МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

Механический факультет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1.

ПРИМЕРЫ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Методические указания

для студентов заочной формы обучения

Санкт-Петербург

2013

Номер варианта – последняя цифра номера зачетки

Задание № 1. Вычислить пределы.

1 1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+2}{x+2}$; 1.2 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$; 1.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3(2x)}{3x^3}$

2 2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-2}{x^3-2x+1}$; 2.2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$; 2.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+3x)}{6x^2}$

3 3.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x-1}{3x^3+2x^2+x+1}$; 3.2 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; 3.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(2x^4)}{5x^4}$

4 4.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x^2+8x-4}{4x^3-3x+4}$; 4.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$; 4.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{6x}-1}{3x}$

5 5.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^6+3x^3-20}{2x^3-x^2+10}$; 5.2 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3-x^2-x-1}$; 5.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(7x^3)}{\sin^3(2x)}$

6 6.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^8+4x^2-x}{2x^8-x^4+1}$; 6.2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4+x^2-3}{x^3-3x+2}$; 6.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3^{6x}-1)^2}{\ln(1+x^2)}$

7 7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^8-x^7+x^5+40}{4x^9+7x^8-35x}$; 7.2 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^3+3x^2+1}{3x^4+x^3-2}$; 7.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(6x^2)}{\arcsin^2(2x)}$

8 8.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^4-x^2}{3x^5+2x^3-21}$; 8.2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-27}$; 8.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+9x)^4-1}{e^{2x}-1}$

9 9.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^7+2x^5-x^3+1}{5x^7-3x^6+x^2-1}$; 9.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{2x^2-5x+2}$; 9.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^4(2x)}{40x^4}$

0 0.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+5x^3-7x}{2x^2+7x-15}$; 0.2 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$; 0.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^3(1+4x)}{(1+x^3)^2-1}$

Задание № 2. Найти производные.

1	1.1 $\dfrac{(3^x-5)^2}{\log_3(5x)}$	1.2 $\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+3\sin\dfrac{x}{3}\right)\ln\dfrac{3x+1}{3x-1}$	1.3 $[\operatorname{arctg}(x+1)]^{\arcsin(x^2-1)}$
2	2.1 $\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$	2.2 $\left(2\cdot 3^{2x}-5x^2\right)\arcsin\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$	2.3 $(\cos x)^{\sin(2x)}$
3	3.1 $\dfrac{\cos(3x)}{\sqrt{x^3+x}}$	3.2 $\left(2\cdot e^{5x}+\operatorname{tg}(5x)\right)\arccos\dfrac{4x-1}{4x+1}$	3.3 $\sqrt[x^2]{x+1}$
4	4.1 $\dfrac{5^{2x}-3}{\lg(5x)}$	4.2 $\left(4\sin\dfrac{x}{4}-3\cos\dfrac{x}{3}\right)\arccos\dfrac{2x+3}{2x-3}$	4.3 $(x^2-x)^{x+1}$
5	5.1 $\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{2^x+1}}$	5.2 $\left(4e^{3x}+\log_5(5x)\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{x+4}$	5.3 $[\operatorname{ctg}(2x)]^{\cos\sqrt{x}}$
6	6.1 $\dfrac{\operatorname{ctg}(3x)}{x^2+2}$	6.2 $\sin^2\left(\sqrt[3]{x}\right)\ln\dfrac{3x+2}{3x-2}$	6.3 $(x^2+1)^{\cos(5x)}$
7	7.1 $\dfrac{2^{3x}}{\cos^2(3x)}$	7.2 $\ln^2[\sin(2x)]\arcsin\sqrt{\dfrac{5x-2}{5x+2}}$	7.3 $\sin(3x)^{x^3-1}$
8	8.1 $\dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{\cos(4x)}$	8.2 $[2\cos(3x)+3\sin(2x)]\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	8.3 $(2x^2+x)^{3x-1}$
9	9.1 $\dfrac{x^3+3x^2}{\operatorname{arctg}(2x)}$	9.2 $\left(3\cdot 5^{x^2}-\ln x^4\right)\operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}}$	9.3 $(2+\ln x)^{\sqrt{x+1}}$
0	0.1 $\dfrac{\log_4(4x)}{4^{2x}+1}$	0.2 $\ln\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)\cdot\operatorname{arctg}\left(e^{-x^2}\right)$	0.3 $\left[\arcsin(3x^2+2x)\right]^{\ln(x+3)}$

Задание № 3. Вычислить интегралы.

