

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА**

**федеральное образовательное учреждение высшего**

**профессионального образования**

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

**(МИИТ)**

**ОДОБРЕНО:**  
Кафедра «Высшая и  
прикладная математика»

**УТВЕРЖДЕНО:**  
Декан ф-та УПП  
Декан ф-та ТС  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2011г.

Составители: Блистанова Л.Д., д.ф.-м.н., проф., Голечков Ю.И., д.ф.-м.н.,  
доц., Захарова М.В., к.ф.-м.н., доц., Сперанский Д.В., д.т.н., проф.

**МАТЕМАТИКА**

Задания на контрольные работы № 1 – 3

для студентов 1 курса заочной формы обучения специальностей:

190300.65 – Подвижной состав железных дорог, специализации – ПВ, ПТ, ПЛ,  
ПЭ, ПН;

190401.65 – Эксплуатация железных дорог, специализация – ДМ.

Москва 2011г.

## Методические указания по выполнению контрольных работ

Задачи, включенные в контрольную работу, взяты из сборника задач, подготовленного коллективом преподавателей кафедры «Высшая и прикладная математика» РОАТ МГУПС. Все задачи имеют тройную нумерацию, которая включает номер раздела из сборника задач, уровень сложности задачи и порядковый номер задачи. Студент выполняет те задачи, последняя цифра номера которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, студент, учебный шифр которого имеет последнюю цифру 0, в контрольной работе №1 решает задачи 1.1.10, 2.1.20, 2.2.20, 3.3.40, 3.1.50; в контрольной работе №2 – 6.2.40, 6.3.20, 7.1.10, 7.2.60, 7.3.30; в контрольной работе №3 – 8.1.10, 8.2.40, 9.1.20, 9.1.60, 10.1.10.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с содержанием разделов рабочей программы, на освоение которых ориентирована выполняемая контрольная работа. Необходимую учебную литературу студент может найти в рабочей программе (в программе указана как основная, так и дополнительная литература).

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр студента, курс, фамилия, имя и отчество студента. На обложке вверху справа указывается фамилия и инициалы преподавателя-рецензента. В конце работы студент ставит свою подпись и дату выполнения работы.

В каждой задаче надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решение каждой задачи должно содержать подробные вычисления, пояснения, ответ, а также, в случае необходимости, и рисунки. После каждой задачи следует оставлять место для замечаний преподавателя-рецензента. В случае невыполнения этих требований преподаватель возвращает работу для доработки без ее проверки.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

### Элементы векторной алгебры, аналитической геометрии и линейной алгебры

1.1.1. Найти косинус угла между векторами  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ , если  $A(3; -2; 3)$ ;  $B(2; 0; 1)$ ;  $C(-2; 3; 1)$ . Сделать чертеж.

1.1.2. Найти косинус угла между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(3; 0; 1)$ ;  $B(5; -2; 2)$ ;  $C(-1; -3; 1)$ . Сделать чертеж.

1.1.3. Найти угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(2; 4; -1)$ ;  $B(0; 4; 0)$ ;  $C(-1; 4; -2)$ . Сделать чертеж.

1.1.4. Найти угол между векторами  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ , если  $A(5; 2; 1)$ ;  $B(2; 4; 2)$ ;  $C(1; 0; 7)$ . Сделать чертеж.

1.1.5. Найти угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(2; -1; 3)$ ;  $B(1; 2; 3)$ ;  $C(1; -3; 3)$ . Сделать чертеж.

1.1.6. Найти угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(2; 5; -3)$ ;  $B(5; 2; -3)$ ;  $C(0; 5; -1)$ . Сделать чертеж.

1.1.7. Найти косинус угла между  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ , если  $A(4; -1; 4)$ ;  $B(3; 1; 2)$ ;  $C(-1; 4; 2)$ . Сделать чертеж.

1.1.8. Найти косинус угла между  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(0; -3; -2)$ ;  $B(2; -5; -1)$ ;  $C(-4; -6; -2)$ . Сделать чертеж.

1.1.9. Найти угол между  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(5; 7; 2)$ ;  $B(3; 7; 3)$ ;  $C(2; 7; 1)$ . Сделать чертеж.

1.1.10. Найти угол между  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ , если  $A(-2; 0; -2)$ ;  $B(0; 2; 0)$ ;  $C(-1; -2; 5)$ . Сделать чертеж.

