ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1
ПО КУРСУ "ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА"
2 образование, специальности ИУ 3, 5 , 6

Задача 1

Для заданного теоретико-множественного тождества:

а) проиллюстрировать тождество диаграммой Эйлера — Венна;

б) проверить тождество методом эквивалентных преобразований или методом характеристических функций.

№ вар.	Тождество	№ вар.	Тождество
1	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$	16	$(A\cup(A\triangle B)\cup(A\triangle C))\setminus((B\cup C)\cap\overline{A})=A$
2	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$	17	$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=(A\triangle(B\cup C))\setminus(B\cup C)$
3	$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$	18	$(A\cap B\cap\overline{C})\triangle(A\cap B\cap C)=A\cap B$
4	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$	19	$(A\setminus B)\triangle(A\setminus C)=(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{C}\cap B)$
5	$A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$	20	$(A\cup B)\triangle(A\cup C)=\overline{A}\cap((B\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap C))$
6	$A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$	21	$(A\triangle B)\setminus(A\cup C)=B\cap\overline{A}\cap\overline{C}$
7	$A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})$	22	$(A\cup B)\triangle(A\cap B)=A\triangle B$
8	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$	23	$(A\setminus B)\triangle(B\setminus C)=(A\cap\overline{B}\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})$
9	$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$	24	$((A\setminus B)\setminus C)\triangle(B\cup C)=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup(B\cup C)$
10	$(A\cap B)\setminus(A\cap C)=(A\setminus B)\setminus C$	25	$((A\triangle B)\cup(A\triangle C))\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$
11	$A\cup B=A\triangle B\triangle(A\cap B)$	26	$(A\triangle B)\cap(B\triangle C)=(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})$
12	$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$	27	$(A\cup B)\triangle(A\setminus B)=B$
13	$(((A\cap B)\triangle A)\setminus A)\cup(C\triangle B)=(C\cup B)\setminus(C\cap B)$	28	$(A\setminus B)\triangle(A\cap B)=A$
14	$(A\cap B\cap C)\triangle(A\cup B)=((A\cup B)\setminus C)\cup(A\triangle B)$	29	$(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)=A\triangle C$
15	$(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(B\cap C)=C$	30	$A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$

Задача 2

Для заданных на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ бинарных отношений ρ и τ:

а) записать матрицы и построить графики;

б) найти композицию $\rho \circ \tau$;

в) исследовать свойства отношений ρ, τ и $\rho \circ \tau$ (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).