1	1.1 $\int_0^3 \frac{dx}{(2x+1)\ln(2x+1)}$	1.2 $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1}$	1.3 $\int_0^{\pi} (2x+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$
2	2.1 $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin\left(4x^2\right)dx$	2.2 $\int_3^{11} \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}dx$	2.3 $\int_{-2}^{0} (x+3)\ln(x+3)dx$
3	3.1 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+3\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$	3.2 $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}+2}$	3.3 $\int_0^1 (3x-2)e^{\frac{x}{3}}dx$
4	4.1 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\mathrm{arctg} x}}{1+x^2}dx$	4.2 $\int_9^{28} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}-1}$	4.3 $\int_0^2 (x-2)\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$
5	5.1 $\int_0^{0,5} \frac{2-3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	5.2 $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}+1}$	5.3 $\int_0^5 (6x+5)e^{3x}dx$
6	6.1 $\int_2^4 \frac{2+5\ln(x-1)}{x-1}dx$	6.2 $\int_0^1 \frac{\sqrt{5x+4}}{\sqrt{5x+4}+2}dx$	6.3 $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\sin(2x)\cos(2x)dx$
7	7.1 $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{1+2e^{2x}}dx$	7.2 $\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x+5}+2}dx$	7.3 $\int_2^6 (2x-1)\ln\left(\frac{x}{2}\right)dx$
8	8.1 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin(2x)+3\cos x]dx$	8.2 $\int_0^3 \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}dx$	8.3 $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (3-2x)\sin x\cos x dx$
9	9.1 $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}dx$	9.2 $\int_{-1}^{7} \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x+2}}dx$	9.3 $\int_0^{\pi} (2-3x)\cos(3x)dx$
0	0.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x+3\right)\sin x dx$	0.2 $\int_0^{16} \frac{2x-1}{\sqrt{x+9}+1}dx$	0.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\sin(2x)dx$

Задание № 4. Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$.
2. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$.
3. $y = \dfrac{e^{x+1}}{x - 1}$.
4. $y = \dfrac{2x^2}{1 - x^2}$.
5. $y = \dfrac{3x^3 + 1}{x^2}$.
6. $y = \dfrac{9x}{x^2 - 4}$.
7. $y = \dfrac{-2x}{(x + 1)^2}$.
8. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$.
9. $y = \dfrac{4 - x}{x + 4}$.
0. $y = \dfrac{x^2 - 2x}{2x - 1}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание № 1

Вычислить пределы.

1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+2x^4-5}{6x^5-x^3+7x}$.

Решение

Числитель и знаменатель стремятся к бесконечности при $x\to\infty$, т.е. имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Поделим числитель и знаменатель на переменную x в старшей степени, т.е. на x^5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^4-5}{6x^5-x^3+7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^5}}{6-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^4}\right)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

При вычислении предела учли, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x^m}=0,$$

где a, m – константы ($m>0$).

В некоторых примерах могут пригодиться значения следующих пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{f(x)}=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{c}=\infty,$$

где c – константа,

$f(x)$ – бесконечно большая величина при $x\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

1.2 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^3 - 7x + 2}{3x^2 + 5x - 2}$.

Решение

Подстановкой убеждаемся, что $x = -2$ является корнем и числителя, и знаменателя, т.е. имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Выделим из числителя и знаменателя общий (критический) сомножитель $(x+2)$. Для выделения критического сомножителя из числителя применим деление в столбик:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} 2x^3 - 7x + 2 \\ \underline{2x^3 + 4x^2} \end{array} & \dfrac{\quad x+2 \quad}{2x^2 - 4x + 1} \\ \quad -\begin{array}{l} -4x^2 - 7x \\ \underline{-4x^2 - 8x} \end{array} & \\ \quad -\begin{array}{l} x+2 \\ \underline{x+2} \end{array} & \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно, $2x^3 - 7x + 2 = (x+2)(2x^2 - 4x + 1)$.

