщенные силы и как их вычислить?
5. Запишите уравнения Лагранжа в общем виде.

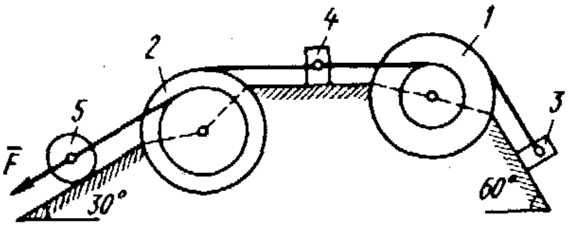


Рис. Д8.0

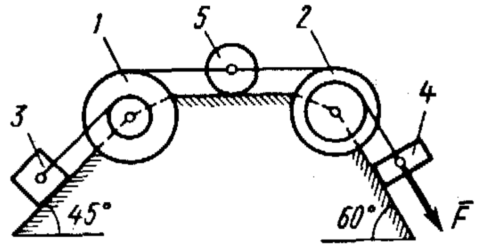


Рис. Д8.1

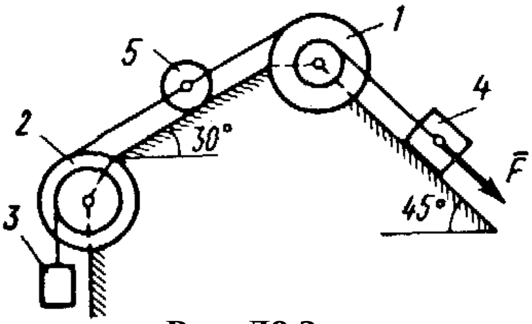


Рис. Д8.2

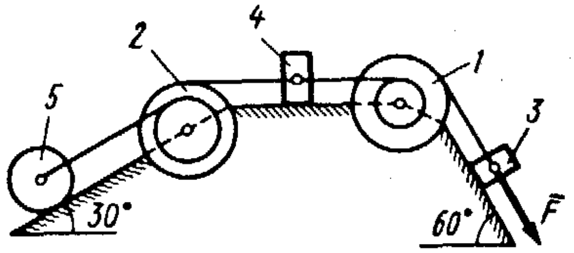


Рис. Д8.3

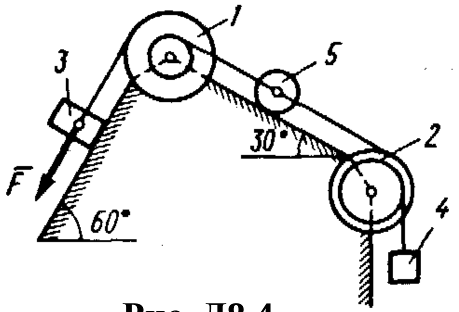


Рис. Д8.4

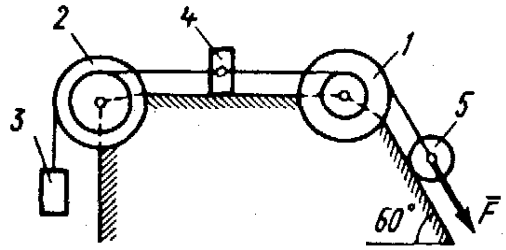


Рис. Д8.5

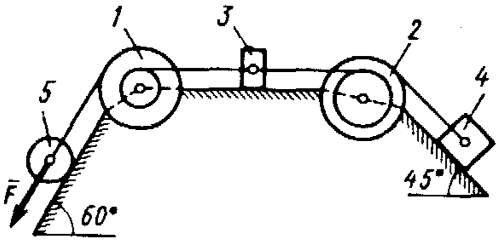


Рис. Д8.6

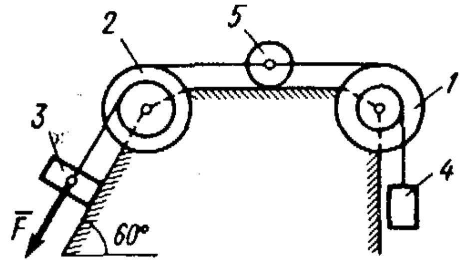


Рис. Д8.7

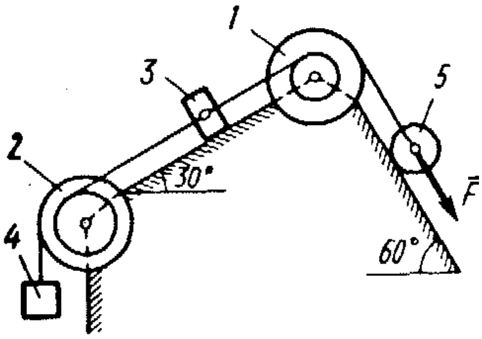


Рис. Д8.8

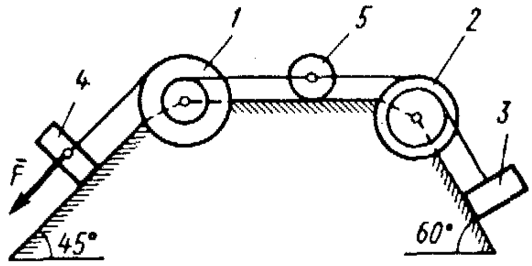


Рис. Д8.9

Таблица Д8

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	M_1	M_2	F	Найти
0	12*P*	0	*P*	0	3*P*	0,2*PR*	0	8*P*	a_3
1	0	10*P*	0	*4P*	2*P*	0	0,3*PR*	6*P*	ε_2
2	10*P*	0	0	2*P*	*P*	0,3*PR*	0	4*P*	ε_1
3	0	12*P*	2*P*	0	3*P*	0	0,2*PR*	10*P*	a_3
4	8*P*	10*P*	0	0	2*P*	0	0,3*PR*	5*P*	a_{C5}
5	12*P*	0	2*P*	0	*P*	0	0,4*PR*	8*P*	ε_1
6	0	12*P*	0	*3P*	4*P*	0,2*PR*	0	6*P*	a_4
7	10*P*	8*P*	0	0	2*P*	0,3*PR*	0	5*P*	ε_2
8	12*P*	0	0	*5P*	4*P*	0	0,2*PR*	6*P*	a_4
9	0	12*P*	2*P*	0	3*P*	0,2*PR*	0	10*P*	a_{C5}

Уравнения Лагранжа
(краткие сведения из теории)

Механические системы могут иметь различное число степеней свободы (числом *s* степеней свободы называется число независимых перемещений точек системы). Независимые параметры q_1, q_2, … , q_S, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве, называются **обобщенными координатами** механической системы (см. задачу Д7). Производные по времени от обобщенных координат $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, … , $\dot{q}_S$ называются **обобщенными скоростями**. В качестве обобщенной координаты обычно выбирается либо координата тела, движущегося поступательно (тогда обобщенной скоростью будет скорость *V* этого тела), либо угол поворота вращающегося тела (тогда обобщенной скоростью будет угловая скорость ω этого тела). Таким образом, размерности обобщенных координат могут быть различными.

Кинетическая энергия *T* системы может быть выражена через обобщенные скорости и обобщенные координаты:

$$T = T(\dot{q}_1,...,\dot{q}_S, q_1,...,q_S).$$

Бесконечно малые изменения δq_1, δq_2, … , δq_S обобщенных координат на (бесконечно малом) возможном перемещении системы называются **вариациями** обобщенных координат. Обычно системе сообщают возможные перемещения в сторону возрастания *q*, так что $\delta q > 0$.

Обобщенные силы. Пусть на систему действуют различные активные силы. Придадим системе такое возможное перемещение, при котором меняется только q_1, то есть $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_S = 0$. Вычислим сумму элементарных работ всех активных сил $\left(\sum \delta A_k^a\right)_1$ на этом возможном перемещении. Далее выразим возможные перемещения δs_k точек приложения сил через δq_1. Тогда в $\left(\sum \delta A_k^a\right)_1$ появится общий множитель δq_1; вынесем его за скобки, обозначив оставшееся в скобках выражение через Q_1:

$$\left(\sum \delta A_k^a\right)_1 = (Q_1)\delta q_1.$$