№ вар.	ρ	τ
1	$\{(x,\ y)\colon (x+y) \neq 0 \pmod 2\}$	$\{(x,\ y)\colon -1 \leqslant x-y < 0\}$
2	$\{(x,\ y)\colon (x-y) = 0 \pmod 2\}$	$\{(x,\ y)\colon 2 \leqslant x \leqslant y-1\}$
3	$\{(x,\ y)\colon (2x+2y) \neq 0 \pmod 3\}$	$\{(x,\ y)\colon 2x-1 < y\}$
4	$\{(x,\ y)\colon xy \leqslant 8\}$	$\{(x,\ y)\colon \lvert x-y\rvert \leqslant 1\}$
5	$\{(x,\ y)\colon x(6-y) \leqslant 8\}$	$\{(x,\ y)\colon \lvert x-y\rvert > 2\}$
6	$\{(x,\ y)\colon \lvert x(3-y)\rvert \leqslant 3\}$	$\{(x,\ y)\colon x = 0 \pmod y\}$
7	$\{(x,\ y)\colon \lvert(3-x)(3-y)\rvert \leqslant 1\}$	$\{(x,\ y)\colon x+y < 5\}$
8	$\{(x,\ y)\colon \lvert(x-2)(y-2)\rvert \leqslant 1\}$	$\{(x,\ y)\colon 2x \geqslant 3y\}$
9	$\{(x,\ y)\colon 5 \leqslant x+y \leqslant 8\}$	$\{(x,\ y)\colon 4 \leqslant xy \leqslant 6\}$
10	$\{(x,\ y)\colon \lvert x-y\rvert < 2\}$	$\{(x,\ y)\colon 2 < x+y \leqslant 5\}$
11	$\{(x,\ y)\colon 2 \leqslant \lvert x-2y\rvert \leqslant 4\}$	$\{(x,\ y)\colon (x+y+1) = 0 \pmod 2\}$
12	$\{(x,\ y)\colon (7x-2y) \neq 0 \pmod 4\}$	$\{(x,\ y)\colon x-y \geqslant 2\}$
13	$\{(x,\ y)\colon \lvert(4-x)(2-y)\rvert \leqslant 1\}$	$\{(x,\ y)\colon 1 \leqslant (x-2)y < 8\}$
14	$\{(x,\ y)\colon x \geqslant y+1\}$	$\{(x,\ y)\colon (4-x)(4-y) \leqslant 1\}$
15	$\{(x,\ y)\colon y > x+1\}$	$\{(x,\ y)\colon \lvert x-y\rvert \leqslant 1\}$
16	$\{(x,\ y)\colon (x+y) \neq 0 \pmod 2\}$	$\{(x,\ y)\colon 6 \leqslant xy \leqslant 12\}$
17	$\{(x,\ y)\colon (x+y) = 0 \pmod 2\}$	$\{(x,\ y)\colon 2 \leqslant y \leqslant x-1\}$
18	$\{(x,\ y)\colon x-y < 0\}$	$\{(x,\ y)\colon 4 \leqslant xy \leqslant 9\}$
19	$\{(x,\ y)\colon \lvert x-y\rvert \leqslant 1\}$	$\{(x,\ y)\colon x(y-2) \leqslant 3,\ x \neq y\}$
20	$\{(x,\ y)\colon \lvert x-y\rvert \geqslant 2\}$	$\{(x,\ y)\colon x(6-y) \leqslant 8,\ x \neq y\}$
21	$\{(x,\ y)\colon y = 0 \pmod x\}$	$\{(x,\ y)\colon (5-x)(5-y) \leqslant 5\}$
22	$\{(x,\ y)\colon x+y \leqslant 7\}$	$\{(x,\ y)\colon \lvert(x-3)(5-y)\rvert \leqslant 1\}$
23	$\{(x,\ y)\colon 3x \leqslant 2y\}$	$\{(x,\ y)\colon 1 \leqslant \lvert(2-x)(2-y)\rvert \leqslant 3\}$
24	$\{(x,\ y)\colon 2 \leqslant xy \leqslant 5\}$	$\{(x,\ y)\colon 2 \leqslant x \leqslant y^2-3\}$
25	$\{(x,\ y)\colon 3 < x+y < 6\}$	$\{(x,\ y)\colon \lvert x-y^2\rvert \leqslant 2\}$
26	$\{(x,\ y)\colon x+y+2 = 0 \pmod 3\}$	$\{(x,\ y)\colon 3 \leqslant \lvert x^2-y\rvert \leqslant 5\}$
27	$\{(x,\ y)\colon x-y+1 = 0 \pmod 3\}$	$\{(x,\ y)\colon 0 \leqslant x^2-xy \leqslant 9\}$
28	$\{(x,\ y)\colon 0 \leqslant xy \leqslant 8\}$	$\{(x,\ y)\colon \lvert(5-x)(y^2-3)\rvert \geqslant 14\}$
29	$\{(x,\ y)\colon 0 \leqslant (2-x)(2-y) \leqslant 9\}$	$\{(x,\ y)\colon 1{,}5x-y \leqslant 0\}$
30	$\{(x,\ y)\colon 2 \leqslant (x-1)(y-1) \leqslant 6\}$	$\{(x,\ y)\colon 0{,}5y-x \leqslant -3\}$

Задача 3

Пусть H — подгруппа, порожденная элементом b в мультипликативной группе $z_p^{\odot}$ вычетов по модулю p, а gH — класс смежности группы $z_p^{\odot}$ по подгруппе H с представителем g.

а) Вычислить подгруппу H и смежный класс gH.

б) Каждый элемент класса gH представить в виде двоичного числа длины 7.

в) На множестве полученных векторов построить диаграмму Хассе для отношения порядка

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \beta_1) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n \leq \beta_n).$$

Выписать любые три максимальные цепи и антицепи и указать их на диаграмме Хассе.

Вариант 1. $p = 97$, $b = 8$, $g = 2$.

Вариант 2. $p = 97$, $b = 8$, $g = 3$.

Вариант 3. $p = 97$, $b = 8$, $g = 4$.

Вариант 4. $p = 97$, $b = 8$, $g = 5$.

Вариант 5. $p = 97$, $b = 8$, $g = 6$.

Вариант 6. $p = 97$, $b = 8$, $g = 7$.

Вариант 7. $p = 97$, $b = 8$, $g = 8$.

Вариант 8. $p = 97$, $b = 8$, $g = 9$.

Вариант 9. $p = 97$, $b = 8$, $g = 10$.

Вариант 10. $p = 97$, $b = 8$, $g = 11$.

Вариант 11. $p = 79$, $b = 18$, $g = 11$.

Вариант 12. $p = 79$, $b = 18$, $g = 2$.

Вариант 13. $p = 79$, $b = 18$, $g = 3$.

Вариант 14. $p = 79$, $b = 18$, $g = 4$.

Вариант 15. $p = 79$, $b = 18$, $g = 5$.