Для выделения критического сомножителя из знаменателя также можно применить деление в столбик. Однако проще воспользоваться теоремой Виета: произведение корней x_1, x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равно $\dfrac{c}{a}$. Если один корень x_1 известен, то второй корень определится по формуле: $x_2 = \dfrac{c}{ax_1}$ и разложение квадратного трехчлена на множители будет иметь вид: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Для знаменателя $x_1 = -2$, $x_2 = \dfrac{-2}{3(-2)} = \dfrac{1}{3}$. Следовательно,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x+2)(3x-1).$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^3 - 7x + 2}{3x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(2x^2 - 4x + 1)}{(x+2)(3x-1)} = \lim_{x \to -2} \frac{2x^2 - 4x + 1}{3x - 1} =$$

$$= \frac{2(-2)^2 - 4(-2) + 1}{3(-2) - 1} = \frac{8 + 8 + 1}{-6 - 1} = -\frac{17}{7}.$$

Ответ. $-\dfrac{17}{7}$.

1.3 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos\left(6x^2\right)}{\left(1-3x^4\right)^8-1}$.

Решение

Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x \to 0$, т.е. имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Заменим бесконечно малые, стоящие в числителе и знаменателе на эквивалентные (см. приложение А):

$1-\cos\left(6x^2\right) \sim \dfrac{1}{2}\left(6x^2\right)^2 = \dfrac{1}{2}36x^4 = 18x^4$, $\left(\alpha(x) = 6x^2\right)$;

$\left(1-3x^4\right)^8 - 1 \sim 8\left(-3x^4\right) = -24x^4$, $\left(\alpha(x) = -3x^4\right)$.

Получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos\left(6x^2\right)}{\left(1-3x^4\right)^8-1} = \lim_{x \to 0} \frac{18x^4}{-24x^4} = -\frac{18}{24} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ. $-\dfrac{3}{4}$**.**

Задание № 2

Найти производные

2.1. $\dfrac{\log_5\left(3^{x^2}+5\right)}{\sqrt{x^5+3}}$.

Решение

Используя правила дифференцирования выражения для производных элементарных функций, получим:

$$\left[\frac{\log_5\left(3^{x^2}+5\right)}{\sqrt{x^5+3}}\right]' = \frac{\left[\log_5\left(3^{x^2}+5\right)\right]'\cdot\sqrt{x^5+3}-\log_5\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\left[\left(x^5+3\right)^{\frac{1}{2}}\right]'}{\left(\sqrt{x^5+3}\right)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\ln 5}\left(3^{x^2}+5\right)'\cdot\sqrt{x^5+3}-\log_5\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(x^5+3\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x^5+3\right)'}{x^5+3}=$$

$$=\frac{\dfrac{\left(3^{x^2}\cdot\ln 3\cdot\left(x^2\right)'+0\right)}{\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\ln 5}\cdot\sqrt{x^5+3}-\dfrac{1}{2}\cdot\log_5\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\left(x^5+3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(5x^{5-1}+0\right)}{x^5+3}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(3^{x^2}\cdot\ln 3\cdot 2x\right)\cdot\left(x^5+3\right)-\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\ln 5\cdot 5x^4\cdot\log_5\left(3^{x^2}+5\right)}{2\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\ln 5\cdot\left(x^5+3\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{4\cdot\ln 3\cdot x\cdot\left(x^5+3\right)\cdot 3^{x^2}-5\cdot\ln 5\cdot x^4\cdot\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\log_5\left(3^{x^2}+5\right)}{2\cdot\ln 5\cdot\left(x^5+3\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(3^{x^2}+5\right)}$$

Ответ. $$\frac{4\cdot\ln 3\cdot x\cdot\left(x^5+3\right)\cdot 3^{x^2}-5\cdot\ln 5\cdot x^4\cdot\left(3^{x^2}+5\right)\cdot\log_5\left(3^{x^2}+5\right)}{2\cdot\ln 5\cdot\left(x^5+3\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(3^{x^2}+5\right)}.$$

2.2. $\left[\left(e^{\sin\left(x^2-4\right)}+\cos x^2\right)\arcsin\frac{x+2}{x-2}\right]$

