

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В третьей контрольной работе выполняются три задачи:

1. Расчет линейной электрической цепи при несинусоидальных напряжениях и токах.
2. Расчет переходных процессов в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами при постоянном напряжении источника питания.
3. Расчет переходных процессов в линейной электрической цепи при переменном напряжении источника питания.

ОПЕЧАТКИ

На стр. 20, строки 5 и 6 сверху,

Следует читать:

$$Z(j\omega) = r + \frac{j\omega L \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{j\omega L - j \frac{1}{\omega C}} = 69,3 e^{-j43,83^\circ} \text{ Ом.}$$

Значения P_k — $j\omega$ при $P_k = P_1, P_k = P_2$ будут:

1064—6000

3. Нейман Л. Р., Демьян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 1. — М.: Энергия, 1981.
4. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. — М.: Энергия, 1978.
5. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1978.
6. Калдянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1972.
7. Подиванов К. М. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. —

8. Шегес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 1982.

9. Бессонов Л. А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. — М.: Высшая школа, 1975.

10. Быхов А. П., Сапков Г. Н. Теоретические основы электротехники. Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами классическими методами. — М.: ВЭИИТ, 1972.

11. Поливанов К. М. Задачник по теоретическим основам электротехники. — М.: Энергия, 1973.

Задача № 1

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ И ТОКАХ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАЧИ

На рис. 1 показана цепь с источником периодической несинусоидальной ЭДС. График функции $e = f(\omega t)$ изображен на рис. 2. Амплитуда ЭДС, угловая частота первой гармоники и параметры цепи даны в табл. 1.

Для расчета данной цепи необходимо:

1. Разложить аналитически в ряд Фурье заданную периодическую несинусоидальную ЭДС $e = f(\omega t)$, ограничившись вычислением первых трех гармоник; написать уравнение мгновенного значения ЭДС.

2. Определить действующее значение несинусоидальной ЭДС, заданной графиком на рис. 2.

3. Вычислить действующее значение тока на неразветвленном участке цепи и записать закон его изменения $i = f(\omega t)$ с учетом указанных выше членов разложения в ряд Фурье.

4. Построить график тока на неразветвленном участке цепи. На графике показать первые три гармоники и суммарную кривую, полученную в результате графического сложения отдельных гармоник.

5. Определить активную, реактивную, полную мощности цепи.