2.1.11. Уравнение одной из сторон квадрата  $x+3y-5=0$ . Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если  $P(-1; 0)$  – точка пересечения его диагоналей. Сделать чертеж.

2.1.12. Даны уравнения одной из сторон ромба  $x-3y+10=0$  и одной из ее диагоналей  $x+4y-4=0$ ; диагонали ромба пересекаются в точке  $P(0; 1)$ . Найти уравнения остальных сторон ромба. Сделать чертеж.

2.1.13. Уравнения двух сторон параллелограмма  $x+2y+2=0$  и  $x+y-4=0$ , а уравнение одной из его диагоналей  $x-2=0$ . Найти координаты вершин параллелограмма. Сделать чертеж.

2.1.14. Даны две вершины  $A(-3; 3)$  и  $B(5; -1)$  и точка  $D(4; 3)$  пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

2.1.15. Даны вершины  $A(3; -2)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(1; 3)$  трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины  $D$  этой трапеции. Сделать чертеж.

2.1.16. Даны уравнения двух сторон треугольника  $5x-4y+15=0$  и  $4x+y-9=0$ . Его медианы пересекаются в точке  $P(0; 2)$ . Составить уравнение третьей стороны треугольника. Сделать чертеж.

2.1.17. Даны две вершины  $A(2; -2)$  и  $B(3; -1)$  и точка  $P(1; 0)$  пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину  $C$ . Сделать чертеж.

2.1.18. Даны уравнения двух высот треугольника  $x+y=4$  и  $y=2x$  и одна из его вершин  $A(0; 2)$ . Составить уравнения сторон треугольника. Сделать чертеж.

2.1.19. Даны уравнения двух медиан треугольника  $x-2y+1=0$  и  $y-1=0$  и одна из его вершин  $A(1; 3)$ . Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

2.1.20. Две стороны треугольника заданы уравнениями  $5x-2y-8=0$  и  $3x-2y-8=0$ , а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны. Сделать чертеж.

2.2.11. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} y+3z-1=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

а)  $5x+3y-z+2=0$ ;      б)  $5x-3y-z+1=0$ ;      в)  $5x+3y+2z-3=0$ ;

г)  $-x+5y+3z=0$ ;      д)  $3x+5y-z-4=0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.12. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} -x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$$

а)  $3x+y-5z+1=0$ ;      б)  $x-3y-5z+2=0$ ;      в)  $-5x+y+3z=0$ ;

г)  $x+3y-5z+3=0$ ;      д)  $3x-y+5z-2=0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.13. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+y-3z+5=0 \end{cases}$$

а)  $5x-8y-z+3=0$ ;      б)  $-8x+5y-z-1=0$ ;      в)  $-x+5y+8z=0$ ;

г)  $-x - 8y + 5z + 2 = 0$ ;                      д)  $x - 3y + z - 4 = 0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.14. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} x + y - 3z + 3 = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

а)  $7x - 2y - 3z + 1 = 0$ ;            б)  $2x - 7y - 3z + 2 = 0$ ;            в)  $x - 3y + 7z = 0$ ;

г)  $2x + 7y + 3z - 5 = 0$ ;            д)  $x + 3y - 7z + 3 = 0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.15. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} -x + 2y - z + 5 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

а)  $2x - y - 4z + 1 = 0$ ;                      б)  $-x + 2y + 4z - 3 = 0$ ;                      в)  $2x + y + 4z = 0$ ;

г)  $-4x - y + 2z + 5 = 0$ ;                      д)  $4x + y - 3z - 8 = 0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.16. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} 5x + y - z - 7 = 0 \\ -2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

а)  $7x - 2y + 17z = 0$ ;                      б)  $7x + 2y - 17z + 5 = 0$ ;                      в)  $-2x + 17y + 7z + 3 = 0$ ;

г)  $2x - 17y + 7z + 2 = 0$ ;                      д)  $17x + 7y - 2z + 1 = 0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.17. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} 4x + y - z + 4 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

а)  $2x - 5y + 3z + 5 = 0$ ;                      б)  $2x + 5y - 3z + 1 = 0$ ;                      в)  $5x + 3y - 2z - 3 = 0$ ;

г)  $x + 2y - z + 2 = 0$ ;                      д)  $3x - 5y - 2z + 7 = 0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.18. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 3 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

а)  $3x - 5y + z - 1 = 0$ ;                      б)  $3x + 7y - z + 5 = 0$ ;                      в)  $7x - 3y + z + 3 = 0$ ;

г)  $-7x + 2y + 3z - 1 = 0$ ;                      д)  $-x + 7y + 3z - 6 = 0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.19. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д) перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} x+3y-1=0 \\ x+2y-z-6=0 \end{cases}$$

- а)  $3x-7y-z+5=0$ ;      б)  $-7x+3y-z+1=0$ ;      в)  $7x+3y+z-2=0$ ;  
 г)  $-3x+y-z=0$ ;      д)  $-x+7y+7z+3=0$ .