Решение

$$\left[\left(e^{\sin x^2}+\cos x^2\right)\arcsin\frac{x+2}{x-2}\right]'=$$

$$=\left(e^{\sin x^2}+\cos x^2\right)'\arcsin\frac{x+2}{x-2}+\left(e^{\sin x^2}+\cos x^2\right)\left(\arcsin\frac{x+2}{x-2}\right)'=$$

$$=\left[\left(e^{\sin x^2}\right)'+\left(\cos x^2\right)'\right]\arcsin\frac{x+2}{x-2}+\left(e^{\sin x^2}+\cos x^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-2}\right)'=$$

$$=\left[e^{\sin x^2}\cdot\left(\sin x^2\right)'-\sin x^2\cdot\left(x^2\right)'\right]\arcsin\frac{x+2}{x-2}+$$

$$+\left(e^{\sin x^2}+\cos x^2\right)\sqrt{\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2-(x+2)^2}}\,\frac{(x+2)'(x-2)-(x+2)(x-2)'}{(x-2)^2}=$$

$$=\left(e^{\sin x^2}\cos x^2\left(x^2\right)'-2x\sin x^2\right)\arcsin\frac{x+2}{x-2}+$$

$$+\left(e^{\sin x^2}+\cos x^2\right)\sqrt{\frac{(x-2)^2}{\left(x^2-4x+4-x^2-4x-4\right)(x-2)^4}}(x-2-x-2)=$$

$$=\left(e^{\sin x^2}2x\cos x^2-2x\sin x^2\right)\arcsin\frac{x+2}{x-2}-4\left(e^{\sqrt{x}-4}+\cos x^2\right)\sqrt{\frac{1}{-8x(x-2)^2}}=$$

$$=2x\left(e^{\sin x^2}\cos x^2-\sin x^2\right)\arcsin\frac{x+2}{x-2}-\left(e^{\sqrt{x}-4}+\cos x^2\right)\sqrt{\frac{-2x}{x^2(x-2)^2}}=$$

$$=2x\left(e^{\sin x^2}\cos x^2-\sin x^2\right)\arcsin\frac{x+2}{x-2}-\left(e^{\sqrt{x}-4}+\cos x^2\right)\frac{\sqrt{-2x}}{x(x-2)}$$

Ответ. $2x\left(e^{\sin x^2}\cos x^2-\sin x^2\right)\arcsin\frac{x+2}{x-2}-\left(e^{\sqrt{x}-4}+\cos x^2\right)\frac{\sqrt{-2x}}{x(x-2)}.$

2.3. $\left[\ln\left(x^3+4\right)\right]^{\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)}$

Решение

$$\left\{\left[\ln\left(x^3+4\right)\right]^{\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)}\right\}' = \left[\ln\left(x^3+4\right)\right]^{\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)}\left[\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)\cdot\ln\left(x^3+4\right)\right]' =$$

$$= \left[\ln\left(x^3+4\right)\right]^{\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)}\left\{\left[\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)\right]'\cdot\ln\left(x^3+4\right)+\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)\cdot\left[\ln\left(x^3+4\right)\right]'\right\} =$$

$$= \left[\ln\left(x^3+4\right)\right]^{\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)}\left[\frac{2x\cdot\ln\left(x^3+4\right)}{1+\left(x^2-2\right)^2}+\frac{3x^2\cdot\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)}{x^3+4}\right]$$

Ответ. $\left[\ln\left(x^3+4\right)\right]^{\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)}\left[\frac{2x\cdot\ln\left(x^3+4\right)}{1+\left(x^2-2\right)^2}+\frac{3x^2\cdot\operatorname{arctg}\left(x^2-2\right)}{x^3+4}\right]$.

Задание №3

Вычислить интегралы.

3.1.

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \cdot \sin x^3 dx = \left[x^2 dx = \frac{1}{3} d\left(x^3\right) \right] = \frac{1}{3} \cdot \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin x^3 d\left(x^3\right) = \left[\int \sin t dt = -\cos t + C \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \cos x^3 \Big|_0^{\sqrt[3]{\pi}} = -\frac{1}{3} \cdot (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{3} \cdot (-1-1) = \frac{2}{3}$$

3.2.

$$\int_0^1 (4 \cdot x + 3) \cdot e^{4 \cdot x} dx = \left[\text{применим метод интегрирования по частям} : \int_a^b U dV = U \cdot V \Big|_a^b - \int_a^b V dU \right] =$$

$$= \left[\begin{aligned} & U = 4 \cdot x + 3;\ dU = (4 \cdot x + 3)' dx = 4dx \\ & dV = e^{4 \cdot x} dx;\ V = \int e^{4 \cdot x} dx = \frac{1}{4} \cdot \int e^{4 \cdot x} d(4 \cdot x) = \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} \end{aligned} \right] = \frac{(4 \cdot x + 3) \cdot e^{4 \cdot x}}{4} \Bigg|_0^1 - \int_0^1 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} \cdot (4 \cdot x + 3 - 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot e^{4 \cdot x} \cdot (2 \cdot x + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot e^4 - 1\right).$$