Величина Q_1 называется **обобщенной силой**, соответствующей обобщенной координате q_1. Аналогично определяются обобщенные силы, соответствующие остальным обобщенным координатам. Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты.

Уравнения Лагранжа справедливы для системы с геометрическими идеальными связями и имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{1}$$

Число уравнений равно числу степеней свободы. Чтобы составить уравнение Лагранжа для механической системы с одной степенью свободы, следует а) найти кинетическую энергию T системы и выразить ее через обобщенную скорость и обобщенную координату: $T(\dot{q}, q)$; б) последовательно вычислить производные $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)$, $\frac{\partial T}{\partial q}$; в) вычислить $\sum \delta A_k^a$ и, представив эту сумму в виде $\sum \delta A_k^a = Q\,\delta q$, найти обобщенную силу Q; г) подставить производные в левую часть уравнения (1), а обобщенную силу – в правую часть. В итоге получится дифференциальное уравнение движения системы (относительно функции $q(t)$). Аналогично составляется каждое из уравнений (1) для механической системы с произвольным числом степеней свободы.

Указания. Задача Д8 – на применение уравнений Лагранжа к изучению движения системы. В задаче система имеет одну степень свободы, следовательно, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение.

За обобщенную координату q принять: в задачах, где требуется определить a_3, a_4, или a_{C5}, – координату x соответствующего груза или центра масс C_5 катка 5; в задачах, где требуется определить ε_1 или ε_2, – угол поворота φ соответствующего шкива.

Для составления уравнения следует сначала вычислить кинетическую энергию T системы (как в задаче Д4) и выразить все вошедшие в T скорости через обобщенную скорость (т.е. через $\dot{x} = \upsilon$**,** если обобщенная координата x, или через $\dot{\varphi} = \omega$, если обобщенная координата φ). Затем следует вычислить обобщенную силу Q. Для этого необходимо сообщить системе возможное (бесконечно малое) перемещение, при котором выбранная координата (x или φ) получает положительное приращение δx (или $\delta\varphi$), а затем вычислить сумму элементарных работ всех сил на этом перемещении. В полученном равенстве следует все другие элементарные перемещения выразить через δx (или через $\delta\varphi$, если обобщенная координата φ) и вынести δx (или $\delta\varphi$) за скобки. Коэффициент при δx (или $\delta\varphi$) и будет обобщенной силой Q (см. пример Д8).

При решении задачи Д8 необходимо использовать теорию и примеры решения задач Д4 и Д7.

Пример Д8. Механическая система состоит из ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2), груза 1 и сплошного катка 3, прикрепленных к концам нитей, намотанных на ступени шкива (рис. Д8). На шкив при его вращении действует момент сил сопротивления M_2. Массу шкива считать равномерно распределенной по внешнему ободу; шкив катится по плоскости без скольжения. Массами нитей пренебречь.