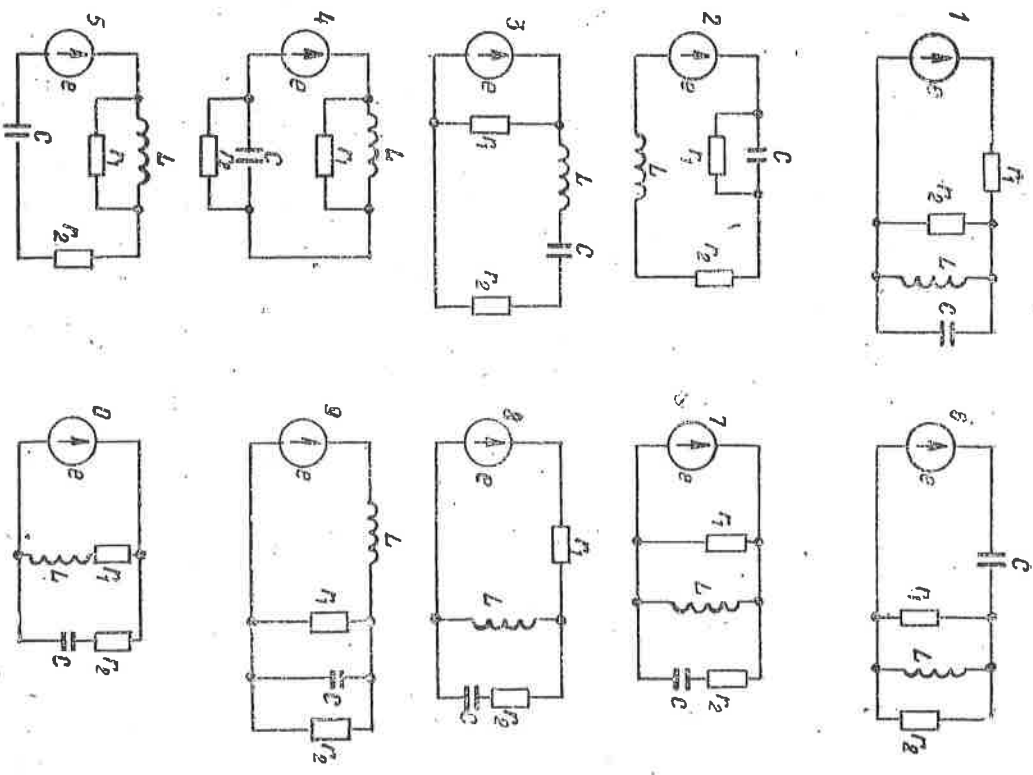


Рис. 1

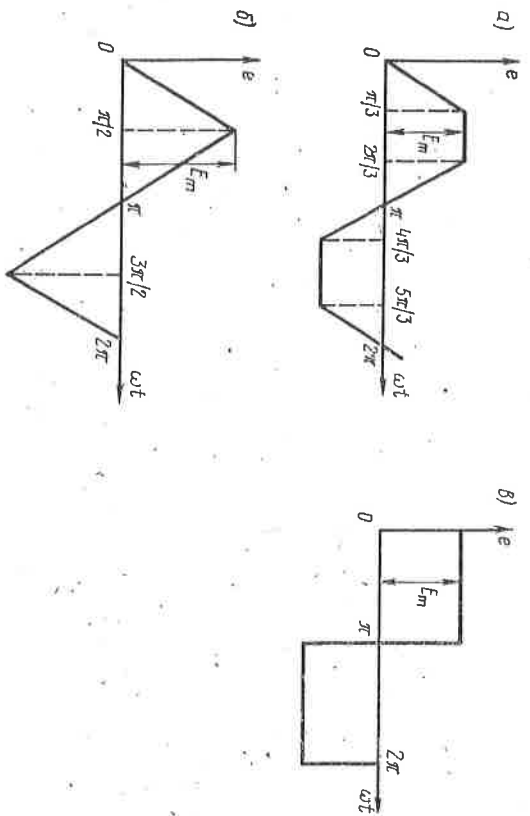


Рис. 2

Числовые данные параметров схемы

Последняя цифра шифра	Форма кривой ЭДС	$E_m, В$	$\omega, \frac{рад.}{с}$	$r_1, Ом$	$r_2, Ом$	$L, мГ$	$C, мкФ$
1	рис. 2, а	100	1000	25	20	15	40
2	рис. 2, б	50	1000	10	10	10	20
3	рис. 2, в	60	5000	40	35	12	5
4	рис. 2, а	120	5000	120	90	20	2,5
5	рис. 2, а	80	10000	45	65	4	3,33
6	рис. 2, б	150	1000	20	25	20	40
7	рис. 2, в	100	5000	35	40	6	5
8	рис. 2, в	80	1000	15	20	15	20
9	рис. 2, б	120	5000	100	100	20	2
0	рис. 2, б	150	10000	25	30	4	1

Таблица 1

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для выполнения расчета электрической цепи с источником периодической несинусоидальной ЭДС необходимо заданную ЭДС разложить в ряд Фурье, вычислить первые три гармоники. Разложение в ряд Фурье заданных кривых приведено в прил. 1.

Токи в ветвях и напряжения на участках цепи определяются отдельно для каждой гармонической составляющей. При этом следует помнить, что для гармоники порядка K индуктивное и емкостное сопротивление будут иметь значения:

$$X_{LK} = K\omega L; \quad X_{CK} = \frac{1}{K\omega C}$$

Токи отдельных гармоник определяются комплексным методом.

Действующие значения несинусоидального напряжения и тока не зависят от начальных фаз гармоник и определяются по действующим значениям их гармонических составляющих:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2}{2} + \frac{U_{2m}^2}{2} + \dots}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \dots}$$

Активная, реактивная и полная мощности цепи определяются по формулам:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k$$

$$S = UI$$

При построении волновой диаграммы токов следует помнить, что положительные начальные фазы гармоник откладываются влево, а отрицательные вправо от начала координат. Начальная фаза откладывается в масштабе, соответствующем порядку гармоники. Если масштаб для первой гармоники

ки $m_{\omega t} = 2 \frac{град}{мм}$, то для третьей — $m_{3\omega t} = 6 \frac{град}{мм}$, а для