3.3.

$$\int_6^{30} \frac{dx}{3 + \sqrt{x-5}} = \left[\begin{aligned} & t = 3 + \sqrt{x-5};\ x = (t-3)^2 + 5;\ t_{нижн} = 3 + \sqrt{6-5} = 4; \\ & dx = \left((t-3)^2 + 5\right)' dt = 2 \cdot (t-3) dt;\ t_{верхн} = 3 + \sqrt{30-5} = 8. \end{aligned} \right] = \int_4^8 \frac{2 \cdot (t-3) dt}{t} =$$

$$= 2 \cdot \int_4^8 \left(1 - \frac{3}{t}\right) dt = 2 \cdot (t - 3 \cdot \ln|t|) \Big|_4^8 = 2 \cdot (8 - 3 \cdot \ln 8 - 4 + 3 \cdot \ln 4) = 2 \cdot \left(4 - 3 \cdot \ln \frac{8}{4}\right) = 8 - 2 \cdot \ln 8.$$

Задание № 4

Исследовать функцию $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ **и построить ее график.**

Решение

1) Область определения функции $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функция не является периодической.

$$y(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^3 - 1} = \frac{x^4}{-x^3 - 1},$$

$$y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x),$$

следовательно, функция $y(x)$ — общего вида.

3) Функция непрерывна во всех точках оси, кроме точки $x = 1$.

4) Выясним, будет ли прямая $x = 1$ вертикальной асимптотой графика функции. Для этого вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty.$$

Итак, график функции имеет одну вертикальную асимптоту $x = 1$.

Найдем асимптоты графика функции при $x \to \pm\infty$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4}{(x^3 - 1)x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^3 - 1} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = kx + b$, т. е. $y = x$, является наклонной асимптотой одновременно для правой и левой ветвей графика функции.

5) Исследуем функцию на возрастание и убывание и найдем точки ее экстремумов.

$$y' = \frac{4x^3(x^3-1) - 3x^2 \cdot x^4}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}.$$

Производная y' существует и конечна везде в области определения функции. Поэтому точки, "подозрительные" на экстремум находим из условия $y' = 0$, т. е. $x^3(x^3-4) = 0$. Получаем две точки: $x = 0, x = \sqrt[3]{4}$.

Для определения промежутков монотонности и точек экстремума графика функции строим таблицу (см. таблицу 1), выделяя в ней точки, в которых производная равна нулю или не существует (заметим, что поведение функции может измениться не только в точках экстремума, но и после разрыва графика функции).

Таблица 1

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4};+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Таким образом, функция возрастает при $x \in (-\infty;0) \cup (\sqrt[3]{4};+\infty)$ и функция убывает при $x \in (0;1) \cup (1;\sqrt[3]{4})$.

Вычислим значения функции в экстремальных точках:

$$y(0) = 0; \quad y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}.$$

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{6(x^3+2)x^2}{(x^3-1)^3}.$$

Вторая производная тоже существует и конечна во всех точках области определения функции, поэтому "подозрительные" на перегиб точки находим из условия $y'' = 0$. Решая уравнение $x^2(2 + x^3) = 0$, получаем две точки: $x = 0$ и $x = -\sqrt[3]{2}$. Однако, точка $x = 0$ — точка гладкого максимума, поэтому остается исследовать только точку $x = -\sqrt[3]{2}$. Для исследования направления выпуклости графика функции строим таблицу (см. таблицу 2):

Таблица 2

x	$(-\infty; -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$		$+$
y	$\cup$	перег.	$\cap$		$\cup$

Заметим, что в таблицу необходимо включать и точку разрыва графика функции.

Итак, график функции будет выпуклым при $x \in (-\sqrt[3]{2}; 1)$ и вогнутым при $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (1; +\infty)$. Точка $x = -\sqrt[3]{2}$ будет точкой перегиба графика функции. $y'(-\sqrt[3]{2}) = \frac{4}{3}$, т. е. перегиб под углом $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Значение функции в точке перегиба будет равно $y(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$.