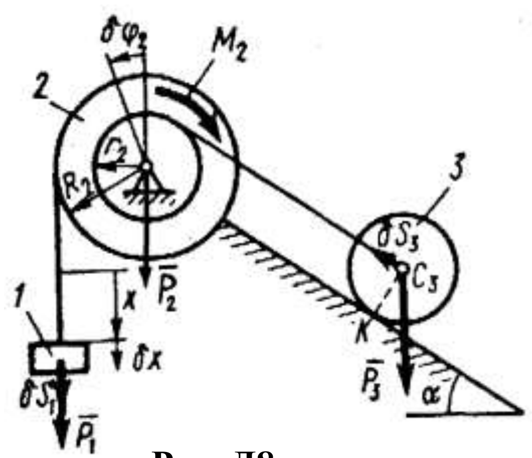


Рис. Д8

Дано:

$R_2 = R$, $r_2 = 0{,}6R$, $P_1 = 6P$, $P_2 = 3P$, $P_3 = 5P$, $M_2 = 0{,}2\,PR$, $\alpha = 30°$.

Определить: a_1 – ускорение груза 1.

Решение. 1. Система состоит из груза 1, шкива 2, катка 3 и нитей; система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты координату x_1 груза 1, полагая, что груз движется вниз, и отсчитывая x_1 в сторону движения; $q = x_1$; обобщенная скорость $\dot{q} = \dot{x}_1$ или $\dot{q} = \upsilon_1$. Уравнение Лагранжа, с учетом выбранной обобщенной координаты и соответствующей обобщенной скорости, имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \upsilon_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме кинетических энергий всех тел (вычисления здесь аналогичны вычислениям, проводившимся в задаче Д4):

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

Так как груз 1 движется поступательно, шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси, а каток 3 совершает плоскопараллельное движение, то

$$T_1 = \frac{P_1}{2g}\upsilon_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}J_{z2}\omega_2^2, \quad T_3 = \frac{P_3}{2g}\upsilon_{C3}^2 + \frac{1}{2}J_{C3z}\omega_3^2. \tag{3}$$

Поскольку масса шкива считается распределенной по внешнему ободу, а каток – сплошной (его радиус обозначим r_3), то

$$J_{z2} = \frac{P_2}{g}R^2, \quad J_{C3z} = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}r_3^2. \tag{4}$$

3. Все скорости, входящие в T_1, T_2 и T_3 (ω_2, ω_3, υ_{C3}), выразим через обобщенную скорость υ_1. Из рис. Д8 следует, что $\upsilon_1 = \omega_2 R$, то есть

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_1}{R}, \tag{5}$$

а также $\upsilon_{C3} = \omega_2 r_2$, откуда, с учетом (5), получаем

$$\upsilon_{C3} = \frac{r_2}{R}\upsilon_1. \tag{6}$$

Точка K – мгновенный центр скоростей катка, следовательно, $\omega_3 = \dfrac{\upsilon_{C3}}{r_3}$; подставляя (6), находим

$$\omega_3 = \frac{r_2}{r_3 R}\upsilon_1. \tag{7}$$

Подставляя (4)-(7) в (3), а затем значения T_1, T_2, T_3 в (2), получаем

$$T = \frac{1}{2g}\left(P_1 + P_2 + \frac{3}{2}\frac{r_2^2}{R^2}P_3\right)\upsilon_1^2,$$

или

$$T = \frac{11{,}7P}{2g}\upsilon_1^2. \tag{8}$$

4. Вычислим производные, входящие в (1), учитывая (8):

$$\frac{\partial T}{\partial \upsilon_1} = 11{,}7\frac{P}{g}\upsilon_1; \qquad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \text{ так как } T \text{ не зависит от } x_1; \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \upsilon_1}\right) = 11{,}7\frac{P}{g}\frac{d\upsilon_1}{dt} = 11{,}7\frac{P}{g}a_1. \tag{10}$$

5. Найдем обобщенную силу Q. Активные силы, действующие на систему: $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$ и момент сил сопротивления M_2, направленный против

вращения шкива. Сообщим системе возможное перемещение, при котором обобщенная координата x_1 получает положительное приращение δx_1, и покажем перемещения каждого из тел; для груза 1 это будет δx_1, для шкива 2 – поворот на угол $\delta\varphi_2$, для катка 3 – перемещение δs_3 его центра. Эти перемещения указаны на рис. Д8. После этого вычислим сумму элементарных работ сил и момента на данных перемещениях; получим

$$\sum \delta A_k^a = P_1 \delta x_1 - M_2 \delta\varphi_2 - P_3 \sin\alpha\, \delta s_3. \tag{11}$$

Сила $\overline{P}_2$ работы не совершает, так как приложена к точке неподвижной оси.

Все входящие в (11) перемещения надо выразить через δx_1. Учитывая, что зависимости между элементарными перемещениями аналогичны зависимостям (5), (6) между соответствующими скоростями, получим

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_1}{R} \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta x_1}{R}, \tag{12}$$

$$\upsilon_{C3} = \frac{r_2}{R}\upsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \delta s_3 = \frac{r_2}{R}\delta x_1. \tag{13}$$

Подставляя (12), (13) в (11) и вынося δx_1 за скобки, найдем

$$\sum \delta A_k^a = \left(P_1 - \frac{M_2}{R} - \frac{r_2}{R} P_3 \sin\alpha \right) \delta x_1.$$

Коэффициент при δx_1 в полученном выражении и будет обобщенной силой Q. Следовательно,

$$Q = P_1 - \frac{M_2}{R} - P_3 \frac{r_2}{R} \sin\alpha, \tag{14}$$

или

$$Q = 4{,}3P. \tag{15}$$

6. Подставляя найденные величины (9), (10) и (15) в уравнение (1), получим

$$11{,}7 \frac{P}{g} a_1 = 4{,}3P.$$

Отсюда находим искомое ускорение a_1.

