ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЁТА ПО ТЕМЕ "ЭЛЕКТРОСТАТИКА"

Задача

Диэлектрический шар (относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1 = 4$) радиуса $R = 5$ см заряжен с объёмной плотностью $\rho = \rho_0 \dfrac{R^2}{r^2}$, где r – расстояние от центра шара, а $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м³. Шар погружён в среду, относительная диэлектрическая проницаемость которой изменяется по закону $\varepsilon_2 = \dfrac{2r}{r+R}$.

Найти зависимости электрического смещения $D_r(r)$, напряжённости $E_r(r)$ и потенциала $\varphi(r)$ электрического поля, если $\varphi(\infty) = 0$. Построить соответствующие графики.

Вычислить:

- полный заряд шара;
- энергию поля вне шара;
- потенциал на поверхности шара;
- объёмную плотность связанных зарядов вне и внутри шара.

Решение

1. Построим графики заданных функций (рис. 1 и 2).

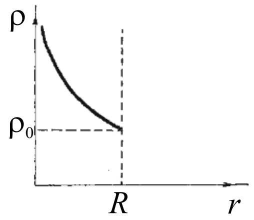

Рис. 1

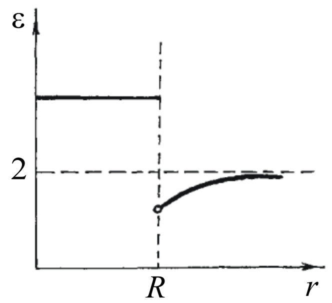

Рис. 2

2. Найдём зависимость $Q(r)$, т. е. найдём заряд, лежащий внутри сферы радиуса r.

   Так как $\rho = \dfrac{dQ}{dV}$, то $Q = \int\limits_V \rho dV$, где интегрирование ведется по объёму.

   В зависимости от типа симметрии задачи элемент dV можно представить в виде:

$$dV$$

$dV = 4\pi r^2 dr$	$dV = 2\pi hrdr$	$dV = 2S_{\text{торца}}dx$
Сферическая симметрия	*Цилиндрическая симметрия*	*Плоская симметрия*
$Q = \int\limits_0^r \rho 4\pi r^2 dr$	$Q = \int\limits_0^r 2\pi hrdr$	$Q = 2\int\limits_0^x \rho S dx$

Так как в данном случае симметрия сферическая, заряд, лежащий внутри сферы радиуса r, можно найти следующим образом:

$$Q(r) = \int\limits_0^r \rho 4\pi r^2 dr = \int\limits_0^r \rho_0 \frac{R^2}{r^2} 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 R^2 r\,.$$

График этой функции показан на рис. 3.

В частности, полный заряд шара

$$Q(R) = 4\pi\rho_0 R^3\,.$$

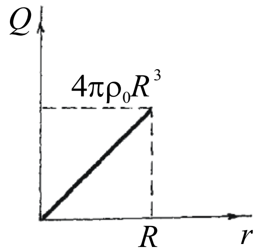

Рис. 3

3. Найдём зависимость $D_r(r)$.

Для этого воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \sum Q^{\text{стор.}}_{\text{охвач. }S}\,.$$

Гауссовы поверхности показаны на рис. 4.

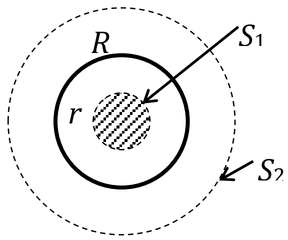

Рис. 4

r < R

Левая часть равенства преобразуется в силу симметрии к виду

$$\oint\limits_{S_1} \vec{D}d\vec{S} = D_r \cdot 4\pi r^2\,.$$

Правая часть равенства:

$$\sum Q^{\text{стор.}}_{\text{охвач. }S} = Q(r) = 4\pi\rho_0 R^2 r\,.$$

Отсюда $D_r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho_0 R^2 r$ и, следовательно,

$$D_{1r} = \frac{\rho_0 R^2}{r}\,.$$

r > R

Левая часть равенства:

$$\oint\limits_{S_1} \vec{D}d\vec{S} = D_r 4\pi r^2\,.$$

Правая же часть равенства:

$$\sum Q^{\text{стор.}}_{\text{охвач. }S} = Q(r) = 4\pi\rho_0 R^3\,.$$

Отсюда $D_r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho_0 R^3$ и

$$D_{2r} = \frac{\rho_0 R^3}{r^2}.$$

4. Найдём зависимость $E_r(r)$.

Так как $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, то

при r < R

$$E_{1r} = \frac{D_{1r}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 r};$$

при r > R

$$E_{2r} = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} = \frac{\rho_0 R^3 (r+R)}{2\varepsilon_0 r^3}.$$

5. Найдём зависимость $\varphi(r)$. По условию $\varphi(\infty) = 0$.

при r > R

$$\varphi_2(r) = \int_{r_2}^{\infty} E_{2r} dr = \int_{r_2}^{\infty} \frac{\rho_0 R^3 (r+R)}{2\varepsilon_0 r^3} dr = \frac{\rho_0 R^3}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{R}{2r^2} \right).$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0} \frac{2r+R}{r^2}$$

В частности, $\varphi_2(R) = \dfrac{3}{4} \dfrac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}$.