Сделать схематический чертеж.

2.2.20. Указать какой из данных плоскостей а); б); в); г); д)

перпендикулярна прямой:

$$\begin{cases} x+2y-z+5=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$$

- а)  $x+3y-5z-2=0$ ;      б)  $-3x+y+5z-1=0$ ;      в)  $5x+3y-z+2=0$ ;  
 г)  $x-3y-5z+1=0$ ;      д)  $x-5y-z-3=0$ .

Сделать схематический чертеж.

**3.3.31–3.3.40.** Приведите к каноническому виду уравнения линий второго порядка. Установите тип этих линий и их расположение. Сделайте схематический чертеж.

- 3.3.31.  $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ ;  
 3.3.32.  $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$ ;  
 3.3.33.  $xy + 3x - 3y - 9 = 0$ ;  
 3.3.34.  $3x^2 - 4xy + 4 = 0$ ;  
 3.3.35.  $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$ ;  
 3.3.36.  $4xy + 9 = 0$ ;  
 3.3.37.  $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ ;  
 3.3.38.  $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$ ;  
 3.3.39.  $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$ ;  
 3.3.40.  $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ .

**3.1.41–3.1.70.** Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$3.1.41. \begin{cases} 3x+y+z=2 \\ x-y+2z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$$

$$3.1.42. \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+2z=2 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$$

$$3.1.43. \begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x-y+2z=-2 \\ 3x+y+z=3 \end{cases}$$

$$3.1.44. \begin{cases} 2x+y-z=6 \\ x-y+z=0 \\ x+y=5 \end{cases}$$

$$3.1.45. \begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+3y+z=11 \\ x-y+4z=4 \end{cases}$$

$$3.1.46. \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y-z=-2 \\ 3x+y+z=6 \end{cases}$$

$$3.1.47. \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$3.1.49. \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 3x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$3.1.48. \begin{cases} 3x - y - z = 5 \\ x + z = 3 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$3.1.50. \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

### Введение в математический анализ.

#### Производная и ее приложения.

**6.2.31–6.2.40.** Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

$$6.2.31. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}};$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 5}{(2x^2 - 1)^2};$$

$$6.2.32. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12} - 4}{\sqrt{x} - 2};$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2 + 3x^3}{x^3 - (2x-1)^2};$$

$$6.2.33. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{\sqrt{x} - 5};$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 - 7}{(x^3 - 3)(2 - x^3)};$$

$$6.2.34. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x-7} + 2}{x+1};$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-2)^3}{(x^2+1)(2-x)};$$

$$6.2.35. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+14} - 2\sqrt{x+2}};$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)(2-x^2)}{(x-1)^3};$$

$$6.2.36. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x};$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\sin 5x};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-2x}{5-2x} \right)^{2x+1}.$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sqrt{x+1} - 1};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5-2x}{5+3x} \right)^{\frac{2+x}{x}}.$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 2x};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-2} \right)^{x+3}.$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}};$$

$$\text{ г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2+1}{2x^2+3} \right)^{x^2-1}.$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x^2 - 9x};$$

$$\begin{array}{ll}
\text{B)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 6x + 7}{(x^2 - 3)^2}; & \text{Г)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x+1}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x}}. \\
6.2.37. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{5x}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\arcsin 3x}; \\
\text{B)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x-x^3}{(2+x)^2 - 3x^3}; & \text{Г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2+2}{3x^2-1} \right)^{x^2+5}. \\
6.2.38. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{5\sqrt{1-x} - 2\sqrt{4-7x}}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{\arcsin 2x}; \\
\text{B)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7+x+x^2-2x^3}{(1-x)^3}; & \text{Г)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+2}{3x+2} \right)^{\frac{1}{x}}. \\
6.2.39. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{3x}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}; \\
\text{B)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-3)^2+5}{(1-2x^2)^2+7}; & \text{Г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+1}{7x-1} \right)^{x+2}. \\
6.2.40. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x+1}-1}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{x+1}-1}; \\
\text{B)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+x-x^5}{2+x^2-3x^5}; & \text{Г)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7+x}{7-x} \right)^{\frac{7}{x}}.
\end{array}$$