Ответ: $a_1 = 0{,}37g$.

Примечание1. Если в ответе получится $a < 0$ (или $\varepsilon < 0$), то это означает, что система движется не в ту сторону, куда было предположено. Тогда у момента M_2, направленного против вращения шкива, изменится направление и, следовательно, как видно из равенства (14), изменится величина Q, для которой надо найти новое верное значение.

Примечание 2. Если требуется найти закон изменения обобщенной координаты (закон движения груза 1), то, учитывая, что $\ddot{x}_1 = a_1$, интегрируем это уравнение и находим $x_1(t)$.

Задача Д9
(тема: “Малые линейные колебания консервативной системы с одной степенью свободы”)

Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости (рис. Д9.0 – Д9.9), состоит из ступенчатых колес 1 и 2 (однородные цилиндры) с радиусами R_1=0,4 м, r_1=0,2 м, R_2=0,5 м, r_2=0,3 м, имеющих неподвижные оси вращения; однородного стержня 3 длиной l=1,2 м, закрепленного шарнирно на одном из концов; грузов 4 и 5, подвешенных к нитям, намотанным на колеса. Расстояние $AB=2l/3$. Стержень 3 соединен с колесом 2 невесомым стержнем 6. Колеса 1 и 2 или находятся в зацеплении (рис. 0 – 4), или соединены невесомым стержнем 7 (рис. 5 – 9). К колесам и стержню 3 прикреплены пружины.

В табл. Д9 заданы массы m_i тел (кг) и жесткости c_i пружин (Н/м). Прочерки в столбцах таблицы означают, что соответствующие тела или пружины в систему не входят (на чертеже эти тела и пружины изображать не следует). Стержень 6 или 7 входит в систему, только если в него входят оба тела, соединенные этим стержнем. В результате в каждом конкретном варианте получается механизм, содержащий три или два тела.

В положении, изображенном на рисунке, система находится в равновесии. Требуется найти а) круговую частоту малых колебаний системы около этого положения равновесия; б) статическую деформацию $\lambda_{ст}$ пружины в этом положении равновесия.

Перед выполнением задания прочтите по учебнику тему: «Малые линейные колебания консервативной механической системы с одной степенью свободы». Ответьте на вопросы:

1. Какая механическая система называется консервативной?
2. Что называется числом степеней свободы системы?
3. Какой вид имеет кинетическая и потенциальная энергия консервативной системы, совершающей малые колебания?
4. Как записывается дифференциальное уравнение малых колебаний?
5. Что такое круговая частота колебаний?