пятой — $m_{5\omega t} = 10 \frac{град}{мм}$

Задача № 2

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ЭДС ИСТОЧНИКА ПИТАНИЯ

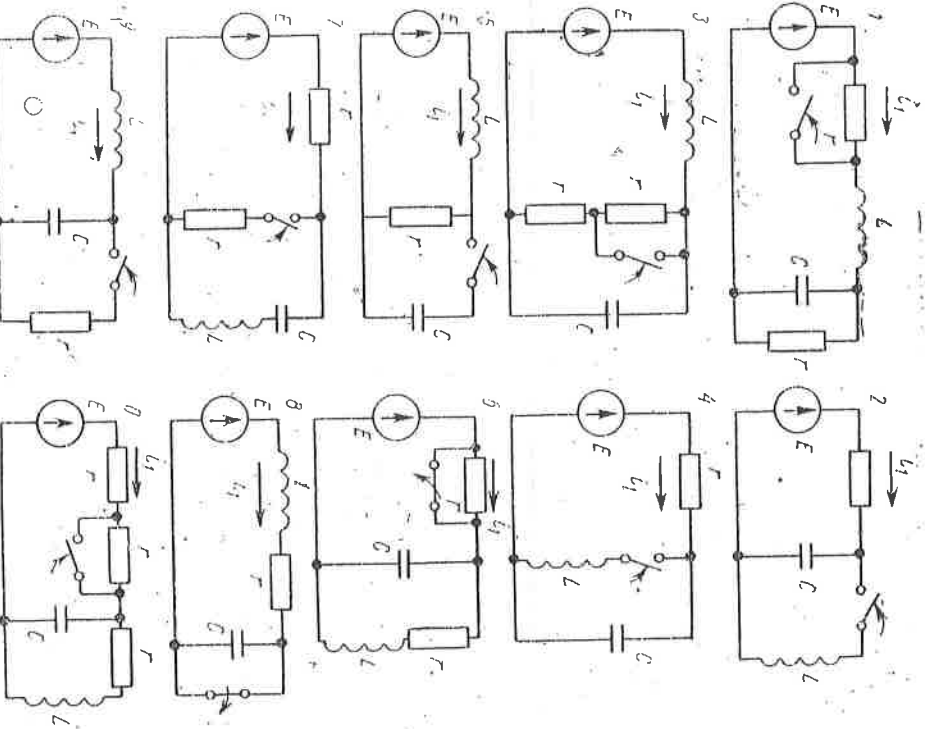
Таблица 2

Номер строки	$r, \text{ Ом}$	$L, \text{ Г}$	$C, \text{ мкФ}$
1	10	0,1	100
2	8	0,02	31,3
3	6	0,06	83,3
4	15	0,025	80
5	48	0,06	200
6	8	0,05	100
7	5	0,1	120
8	10	0,08	100
9	15	0,1	40
0	10	0,05	50

В электрической цепи (рис. 3) в результате коммутации возникает переходный процесс. Параметры цепи для каждого варианта приведены в табл. 2, постоянная ЭДС источника $E = 120 \text{ В}$.

Определить закон изменения во времени тока $i_1(t)$ и построить его график.

Примечание. Студенты специальностей ЭТ и ЭВМ решают задачу № 2 классическим и операторным методами. Студенты специальности ЭМ решают задачу № 2 классическим методом.



РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ЕЕ НА СИНУСОИДАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Задача № 3

Разветвленная электрическая цепь (рис. 4) включается на синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Определить закон изменения во времени тока $i_1(t)$ и построить его график, если включение производится в момент времени $t = 0$. Угловая частота $\omega = 314 \text{ рад/с}$. Амплитуда U_m , начальная фаза ψ напряжения и параметры цепи приведены в табл. 3. Задачу решить операторным методом.

Примечание. Задачу № 3 решают студенты специальности ЭМ.

Таблица 3

Номер строки	$U_m, \text{ В}$	$\psi, \text{ град.}$	$r_1, \text{ Ом}$	$r_2, \text{ Ом}$	$L_1, \text{ Г}$	$L_2, \text{ Г}$	$C_1, \text{ мкФ}$	$C_2, \text{ мкФ}$
1	150	30	10	20	0,01	0,015	100	150
2	200	-45	14	28	0,012	0,02	80	120
3	180	0	20	30	0,02	0,03	0	100
4	120	60	12	24	0,01	0,015	100	120
5	100	90	25	50	0,05	0,07	40	60
6	250	-20	25	40	0,04	0,07	60	100
7	160	45	20	36	0,012	0,01	80	120
8	100	-60	10	20	0,012	0,015	100	150
9	140	70	15	25	0,01	0,02	80	100
0	200	20	20	40	0,02	0,03	50	75