**6.3.11–6.3.20.** Задана функция  $y=f(x)$ . Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать схематический чертеж.

$$6.3.11. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1; \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1; \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$6.3.12. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1; \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1; \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$



$$6.3.13. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2; \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$6.3.14. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1; \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$6.3.15. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$6.3.16. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$$

$$6.3.17. f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leq -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

$$6.3.18. f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \pi/4; \\ 2, & x > \pi/4. \end{cases}$$

$$6.3.19. f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$6.3.20. f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4; \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

**7.1.1–7.1.10.** Найти производные  $\frac{dy}{dx}$  данных функций.

$$7.1.1. \text{ a) } y = \arccos \sqrt{x} ; \quad \text{б) } y = \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{3} ;$$

$$\text{в) } x = 2t^2 + t, \quad y = \ln t.$$

$$7.1.2. \text{ a) } y = \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \arccos \frac{x}{5}; \quad \text{б) } y = \exp(\operatorname{ctg} 2x);$$

$$\text{в) } x = \frac{1-t}{1+t^2}; \quad y = \frac{2+t^2}{t^2}.$$

$$7.1.3. \text{ a) } y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}; \quad \text{б) } y = \operatorname{arcctg} [\exp(5x)];$$

$$\text{в) } x = \sin^2 3t, \quad y = \cos^2 3t.$$

$$7.1.4. \text{ a) } y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad \text{б) } y = \frac{1 - \cos 3x}{1 + \cos 3x};$$

$$\text{в) } x = t^4 + 2t, \quad y = t^2 + 5t.$$

$$7.1.5. \text{ a) } y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \arccos \frac{1}{x^2}; \quad \text{б) } y = (x-1) \exp(x^2);$$

$$\text{в) } x = t - \ln \sin t, \quad y = t + \ln \cos t.$$

$$7.1.6. \text{ a) } y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x; \quad \text{б) } y = \exp(\cos 3x).$$

$$\text{в) } x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

$$7.1.7. \text{ a) } y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-2}) + \sqrt{x^2 - 2x}; \quad \text{б) } y = 3x \exp(-x^2);$$

$$\text{в) } x = t^2 - t^3, \quad y = 2t^3.$$

$$7.1.8. \text{ a) } y = \ln \cos 2x - \ln \sin 2x; \quad \text{б) } y = 2^{\operatorname{ctg}^2 3x};$$

$$\text{в) } x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t.$$

$$7.1.9. \text{ a) } y = \arccos \frac{x-1}{x+1}; \quad \text{б) } y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt{x+2};$$

$$\text{в) } x = 3 \sin t, \quad y = 3 \cos^2 t.$$

$$7.1.10. \text{ a) } y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln \sin x; \quad \text{б) } y = x \exp\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\text{в) } x = 2t - t^2, \quad y = 2t^3.$$

**7.2.51–7.2.60.** Подобрать соответствующую функцию и найти ее экстремум.

7.2.51. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема  $V$ . Каковы должны быть высота и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести ?

7.2.52. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса  $R$ , вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

7.2.53. Прямоугольник вписан в эллипс с осями  $2a$  и  $2b$ . Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей ?

7.2.54. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса  $R$  ?

7.2.55. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса  $R$  ?

7.2.56. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости  $V$  будет иметь наименьшую полную поверхность ?

7.2.57. Окно имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом. Периметр окна равен  $a$ . При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света ?

7.2.58. В точках  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми равно  $a$ , находятся источники света соответственно с силами  $F_1$  и  $F_2$ . На отрезке  $AB$  найти наименее освещенную точку  $M_0$ .

*Замечание.* Освещенность точки источником света силой  $F$  обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  ее от источника света:  
 $E = kF/r^2, k = \text{const}$ .

7.2.59. Из круглого бревна, диаметр которого равен  $d$ , требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка имела наибольшее сопротивление на изгиб ?

*Замечание.* Сопротивление балки на изгиб пропорционально произведению ширины  $x$  ее поперечного сечения на квадрат его высоты  $y$ :  
 $Q = kxy^2, k = \text{const}$ .