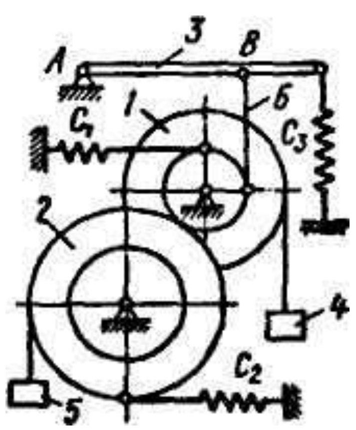


Рис. Д9.0

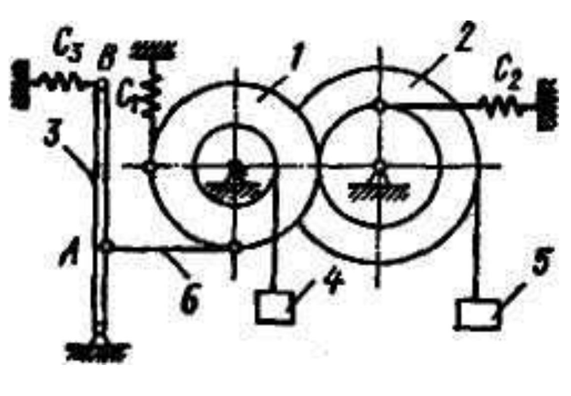


Рис. Д9.1

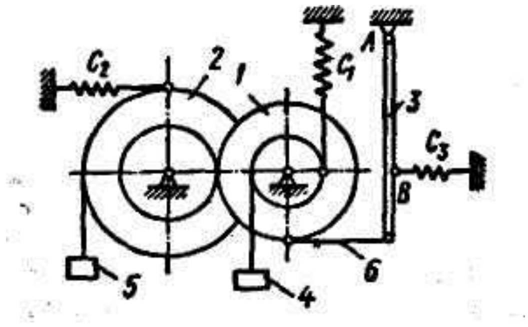


Рис. Д9.2

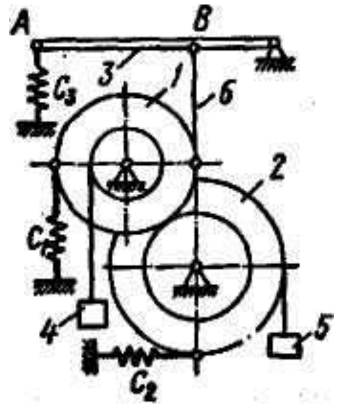


Рис. Д9.3

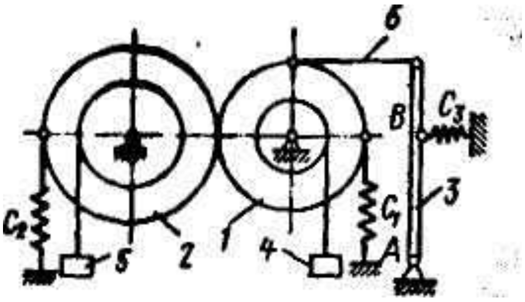


Рис. Д9.4

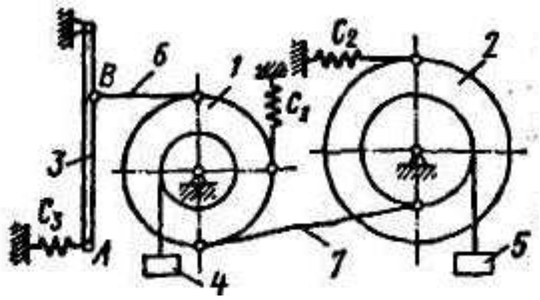


Рис. Д9.5

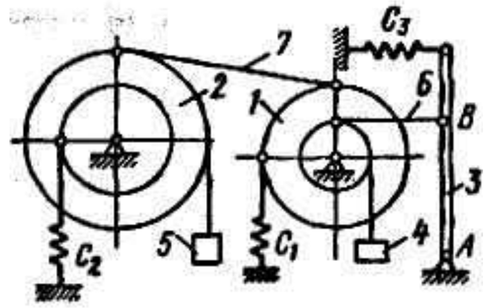


Рис. Д9.6

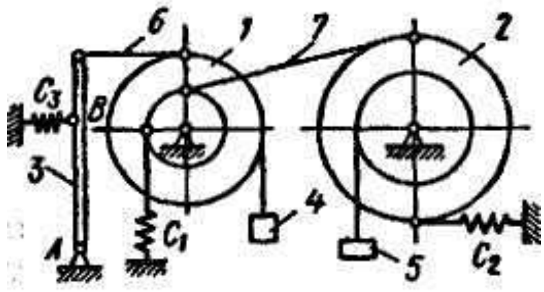


Рис Д9.7

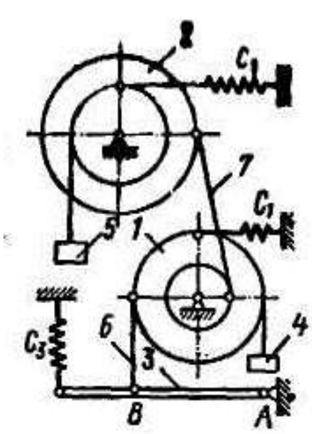


Рис. Д9.8

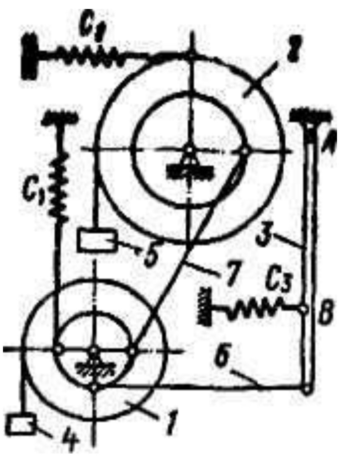


Рис. Д9.9

Таблица Д9

Номер условия	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	c_1	c_2	c_3
0	12	16	–	8	–	1200	–	–
1	10	8	4	–	–	–	–	1000
2	16	12	–	–	6	–	800	–
3	20	–	–	6	–	1500	–	–
4	–	18	–	–	4	–	1000	–
5	18	14	6	–	–	1000	–	–
6	12	–	8	4	–	–	–	1200
7	16	10	–	–	4	800	–	–
8	20	16	–	8	–	–	1200	–
9	10	–	6	4	–	1000	–	–

Малые линейные колебания консервативной системы с одной степенью свободы (краткие сведения из теории)

Рассмотрим консервативную механическую систему с одной степенью свободы. Обобщенную координату обозначим через q. Кинетическая и потенциальная энергии системы: $T = A(q)\dot{q}^2/2$, $\Pi = \Pi(q)$.

Пусть заранее известно некоторое положение равновесия системы. Будем считать, что в этом положении $q = 0$ (то есть будем отсчитывать обобщенную координату от положения равновесия); тогда $\Pi'(0) = 0$. Если $\Pi''(0) > 0$, то рассматриваемое положение равновесия устойчиво и около него система может совершать малые линейные колебания. Дифференциальное (линейное) уравнение этих колебаний: $\ddot{q} + k^2 q = 0$, где $k = \sqrt{c_0/a_0}$ – круговая частота, $c_0 = \Pi''(0)$ – коэффициент жесткости, $a_0 = A(0)$ – коэффициент инерции. Величина a_0 (всегда положительная) находится после приведения кинетической энергии системы к виду $T = a_0\dot{q}^2/2$, при этом для выражения скоростей точек и угловых скоростей тел системы через $\dot{q}$ следует использовать кинематические соотношения, отвечающие равновесной конфигурации. Величина c_0 находится после приведения потенциальной энергии системы к виду $\Pi = \text{const} + Q_0 q + c_0 q^2/2 + \ldots$, где const – постоянная (не зависящая от q), через $(\ldots)$ обозначены слагаемые третьего и выше порядков малости по q (если $c_0 \le 0$, то малые линейные колебания около рассматриваемого положения равновесия невозможны). Так как $\Pi'(0) = 0$, то $Q_0 = 0$; из этого равенства можно найти какую-либо величину, характеризующую положение равновесия, например, статическую деформацию $\lambda_{\text{ст}}$ одной из пружин.