при r < R

$$\varphi_1(r) = \int_{r_1}^{\infty} E_r dr = \int_{r_1}^{R} E_{1r} dr + \int_{R}^{\infty} E_{2r} dr = \int_{r_1}^{R} \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_1 r} dr + \varphi_2(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \ln \frac{R}{r} + \frac{3}{4} \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}.$$

$$\varphi_1(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \ln \frac{R}{r} + \frac{3}{4} \frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}$$

В частности, $\varphi_1(R) = \dfrac{3}{4} \dfrac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}$.

Выполнено условие $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$, т. е. потенциал не претерпевает скачка на границе сред.

6. Построим графики полученных функций (рис. 5).

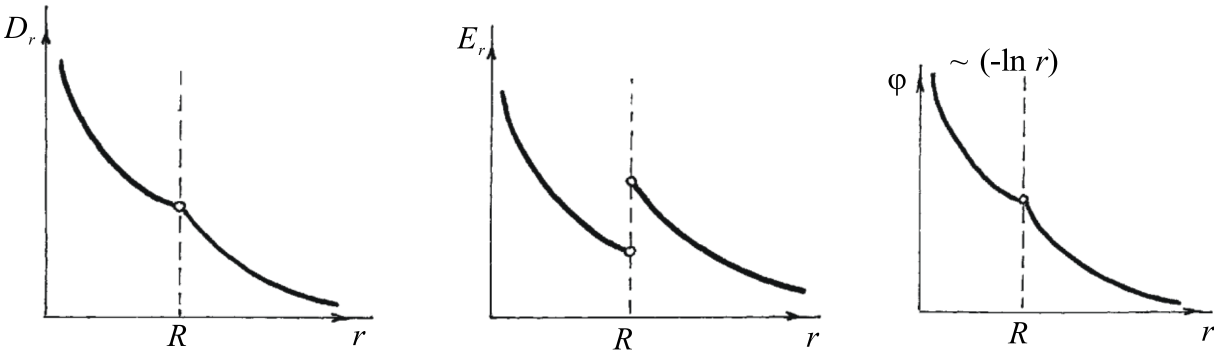

Рис. 5

7. Полный заряд шара

$$Q = Q(R) = 4\pi\rho_0 R^3 = 4{,}7\cdot 10^{-9}\ \text{Кл}.$$

8. Энергия поля вне шара $W = \int\limits_V w dV$, здесь w – объёмная плотность энергии,

$$w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}.$$

В силу сферической симметрии $dV = 4\pi r^2 dr$.

Тогда энергия поля вне шара будет равна

$$W = \int\limits_R^\infty \frac{1}{2}\frac{\rho_0 R^3}{r^2}\frac{\rho_0 R^3(r+R)}{2\varepsilon_0 r^3}4\pi r^2 dr = \frac{3}{2}\frac{\pi\rho_0^2 R^5}{\varepsilon_0}.$$

$$W = \frac{3}{2}\frac{\pi\rho_0^2 R^5}{\varepsilon_0} = 1{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{Дж}.$$

9. Найдём объёмную плотность связанных зарядов.

Один из способов нахождения объемной плотности зарядов заключается в следующем. Согласно теореме Гаусса для вектора поляризации $\vec{P}$ поток этого вектора через произвольную замкнутую поверхность определяется суммой связанных (сторонних) зарядов, охваченных этой поверхностью. В *дифференциальной форме* это можно представить так:

$$\operatorname{div}\vec{P} = -\rho_{\text{связ}}.$$

$\operatorname{div}\vec{P}$ в разных системах координат имеет вид:

Декартова система координат

$$\operatorname{div}\vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}.$$

Цилиндрическая система координат

$$\operatorname{div}\vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}.$$

Сферическая система координат

$$\operatorname{div}\vec{P}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2P_r\right)\right]+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(P_\theta\sin\theta\right)\right].$$

Так как в данной задаче имеет место сферическая симметрия, то в последней формуле остается только одно слагаемое и тогда

$$\rho_{\text{связ}}=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2P\right)\right],$$

где $\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$.

при r < R

$$\rho_{\text{связ}}=-\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\rho_0R^2}{r}-\varepsilon_0\frac{\rho_0R^2}{\varepsilon\varepsilon_0r}\right)\right]\right\}=-\frac{\rho_0R^2}{r^2}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}=-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\rho(r).$$

при *r > R*

$$\rho_{\text{связ}}=-\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\rho_0R^3}{r^2}-\varepsilon_0\frac{\rho_0R^3(R+r)}{2\varepsilon_0r^3}\right)\right]\right\}=-\frac{\rho_0R^4}{2r^4}.$$

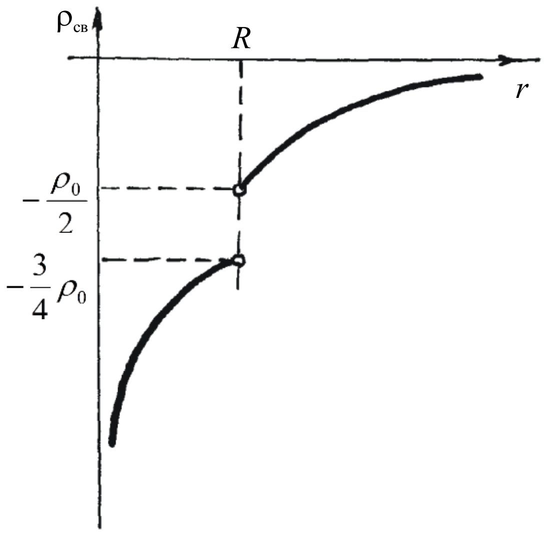

Рис. 6

График зависимости $\rho_{\text{связ}}(r)$ представлен на рис. 6.