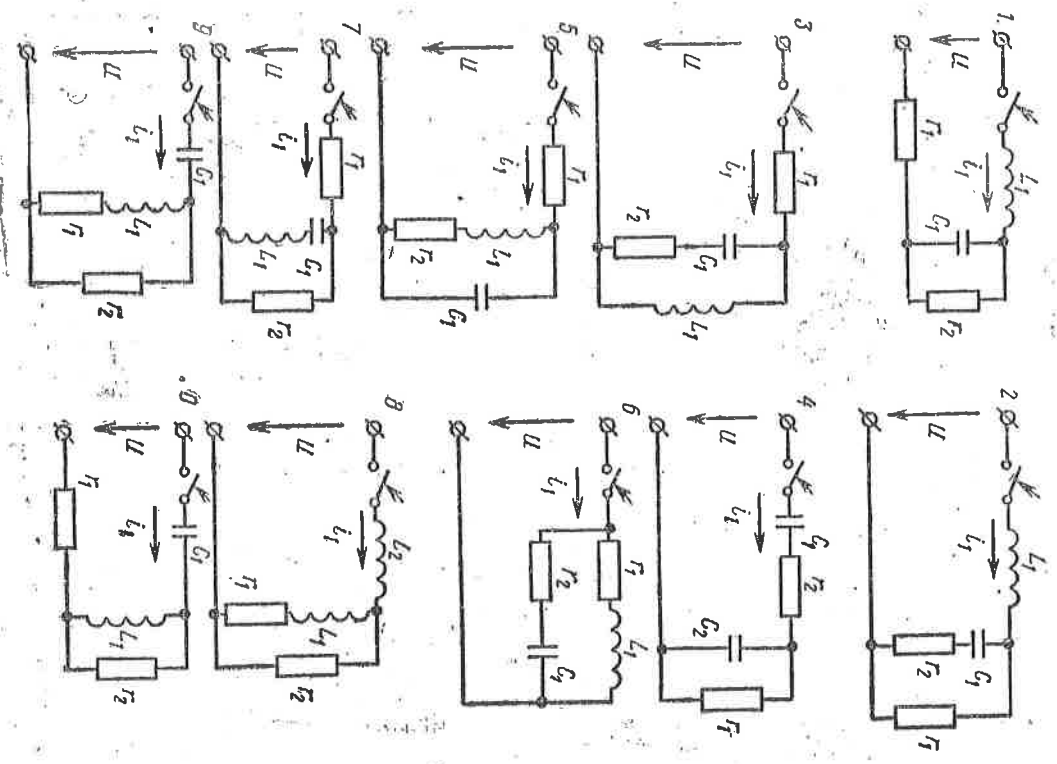


Рис. 4

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Переходные процессы возникают в электрических цепях при переходе от одного установившегося режима работы к другому установившемуся режиму. Смена режимов происходит в результате коммутаций (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и т. п.). Классический метод расчета переходных процессов сводится к следующему:

1. На схеме цепи после коммутации указывают положительные направления токов в ветвях. Затем на основании законов Кирхгофа составляют систему уравнений для мгновенных значений токов и напряжений переходного режима. Так как падение напряжения на сопротивлении $U = r \cdot i$, на индуктивности $U_L = L \frac{di}{dt}$ и на емкости $U_C = \frac{1}{C} \int idt$, то по

законам Кирхгофа будет составлена система интегрально-дифференциальных уравнений заданной цепи.

2. Полученную систему уравнений решают относительно искомой функции (тока или напряжения). В результате получают неоднородное линейное дифференциальное уравнение, порядок которого равен числу независимых мест накопления энергии. В случае двух независимых мест накопления энергии в схеме линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$a \frac{d^2 i}{dt^2} + b \frac{di}{dt} + ci = f(u),$$

где a, b, c — коэффициенты, зависящие от параметров цепи;
 $f(u)$ — неоднородный член уравнения, зависящий от величины и формы приложенного к цепи напряжения.

3. Решают неоднородное линейное дифференциальное уравнение, в результате чего находят искомый ток или напряжение переходного процесса.

Решение дифференциального уравнения складывается из общего решения однородной части этого уравнения (правая часть равна нулю) и частного решения неоднородного уравнения, определяемого видом функции $f(u)$.

Частное решение выражает принужденный режим, задаваемый источниками энергии, а общее решение — свободный режим. Таким образом, ток переходного процесса $i = i_{пр} + i_{св}$, а напряжение $u = U_{пр} + U_{св}$. Принужденные составляющие токов и напряжений совпадают с установившимися значениями.

определяются при помощи методов, изученных в первой части курса ТОЭ.

Характер переходного процесса зависит от параметров цепи и определяется корнями характеристического уравнения $ap^2 + bp + c = 0$.

Если корни вещественные, отрицательные и разные ($p_1 < 0, p_2 < 0$), то режим будет апериодическим, свободная составляющая тока запишется в виде:

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Если корни комплексные и сопряженные ($p_1 = -\delta + j\omega_1, p_2 = -\delta - j\omega_1$), то в цепи будет колебательный режим, свободная составляющая тока

$$i_{св} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \gamma)$$

При наличии равных отрицательных корней ($p_1 = p_2 = -p < 0$) возникает критический режим, при котором $i_{св} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}$.

Для определения постоянных интегрирования A, A_1, A_2 , необходимо определить ток и его производную в момент коммутации ($t=0$). Для этого сначала определяют начальные значения тока на участках цепи с индуктивностью и напряжения на участках с емкостью путем расчета цепи до коммутации и использования законов коммутации. Подставляя эти значения в исходные дифференциальные уравнения и подставляя $t=0$, определяют начальные значения токов в отдельных ветвях.

Производная от тока в индуктивности находится непосредственно из уравнения, написанного для контура, в который входит ветвь с индуктивностью. Производные от токов в других ветвях схемы определяются из уравнения, в котором нет ветви с индуктивностью, после его дифференцирования и перехода к $t=0$, причем напряжение на конденсаторе нужно писать в форме интеграла:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

что дает

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C}$$

В некоторых случаях нужно использовать и первый закон Кирхгофа для производных от токов:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$$

Характеристическое уравнение находится из входного соотношения схемы в операторной форме.