Указания. Задача Д9 – на исследование малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия. Система имеет одну степень свободы, следовательно, ее конфигурация определяется одной обобщенной координатой q. Эта координата должна быть выбрана так, чтобы в указанном на рисунке положении равновесия $q = 0$.

Далее надо вычислить кинетическую энергию T системы и выразить все вошедшие в T скорости через обобщенную скорость $\dot{q}$, используя кинематические соотношения, отвечающие равновесной конфигурации. Тогда T примет вид $T = a_0\dot{q}^2/2$, откуда находим коэффициент инерции a_0.

Затем надо вычислить потенциальную энергию П системы. Потенциальная энергия складывается из потенциальных энергий $\Pi_{\text{тяж}}$ тел (имеющих ненулевую массу) в поле сил тяжести и потенциальной энергии $\Pi_{\text{упр}}$ пружины. $\Pi_{\text{тяж}} = mgh_C$, где h_C – высота центра масс тела над выбранным нулевым уровнем; $\Pi_{\text{упр}} = c(\lambda_{\text{ст}} + \lambda_{\text{дин}})^2/2$, где c – жесткость пружины, $\lambda_{\text{ст}}$ – статическая деформация пружины (в положении равновесия), она не зависит от q, $\lambda_{\text{дин}}$ – динамическая деформация (добавляющаяся при колебаниях), она зависит от q. Величины h_C и $\lambda_{\text{дин}}$ следует выразить через q. Отдельные слагаемые в выражении для П надо либо сразу находить с точностью до величин второго порядка малости по q, либо предварительно находить точно, а затем заменять отрезком ряда Тейлора с указанной точностью. В итоге П примет вид $\Pi = \text{const} + Q_0 q + c_0 q^2/2 + \ldots$, откуда находим коэффициент жесткости c_0 и далее круговую частоту колебаний $k = \sqrt{c_0/a_0}$.

Из условия $Q_0 = 0$ находим статическую деформацию $\lambda_{\text{ст}}$ пружины.

Пример Д9а. Находящаяся в равновесии механическая система состоит из колеса 1 радиуса R_1, ступенчатого колеса 2 с радиусами R_2 и r_2 (колеса 1 и 2 считать однородными цилиндрами) и груза 3, подвешенного на нити, намотанной на колесо 2; колеса соединены невесомым стержнем AB (рис. Д9а). К колесу 1 прикреплена вертикальная пружина жесткостью c.

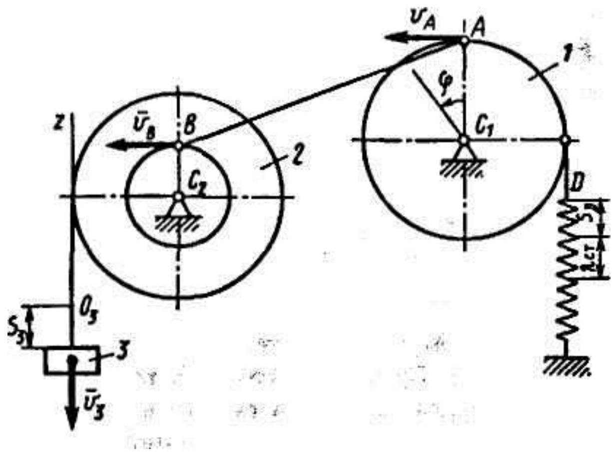


Рис Д9а.

Дано:

$m_1 = 12$ кг, $m_2 = 6$ кг, $m_3 = 3$ кг,

$R_1 = R_2 = R$, $r_2 = 0{,}5R$, $c = 900$ Н/м.

Определить: круговую частоту k малых колебаний системы около положения равновесия и значение $\lambda_{\text{ст}}$.

Решение. 1. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ поворота колеса 1 от равновесного положения (при равновесии $\varphi = 0$ и $s_D = s_3 = 0$); при движении системы, рассматривая малые колебания, считаем угол φ малым.

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме кинетических энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{1}$$

Так как колеса 1 и 2 вращаются вокруг осей O_1 и O_2, а груз 3 движется поступательно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 \upsilon_3^2, \tag{2}$$

где

$$J_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2}, \quad J_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}. \tag{3}$$

Все скорости, входящие в T_1, T_2 и T_3 (ω_1, ω_2, υ_3), выразим через обобщенную скорость $\dot\varphi$. Прежде всего, $\omega_1 = \dot\varphi$. Далее, в равновесной конфигурации $\upsilon_B = \upsilon_A$, то есть $\omega_2 r_2 = \omega_1 R_1$, откуда $\omega_2 = \omega_1 R_1 / r_2$ и $\upsilon_3 = \omega_2 R_2 = \omega_1 R_1 R_2 / r_2$. Окончательно, учитывая, что $R_1 = R_2 = R$, $r_2 = 0{,}5R$, получим

$$\omega_1 = \dot\varphi, \ \omega_2 = 2\dot\varphi, \ \upsilon_3 = 2R\dot\varphi, \tag{4}$$

Подставляя величины (3), где $R_1 = R_2 = R$ и (4) в равенства (2), получим из равенства (1) $T = a_0 \dot\varphi^2 / 2$, где

$$a_0 = (0{,}5 m_1 + 2m_2 + 4m_3) R^2. \tag{5}$$

3. Определим потенциальную энергию Π системы.