7) Используя результаты исследования, строим график функции (см. рис. 1).

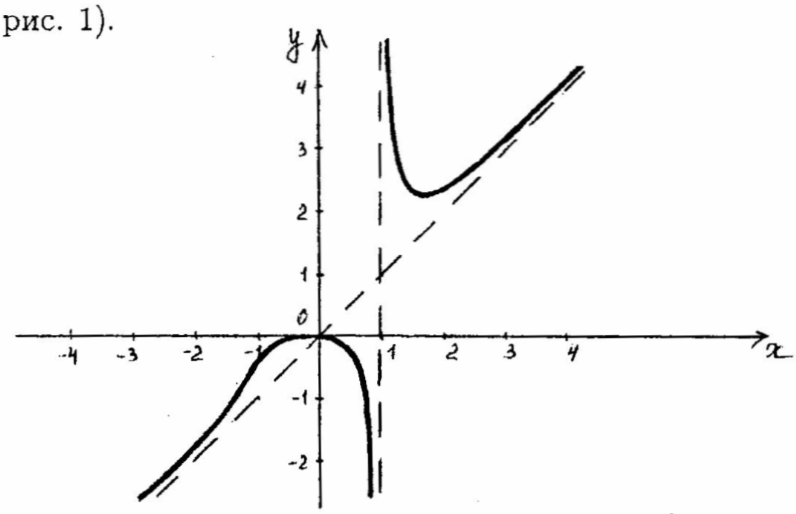

Рис. 1. График функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Дрофа, 2003. – 704 С.
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. СПб.: Лань, 2009. – 464 с.
3. :Данко, П.Е. Высшая математика в примерах и задачах / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова, С.П.Данко. М.: Оникс, Мир и образование, 2008. – 815 с.
4. Груздков, А.А. Элементы теории пределов: методические указания / А.А.Груздков, М.Б.Купченко. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010. – 64 с.
5. Слободинская, Т.В. Пределы. Рекомендации к решению задач контрольной работы: методические указания / Т.В.Слободинская, А.А.Груздков, М.Б.Купченко. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010. – 29 с.
6. Шаляпина, О.В. Предел и непрерывность функции. Справочные материалы: методические указания / О.В.Шаляпина, Т.А.Уланова, В.С.Капитонов. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012. – 22 с.
7. Баскакова, П.Е. Решение типовых вариантов контрольной работы по теме производные функции одной переменной: методические указания / П.Е.Баскакова, Т.В.Винник, Н.Н.Гизлер, А.Д.Бабаев – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2011. – 16 с.
8. Груздков, А.А. Техника вычисления определенных интегралов: методические указания / А.А.Груздков. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012. – 61 с.
9. Слободинская, Т.В. Исследование поведения функций и построение графиков: методические указания / Т.В.Слободинская, Н.Н.Гизлер, П.Е.Баскакова, М.В.Культина. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2001. – 20 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Эквивалентные бесконечно малые

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Примеры эквивалентных бесконечно малых в точке $x = 0$:

1. $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
2. $tg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
3. $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
4. $arctg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5. $1 - \cos(\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$
6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
7. $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
8. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
9. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \ln a \cdot \alpha(x)$
10. $(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim m \cdot \alpha(x)$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Производные функции одной переменной

1 Правила дифференцирования

Пусть $u(x)$, $v(x)$ – функции, дифференцируемые на интервале $(a,\, b)$, с – постоянная, тогда на интервале $(a,\, b)$ справедливы формулы:

$$(cu)' = cu',$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

$$\left(u^v\right)' = u^v (v \cdot \ln u)'.$$

Здесь $u' = \dfrac{du}{dx}$, $v' = \dfrac{dv}{dx}$.

Если $y(x) = f(g(x))$ – сложная функция, $f(g)$ и $g(x)$ – дифференцируемые функции, то справедливо равенство:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}.$$

2 Производные элементарных функций

1. $c' = 0$,
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$,
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$,
4. $\left(e^x\right)' = e^x$,
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
7. $(\sin x)' = \cos x$,
8. $(\cos x)' = -\sin x$,
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Здесь a, c, n – константы $(a > 0)$.