Операторный метод расчета переходных процессов заключается в том, что функция $f(t)$ [обычно ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$] вещественного переменного t (времени), называемая оригиналом, заменяется соответствующей функцией $F(p)$ комплексного переменного p , называемой изображением.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Указанные функции связаны соотношением $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$, называемым прямым преобразованием Лапласа. Сопряженно

$$F(p) \doteq f(t)$$

При переходе к изображению дифференциальные и интегральные уравнения преобразуются в алгебраические. Постоянное напряжение U будет записываться в операторной форме как U/p :

$$U(p) = \frac{U}{p}$$

Изображение гармонического напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ будет

$$U(p) = U_m \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$$

Операторные сопротивления цепей записываются так же, как и сопротивления для тех же цепей в комплексной форме, в которых $j\omega$ заменено на p . Так для цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов r, L и C , операторное сопротивление

$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}$$

Напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости в операторной форме:

$$U_r(p) = rI(p);$$

$$U_L(p) = pLI(p) = Li(0);$$

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p}$$

где $i(0)$ и $i_c(0)$ — начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости.

Уравнения для изображений тока и напряжения любой цепи могут быть получены по законам Ома и Кирхгофа, написанных для операторных схем замещения. Полученную систему уравнений в операторной форме решают относительно изображения искомого тока или напряжения. В общем случае выражение для тока в любой ветви в операторной форме имеет вид

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

где $F_1(p)$ и $F_2(p)$ — алгебраические многочлены, степени которых соответственно равны m и n , причем $m < n$.

Переход от изображения к оригиналу осуществляется при помощи теоремы разложения:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

где p_k — корни уравнения $F_2(p) = 0$;

n — число корней;

$F_1(p_k)$ — значение функции $F_1(p)$ при $p = p_k$;

$F_2'(p_k)$ — значение производной функции $F_2(p)$ при $p = p_k$.

Теорема разложения в представленном выше виде действительна только для некратных корней. В случае, когда знаменатель $F_2(p)$ имеет кратные корни (p_1 кратности m_1 , p_2 кратности m_2 , p_n кратности m_n), оригинал вычисляется по формуле

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{d \cdot p^{m_k-1}} \cdot \frac{F_1(p) \cdot e^{p t}}{F_2(p)} \right]_{p = p_k}.$$

Выражение, стоящее в знаменателе квадратной скобки, надо сначала сократить на $(p - p_k)^{m_k}$ и лишь после этого дифференцировать.

Для случаев подключения источника постоянного или гармонического напряжения к пассивной цепи с входным операторным сопротивлением $Z(p)$ на основании теоремы разложения получены простые расчетные формулы, называемые формулами включения.

При включении на постоянное напряжение ток в цепи

$$i(t) = \frac{U}{Z(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{U}{p_k Z'(p_k)} e^{p_k t},$$

где p_k — корни уравнения $Z(p) = 0$.

$$i = U \sin(\omega t + \psi)$$

величина тока

$$i(t) = \text{Im} \left[\frac{U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi)}}{Z(j\omega)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_m e^{j\psi}}{(p_k - j\omega) Z'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \right],$$

где U_m — амплитуда приложенного напряжения;

ψ — начальная фаза приложенного напряжения;

$Z(j\omega)$ — полное сопротивление цепи в комплексной форме;

$Z'(p_k)$ — производная операторного сопротивления при $p = p_k$.

Знак Im означает, что от полученного комплексного уравнения берется коэффициент при мнимой части.

Пример 1.

В электрической цепи (рис. 5) сопротивление $r_0 = r = 50$ Ом, индуктивность $L = 0,25$ Г, емкость $C = 50$ мкФ. Постоянное напряжение источника $U = 100$ В. Определите закон изменения переходного тока на неразветвленном участке цепи и построить его график. Задачу решить классическим и операторным методами.

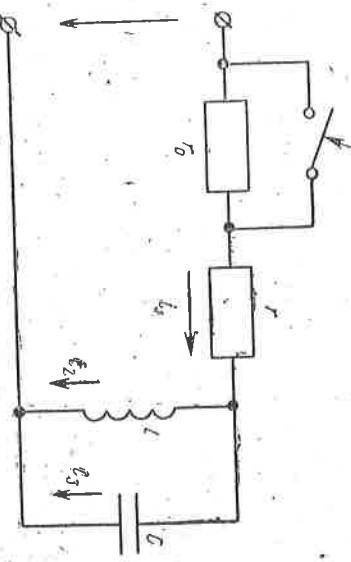


Рис. 5.

Решение классическим методом

1. Расчет режима до коммутации (контакты разомкнуты). Токи в ветвях цепи:

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{U}{r_0 + r} = 1 \text{ A}; \quad i_3(0_-) = 0,$$

напряжение на конденсаторе $u_C(0_-) = 0$.