$$\Pi = \frac{1}{2} c(\lambda_{\text{ст}} + \lambda_{\text{дин}})^2 + m_3 g h_{C3}. \tag{6}$$

При повороте колеса 1 на угол φ пружина получит дополнительную (к $\lambda_{\text{ст}}$) деформацию $s_D = R_1\varphi = R\varphi$. Следовательно, $\lambda_{\text{дин}} = R\varphi$. За нулевой уровень h_{C3} выберем уровень, отвечающий равновесной конфигурации. Тогда $h_{C3} = -s_3$. Чтобы выразить s_3 через φ, заметим, что зависимость между малыми перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями; из последнего из равенств (4) тогда находим $s_3 = 2R\varphi$. Подставляя все найденные величины в равенство (6), получим

$$\Pi = \frac{1}{2} c(\lambda_{\text{ст}} + R\varphi)^2 - 2m_3 g R\varphi = \frac{c\lambda_{\text{ст}}^2}{2} + (c\lambda_{\text{ст}} R - 2m_3 g R)\varphi + \frac{1}{2} c R^2 \varphi^2. \tag{7}$$

Из равенства (7) следует, что $c_0 = cR^2$; учитывая (5), найдем

$$k=\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}=\sqrt{\frac{2c}{m_1+4m_2+8m_3}}=5{,}48\ \text{с}^{-1}.$$

4. Из равенства (7) также следует, что $c\lambda_{\text{ст}}R-2m_3gR=0$, откуда

$$\lambda_{\text{ст}}=2m_3g/c=0{,}065\ \text{м}.$$

Ответ: $k=5{,}48\ \text{с}^{-1}$, $\lambda_{\text{ст}}=0{,}065\ \text{м}$.

Пример Д9б. Находящаяся в равновесии механическая система состоит из однородного стержня 1, ступенчатого колеса 2 с радиусами R_2 и r_2 (колесо 2 считать однородным цилиндром), груза 3, подвешенного на нити, перекинутой через невесомый блок 4 и намотанной на колесо 2, и невесомого стержня 5, соединяющего тела 1 и 2 (рис. Д9б). В точке O_1 – шарнир; в точке A прикреплена горизонтальная пружина жесткостью c.

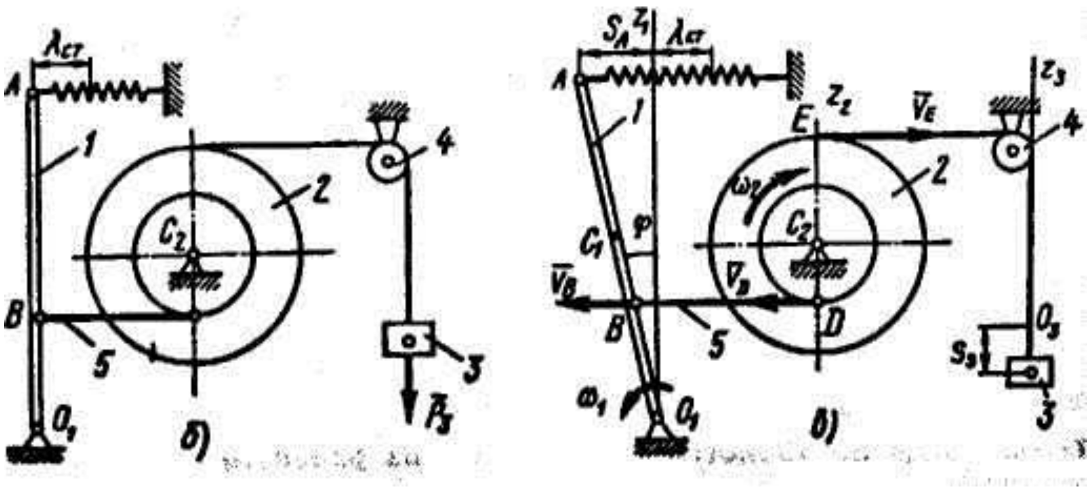


Рис. Д9б,в

Дано: m_1 = 10 кг, m_2 = 12 кг, m_3 = 4 кг, R_2 =R, r_2 = 0,5R, c = 750 Н/м, $O_1A=l=1\,\text{м}$, O_1B = l/3.

Определить: круговую частоту k малых колебаний системы около положения равновесия и значение $\lambda_{\text{ст}}$.

Решение. 1. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ отклонения стержня от вертикали; при движении системы, рассматривая малые колебания, считаем угол φ малым.

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме кинетических энергий всех тел:

$$T=T_1+T_2+T_3. \tag{1}$$

Так как стержень 1 и колесо 2 вращаются вокруг осей O_1 и C_2 соответственно, а груз 3 движется поступательно, то

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2, \tag{2}$$

где

$$J_1 = \frac{m_1 l^2}{3}, \quad J_2 = \frac{m_2 R^2}{2}. \tag{3}$$

Все скорости, входящие в T_1, T_2 и T_3 (ω_1, ω_2, υ_3), выразим через обобщенную скорость $\dot\varphi$. Прежде всего, $\omega_1 = \dot\varphi$. Далее, в равновесной конфигурации $\upsilon_D = \upsilon_B = \omega_1 l/3$. Учитывая это, находим $\omega_2 = \upsilon_D/r_2 = \upsilon_D/0{,}5R$ и $\upsilon_3 = \upsilon_E = \omega_2 R$. Таким образом, окончательно,

$$\omega_1 = \dot\varphi,\ \omega_2 = 2l\dot\varphi/3R,\ \upsilon_3 = 2l\dot\varphi/3, \tag{4}$$