7.2.60. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема  $V$ . Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна  $p_1$  руб., а стенок –  $p_2$  руб. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

**7.3.21–7.3.30.** Методами дифференциального исчисления: а) исследовать функцию  $y = f(x)$  для  $\forall x \in R$  и по результатам исследования построить ее график; б) Найти наименьшее и наибольшее значения заданной функции на отрезке  $[a; b]$ .

7.3.21. а)  $y = \frac{4x}{4+x^2}$ , б)  $[-3; 3]$ .

7.3.22. а)  $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ , б)  $[-1; 1]$ .

7.3.23. а)  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ , б)  $[-2; 2]$ .

7.3.24. а)  $y = \frac{x^2-5}{x-3}$ , б)  $[-2; 2]$ .

7.3.25. а)  $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$ , б)  $[1; 4]$ .

7.3.26. а)  $y = (x-1)e^{3x+1}$ , б)  $[0; 1]$ .

7.3.27. а)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ , б)  $[1; 9]$ .

7.3.28. а)  $y = e^{\frac{1}{2-x}}$ , б)  $[-1; 1]$ .

7.3.29. а)  $y = xe^{-x^2}$ , б)  $[-2; 2]$ .

7.3.30. а)  $y = \frac{x^2-3}{x^2+9}$ , б)  $[-2; 2]$ .

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

**Неопределенный и определенный интегралы.  
Функции нескольких переменных. Кратные интегралы.  
Криволинейные и поверхностные интегралы.**

**8.1.1–8.1.10.** Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

8.1.1. а)  $\int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x^4 \right) dx$ ; б)  $\int (2x+1)^{20} dx$ ;

	В) $\int (x-1)e^x dx;$	Г) $\int \sin^3 x \cos^5 x dx.$
8.1.2. а)	$\int \left( x^2 + \frac{1}{\cos^2 x} + 2e^x \right) dx;$	б) $\int \frac{x}{x^2+1} dx;$
	В) $\int (x+3) \cos x dx;$	Г) $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$
8.1.3. а)	$\int \left( e^x - \frac{1}{\sin^2 x} + 5 \right) dx;$	б) $\int \sin(2-3x) dx;$
	В) $\int \ln 4x dx;$	Г) $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx.$
8.1.4. а)	$\int \left( 3^x + \frac{1}{1+x^2} - \sin x \right) dx;$	б) $\int \frac{x}{x^2-3} dx;$
	В) $\int x \sin x dx;$	Г) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$
8.1.5. а)	$\int \left( \cos x + \frac{1}{4+x^2} - x^3 \right) dx;$	б) $\int \sqrt{3x-2} dx;$
	В) $\int (x+2) e^x dx;$	Г) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx.$
8.1.6. а)	$\int \left( \frac{1}{9-x^2} + e^x - 7 \right) dx;$	б) $\int \sin\left(\frac{x}{5}+3\right) dx;$
	В) $\int x \cos 3x dx;$	Г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$
8.1.7. а)	$\int \left( x + \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} - \sin x \right) dx;$	б) $\int 2e^{1-2x} dx;$
	В) $\int x \ln 4x dx;$	Г) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$
8.1.8. а)	$\int \left( \cos x + \frac{1}{\sin^2 x} + 6^x \right) dx;$	б) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1};$
	В) $\int (x-3) \sin x dx;$	Г) $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}.$
8.1.9. а)	$\int \left( 3x^2 - 4 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx;$	б) $\int e^{4-8x} dx;$