По первому закону коммутации $i_2(0_+) = i_2(0_-) = 1 \text{ A}$; по второму закону коммутации $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$.

2. Расчет принужденного режима после коммутации (контакты замкнуты). Токи в ветвях цепи:

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{U}{r} = 2 \text{ A}; \quad i_{3np} = 0.$$

3. Расчет искомого тока и его производной для момента коммутации ($t=0$).

По законам Кирхгофа составляем уравнения для схемы после коммутации:

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (1)$$

$$U = r i_1 + L \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

$$U = r i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt \quad (3)$$

Используя уравнение (3) для момента $t=0$ с учетом того, что $u_C(0) = 0$, найдем: $i_1(0) = \frac{U}{r} = 2 \text{ A}$. Из уравнения (1) при

$t=0$ вычислим $i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 1 \text{ A}$.

Найдем производную искомого тока. Для этого продифференцируем уравнение (3):

$$0 = r \frac{di_1}{dt} + \frac{i_3}{C}.$$

Откуда

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{i_3}{rC}.$$

Следовательно,

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{i_3(0)}{rC} = -400 \text{ A/c}$$

4. Определение корней характеристического уравнения. Входное сопротивление для схемы после коммутации в операторной форме приравняем нулю:

$$Z(p) = r + \frac{Lp}{Cp} \frac{1}{1} = r + \frac{Lp}{LCp^2 + 1} = \frac{rLCp^2 + r + Lp}{LCp^2 + 1} = 0$$

Характеристическое уравнение $rLCp^2 + Lp + r = 0$, или

$$p^2 + \frac{1}{rC} p + \frac{1}{LC} = 0$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2rC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

После подстановки численных значений заданных величин получим:

$$p_1 = -200 + j200;$$

$$p_2 = -200 - j200.$$

Так как корни характеристического уравнения получились сопряженными комплексными числами, то переходный процесс в электрической цепи будет колебательный характер.

5. Определение постоянных интегрирования и закона изменения во времени искомого тока.

Переходный ток на неразветвленном участке цепи

$$i_1 = i_{1np} + i_{1cs} = i_{1np} + A e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \gamma),$$

а его производная

$$\frac{di_1}{dt} = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \gamma) + A \omega_1 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \gamma).$$

Находим значения тока и его производной для момента времени $t=0$:

$$i_1(0) = i_{1np} + A \sin \gamma;$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\delta A \sin \gamma + A \omega_1 \cos \gamma.$$

После подстановки численных значений получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} 2 &= 2 + A \sin \gamma, \\ -400 &= -200 A \sin \gamma + A 200 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Совместное решение этих уравнений дает $A = -2$, $\gamma = 0$. Следовательно, искомый ток

$$i_1 = 2 - 2e^{-200t} \sin 200t.$$

Для построения графика $i_1(t)$ вычислим мгновенные значения тока для различных моментов времени, начиная от нуля, через каждую миллисекунду в пределах до одного периода. Результаты расчета сведем в табл. 4. График тока $i_1(t)$ построен на рис. 6.

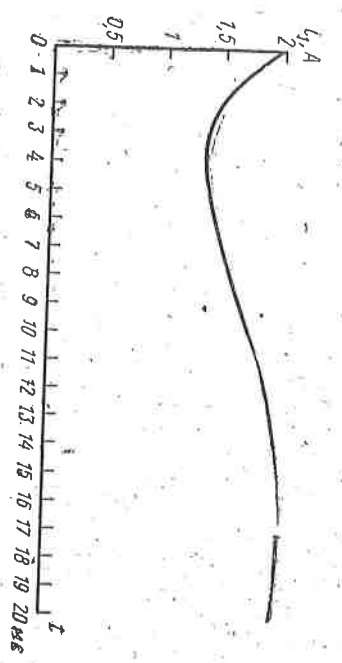


Рис. 6

Решение операторным методом

Начальные условия переходного процесса в электрической цепи определены в первом пункте предыдущего расчета: $i_2(0) = 1$ А, $i_C(0) = 0$. С учетом этого оставим операторную схему замещения цепи (рис. 7) и напишем для нее уравнения по законам Кирхгофа:

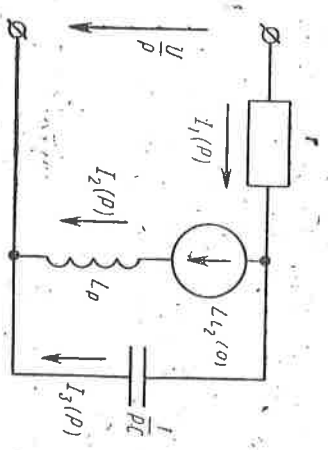


Рис. 7

$$I_1(p) = I_2(p) + I_3(p);$$

$$rI_1(p) + LpI_2(p) = \frac{U}{p} + Li_2(0);$$

$$rI_1(p) + \frac{1}{Cp} I_3(p) = \frac{U}{p}.$$

Таблица 4

t, мс	200t, рад.	e^{-200t}	200t, град.	$\sin 200t$	$i_1 = 2 - 2e^{-200t} \sin 200t$, А
0	0	1	0	0	2
1	0,2	0,819	11,47	0,199	1,675
2	0,4	0,670	22,93	0,388	1,41
3	0,6	0,549	34,40	0,564	1,381
4	0,8	0,449	45,86	0,717	1,357
5	1,0	0,368	57,33	0,843	1,380
6	1,2	0,301	68,80	0,933	1,439
7	1,4	0,247	80,27	0,986	1,513
8	1,6	0,202	91,74	1,000	1,596
9	1,8	0,165	103,21	0,973	1,679
10	2,0	0,135	114,66	0,909	1,755
11	2,2	0,111	126,13	0,807	1,821
12	2,4	0,091	137,60	0,680	1,877
13	2,6	0,074	149,07	0,517	1,924
14	2,8	0,061	160,54	0,334	1,960
15	3,0	0,050	171,99	0,139	1,987
16	3,2	0,041	183,44	-0,061	2,005
17	3,4	0,033	194,91	-0,256	2,016
18	3,6	0,027	206,38	-0,444	2,024
19	3,8	0,022	217,85	-0,613	2,027
20	4,0	0,018	229,32	-0,759	2,028

Решив эту систему относительно тока $I_1(p)$, получим:

$$I_1(p) = \frac{LCUp^2 + Li_2(0)p + U}{LCrp^3 + Lp^2 + rp}$$

После подстановки числовых значений получим:

$$I_1(p) = \frac{2p^2 + 400p + 160000}{p^3 + 400p^2 + 80000 \cdot p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Для нахождения оригинала определим корни знаменателя, для чего приравняем его нулю:

$$p^3 + 400p^2 + 80000p = 0;$$

$$p_1 = 0; p_2 = -200 + j200; p_3 = -200 - j200.$$

Так как знаменатель имеет три корня, то сумма в формуле разложения состоит из трех слагаемых:

$$i_1(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t}.$$

Найдем числители слагаемых:

$$F_1(p_1) = 16 \cdot 10^4; F_1(p_2) = (8 - j8) 10^4; F_1(p_3) = (8 + j8) 10^4.$$

Производная знаменателя

$$F_2'(p) = 3p^2 + 800p + 80000.$$

Подставим вместо p соответствующие корни и получим знаменатели слагаемых:

$$F_2'(p_1) = 80000; F_2'(p_2) = (-8 - j8) 10^4; F_2'(p_3) = (-8 + j8) 10^4.$$

Полученные значения подставим в формулу теоремы разложения:

$$i_1(t) = \frac{16 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^4} e^{0 \cdot t} + \frac{(8 - j8) 10^4}{(-8 - j8) 10^4} e^{(-200 + j200)t} + \frac{(8 + j8) 10^4}{(-8 + j8) 10^4} \cdot e^{(-200 - j200)t} = 2 - e^{-200t} [e^{j200t} - 90^\circ] + e^{-j200t - 90^\circ}]_1.$$

Избавляясь от комплексной формы, получим:

$$i_1(t) = 2 - 2e^{-200t} \sin 200t.$$

Пример 2.

Электрическая цепь (рис. 8) с сопротивлением $r = 50$ Ом, индуктивностью $L = 300$ мГ и емкостью $C = 100$ мкФ включается на синусоидальное напряжение $u = 1000 \sin 314 t$ В.

Найти закон изменения переходного тока $i_1(t)$. Задачу решить операторным методом.

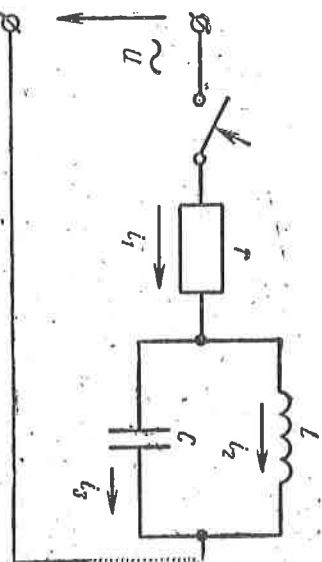


Рис. 8

Решение

Искомый ток найдем по формуле включения для синусоидального напряжения источника.