Вариант 16. $p = 79$, $b = 18$, $g = 6$.

Вариант 17. $p = 79$, $b = 18$, $g = 7$.

Вариант 18. $p = 79$, $b = 18$, $g = 8$.

Вариант 19. $p = 79$, $b = 18$, $g = 9$.

Вариант 20. $p = 79$, $b = 18$, $g = 10$.

Вариант 21. $p = 71$, $b = 51$, $g = 2$.

Вариант 22. $p = 71$, $b = 51$, $g = 3$.

Вариант 23. $p = 71$, $b = 51$, $g = 4$.

Вариант 24. $p = 71$, $b = 51$, $g = 5$.

Вариант 25. $p = 71$, $b = 51$, $g = 6$.

Вариант 26. $p = 71$, $b = 51$, $g = 7$.

Вариант 27. $p = 97$, $b = 8$, $g = 17$.

Вариант 28. $p = 97$, $b = 51$, $g = 18$.

Вариант 29. $p = 97$, $b = 51$, $g = 19$.

Вариант 30. $p = 97$, $b = 51$, $g = 12$.

Задача 4

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным, идемпотентным, замкнутым;

б) для кольца проверить, будет ли оно булевым, есть ли в нем делители нуля, является ли кольцо полем.

Вариант 1. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в поле $\mathbf{Z}_2$ вычетов по модулю 2.

Вариант 2. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в поле $\mathbf{Z}_2$ вычетов по модулю 2.

Вариант 3. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в поле $\mathbf{Z}_3$ вычетов по модулю 3.

Вариант 4. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cup,\ \cap\right)$.

Вариант 5. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) + (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в поле $\mathbf{Z}_3$ вычетов по модулю 3.

Вариант 6. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в кольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \triangle,\ \cap\right)$.

Вариант 7. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\mathcal{B}$.

Вариант 8. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cup,\ \cap\right)$.

Задача 4

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным, идемпотентным, замкнутым;

б) для кольца проверить, будет ли оно булевым, есть ли в нем делители нуля, является ли кольцо полем.

Вариант 9. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cup,\ \cap\right)$.

Вариант 10. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in 2^M$ (M — некоторое множество), с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в кольце $\left(2^M,\ \triangle,\ \cap\right)$.

Вариант 11. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\mathcal{B}$.

Вариант 12. Множество чисел вида $x + \sqrt{2}y$, где x и y — рациональные числа, с обычными операциями сложения и умножения чисел.

Вариант 13. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ \mathbb{O} & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$ с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $(\{0, 1\},\ \min,\ \max)$.

Вариант 14. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cap,\ \cup\right)$.

Вариант 15. Множество чисел вида $x + \sqrt{3}y$, где x и y — рациональные числа, с обычными операциями сложения и умножения чисел.

Вариант 16. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) + (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $(\{0, 1\},\ \max,\ \min)$.

Вариант 17. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в кольце $\mathbf{Z}_4$ вычетов по модулю 4.

Вариант 18. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в кольце $\mathbf{Z}_4$ вычетов по модулю 4.

Задача 4

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным, идемпотентным, замкнутым;

б) для кольца проверить, будет ли оно булевым, есть ли в нем делители нуля, является ли кольцо полем.

Вариант 19. Множество всех многочленов произвольной степени над полем действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения многочленов.

Вариант 20. Множество многочленов степени не выше n над полем действительных чисел с операциями сложения и умножения многочленов, определенных по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i \cdot b_i) x^i.$$

Вариант 21. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1,3\}},\ \cup,\ \cap\right)$.

Вариант 22. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) + (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в поле $\mathbf{Z}_5$ вычетов по модулю 5.

Вариант 23. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в кольце $\left(2^{\{0,1,2\}},\ \triangle,\ \cap\right)$.

Вариант 24. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения выполняются в полукольце $(\{0, 1\},\ \min,\ \max)$.

Вариант 25. Множество чисел вида $x + \sqrt{5}y$, где x и y — рациональные числа, с обычными операциями сложения и умножения чисел.

Вариант 26. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in 2^M$ (M — некоторое множество), с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\mathcal{B}$.

Вариант 27. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1,2\}},\ \cap,\ \cup\right)$.

Вариант 28. Множество всех многочленов произвольной степени над полем рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения многочленов.

Задача 4

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным, идемпотентным, замкнутым;

б) для кольца проверить, будет ли оно булевым, есть ли в нем делители нуля, является ли кольцо полем.

Вариант 29. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cap,\ \cup\right)$.

Вариант 30. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) + (c,\ d) = (ac,\ bd),$$

причем операции сложения и умножения элементов выполняются в полукольце $(\{0, 1, 2\},\ \max,\ \min)$.