Подставляя величины (3) и (4) в равенства (2), получим из (1) $T = a_0\dot\varphi^2/2$, где

$$a_0 = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{2m_2}{9} + \frac{4m_3}{9}\right)l^2. \tag{5}$$

3. Определим потенциальную энергию Π системы.

$$\Pi = \frac{1}{2}c(\lambda_{\text{ст}} + \lambda_{\text{дин}})^2 + m_1 g h_{C1} + m_1 g h_{C2} + m_3 g h_{C3}. \tag{6}$$

Величины $\lambda_{\text{дин}}$, h_{C1}, h_{C2}, h_{C3} следует выразить через φ. В произвольном положении системы (см. рис. Д9в) пружина получит дополнительную деформацию, равную s_A, причем, ввиду малости φ, можно считать, что $s_A = l\varphi$. Следовательно, $\lambda_{\text{дин}} = \ell\varphi$. За нулевой уровень h_{C1} выберем уровень шарнира O_1. Тогда $h_{C1} = 0{,}5\,l\cos\varphi$. Раскладывая $\cos\varphi$ в ряд и сохраняя величины до второго порядка малости включительно, получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{и} \quad h_{C1} = \frac{\ell}{2}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right).$$

(В случае, когда стержень O_1A горизонтален (поверните рис. Д9в на 90°), будет $h_{C1} = 0{,}5\,l\sin\varphi$, и нужная точность получится, если считать $\sin\varphi = \varphi$.) За нулевой уровень h_{C2} выберем уровень шарнира C_2. Тогда $h_{C2} = 0$. За нулевой уровень h_{C3} выберем уровень, отвечающий равновесной конфигурации. Тогда $h_{C3} = -s_3$. Чтобы выразить s_3 через φ, заметим, что зависимость между малыми перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями; из последнего из равенств (4) тогда находим $s_3 = 2\ell\varphi/3$ и $h_{C3} = -\,2\ell\varphi/3$. Подставляя все найденные величины в равенство (6), получим

$$\Pi = \frac{1}{2}c(\lambda_{\text{ст}} + l\varphi)^2 + \frac{1}{2}m_1 g l\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) - \frac{2}{3}m_3 g l\varphi =$$

$$= \frac{c\lambda_{\text{ст}}^2 + m_1 g l}{2} + \left(c\lambda_{\text{ст}} l - \frac{2}{3}m_3 g l\right)\varphi + \frac{1}{2}\left(c l^2 - \frac{m_1 g l}{2}\right)\varphi^2. \qquad (7)$$

Из равенства (7) следует, что $c_0 = (cl - 0{,}5 m_1 g)l$; учитывая (5), найдем

$$k = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}} = \sqrt{\frac{9(2cl - m_1 g)}{2(3m_1 + 2m_2 + 4m_3)l}} = 9{,}49\ \text{с}^{-1}.$$

4. Из равенства (7) также следует, что $c\lambda_{\text{ст}} l - \frac{2}{3}m_3 g l = 0$, откуда

$$\lambda_{\text{ст}} = 2m_3 g/3c = 0{,}035\ \text{м}.$$

Ответ: $k = 9{,}49\ \text{с}^{-1}$, $\lambda_{\text{ст}} = 0{,}035\ \text{м}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО ДИНАМИКЕ

1. Основные законы динамики точки.
2. Дифференциальные уравнения движения точки в векторной, координатной и естественной формах.
3. Первая и вторая задачи динамики точки (постановка каждой задачи и ее решение).
4. Механическая система материальных точек. Внутренние и внешние силы. Свойства внутренних сил. Центр масс системы.
5. Теорема о движении центра масс системы. Частные случаи.
6. Количество движения точки и системы. Способы вычисления.
7. Теоремы об изменении количества движения точки и системы.
8. Понятие о моментах инерции. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Моменты инерции некоторых тел (кольцо, диск, стержень).
9. Момент силы относительно центра и оси.
10. Момент количества движения точки относительно центра и оси.
11. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси.
12. Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно этой оси.
13. Теоремы об изменении кинетического момента точки (момента количества движения точки) и механической системы относительно центра и оси. Частные случаи.
14. Кинетическая энергия точки и механической системы. Вычисление кинетической энергии тела в частных случаях (поступательное движение тела, вращение тела вокруг неподвижной оси, плоскопараллельное движение тела).

15. Элементарная работа силы. Различные формы записи. Полная работа силы. Случай, когда работа силы равна нулю. Мощность силы.
16. Работа силы тяжести, упругой силы; работа силы, приложенной к вращающемуся телу; работа и мощность пары сил.
17. Теоремы об изменении кинетической энергии точки и системы.
18. Дифференциальные уравнения движения твердых тел в частных случаях (поступательное, вращательное, плоскопараллельное движения)
19. Принцип Даламбера для точки. Сила инерции (величина, направление).
20. Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции. Уравнения равновесия сил.
21. Связи. Уравнения связей. Число степеней свободы механической системы. Обобщенные координаты и скорости.
22. Возможные перемещения механической системы. Работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи.
23. Принцип возможных перемещений.
24. Обобщенные силы. Вычисление обобщенных сил.
25. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа).
26. Малые линейные колебания консервативной механической системы.

СОДЕРЖАНИЕ