Операторное сопротивление цепи

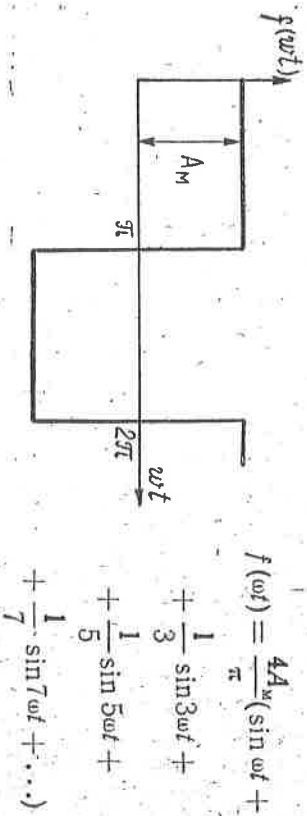
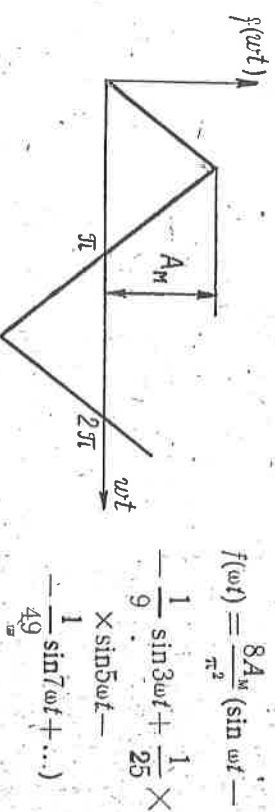
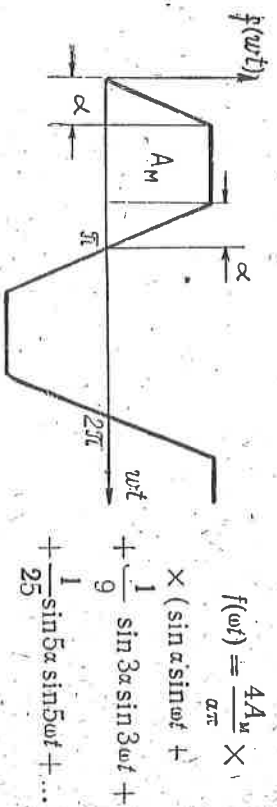
$$Z(p) = r + \frac{pL \frac{1}{pC}}{1 + \frac{pL}{1} \frac{pL}{pC} + 1} = r + \frac{pL}{p^2 LC + pL + r}.$$

Корни уравнения $Z(p) = 0$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2rC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -100 \pm j152.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Разложение периодических функций в тригонометрический ряд



При наличии двух корней оригинал тока

$$i_1(t) = \operatorname{Im} \left[\frac{U_m e^{j(\omega t + \psi)}}{Z(j\omega)} + \frac{U_m e^{j\psi}}{(p_1 - j\omega) Z'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{U_m e^{j\psi}}{(p_2 - j\omega) Z'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} \right]$$

Сопротивление цепи в комплексной форме

$$Z(j\omega) = r + \frac{j\omega L \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{j\omega L - j \frac{1}{\omega C}} = 69,3e^{-j43,83^\circ} \text{ Ом.}$$

Значения $R_K - j\omega$ при $R_K = p_1, R_K = p_2$ будут:

$$p_1 - j\omega = -100 + j152 - j314 = 190e^{-j121,7^\circ};$$

$$p_2 - j\omega = -100 - j152 - j314 = 476e^{-j102,12^\circ}.$$

Производная операторного сопротивления

$$Z'(p) = \frac{-p^2 LC + L}{(p^2 LC + 1)^2}.$$

$$\text{При } p = p_1 = -100 + j152 \quad Z'(p_1) = 0,416e^{j145,29^\circ};$$

$$\text{при } p = p_2 = -100 - j152 \quad Z'(p_2) = 0,416e^{-j145,29^\circ}.$$

Полученные значения подставим в выражение тока:

$$\begin{aligned} i_1(t) = \operatorname{Im} & \left[\frac{1000e^{j314t}}{69,3e^{-j43,83^\circ}} + \frac{1000 \cdot e^{(-100 + j152)t}}{190e^{-j121,7^\circ}} \cdot 0,416e^{j145,29^\circ} + \right. \\ & \left. + \frac{1000e^{(-100 - j152)t}}{476e^{-j102,12^\circ}} \cdot 0,416e^{-j145,29^\circ} \right] = \operatorname{Im} [14,4e^{j(314t + 43,83^\circ)} + \\ & + 12,65e^{-100t} e^{j(32t - 29,59^\circ)} + 5,05e^{-100t} e^{-j(152t + 112,88^\circ)}] = \\ & = 14,4 \sin(314t + 43,83^\circ) + 12,65e^{-100t} \sin(152t - 23,59^\circ) - \\ & - 5,05e^{-100t} \sin(152t + 112,88^\circ). \end{aligned}$$

После преобразования получим:

$$\begin{aligned} i_1(t) = & 14,4 \sin(314t + 43,83^\circ) + \\ & + 16,64e^{-100t} \sin(152t - 35,62^\circ). \end{aligned}$$