$$в) \int \operatorname{arctg} x dx;$$

$$г) \int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx.$$

$$8.1.10. а) \int \left( 2 + \frac{1}{1-x^2} + \sin x \right) dx;$$

$$б) \int \frac{dx}{\cos^2(7x+5)};$$

$$в) \int \ln x dx;$$

$$г) \int \frac{3x+5}{x^2+8x+15} dx.$$

**8.2.31–8.2.40.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

$$8.2.31. x^2 + 2y = 0, \quad 5x + 2y - 6 = 0.$$

$$8.2.32. x^2 - 2y = 0, \quad x - 2y + 6 = 0.$$

$$8.2.33. x^2 - 2y = 0, \quad x + 2y - 6 = 0.$$

$$8.2.34. x^2 - 6y = 0, \quad x + 6y - 12 = 0.$$

$$8.2.35. x^2 + 2y = 0, \quad 2x - y - 3 = 0.$$

$$8.2.36. 2x + y^2 = 0, \quad 2x + 5y - 6 = 0.$$

$$8.2.37. 2x - y^2 = 0, \quad 2x - y - 6 = 0.$$

$$8.2.38. 2x - y^2 = 0, \quad 2x + y - 6 = 0.$$

$$8.2.39. 6x - y^2 = 0, \quad 6x + y - 12 = 0.$$

$$8.2.40. x + y^2 = 0, \quad x - 2y + 3 = 0.$$

**9.1.11–9.1.20.** Найти производные функции двух переменных.

$$9.1.11. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = u \sin(u+v), \text{ где } u = \frac{y}{x}, \quad v = 3x - y.$$

$$9.1.12. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z^2 x^3 y - zy - x + y + 1 = 0.$$

$$9.1.13. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = v \operatorname{tg}(u-v), \text{ где } u = y^2 - x^2, \quad v = x\sqrt{y}.$$

$$9.1.14. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = v \cos(u-v), \text{ где } u = y + x^2, \quad v = xy.$$

$$9.1.15. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } ye^{\frac{z^2}{x}} - z^3 y + x - 2y - 10 = 0.$$

$$9.1.16. \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = u \sin(u^2 - v^2), \text{ где } u = x^2 + y^2, \quad v = x - 2y.$$

9.1.17.  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = \sqrt{u} \sin(u - v^2)$ , где  $u = e^{2x}$ ,  $v = 2x \ln x$ .

9.1.18.  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если  $x e^{\frac{x+y}{z}} - xyz - 10x + z^2 - 2 = 0$ .

9.1.19.  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если  $z = 2u \sin\left(\frac{u}{u+v}\right)$ , где  $u = e^{x-y}$ ,  $v = \frac{y}{x}$ .

9.1.20.  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если  $z = u^2 \sqrt[3]{u-v}$  где  $u = x + 2y$ ,  $v = xy$ .

**9.1.51–9.1.60.** Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного интеграла  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и изменить порядок интегрирования.

9.1.51.  $D$ :  $y = 0$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 2 - x$ .

9.1.52.  $D$ :  $y = 2x$ ;  $y = 2(x-2)^2$ ;  $y = 0$ .

9.1.53.  $D$ :  $y = 2 - (x-1)^2$ ;  $y = 1 - x$ .

9.1.54.  $D$ :  $y^2 = x$ ;  $x + y - 2 = 0$ .

9.1.55.  $D$ :  $y = 0$ ;  $y = (x+1)^2$ ;  $y = (x-1)^2$ .

9.1.56.  $D$ :  $y^2 = x$ ;  $x = (y-2)^2$ ;  $x = 0$ .

9.1.57.  $D$ :  $y^2 = x$ ;  $x = (y-2)^2$ ;  $y = 0$ .

9.1.58.  $D$ :  $y = 1 - x^2$ ;  $y = 1 - (x-2)^2$ ;  $y = 1$ .

9.1.59.  $D$ :  $y = 1 - x^2$ ;  $y = 1 - (x-2)^2$ ;  $y = 0,5$ .

9.1.60.  $D$ :  $y = (x+2)^2$ ;  $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ ;  $y = 0$ .

**10.1.1–10.1.10.** Вычислить криволинейный интеграл. Сделать чертеж дуги кривой  $L$ .

10.1.1.  $\int_L \frac{x^2 + 1}{y + 1} dx + \frac{x - y}{x + 1} dy$ , где  $L$  – отрезок прямой от точки  $(1; 0)$  до точки  $(2; 1)$ .

10.1.2.  $\int_L \frac{x^2}{y + 2} dx + \frac{x + 2y}{3x + 1} dy$ , где  $L$  – отрезок прямой от точки  $(1; 1)$  до точки  $(2; 2)$ .

10.1.3.  $\int_L \frac{y^2 + 1}{x + 1} dx + \frac{x + 1 - y}{2} dy$ , где  $L$  – дуга кривой  $y = \ln(x + 1)$  от точки  $(0; 0)$  до точки  $(e - 1; 1)$ .

10.1.4.  $\int_L \frac{y^2 - 1}{x + 1} dx + \frac{1}{x} dy$ , где  $L$  – дуга кривой  $y = x^2$  от точки  $(1; 1)$  до точки  $(2; 4)$ .

10.1.5.  $\int_L (y^2 - x) dx + (x^2 - y) dy$ , где  $L$  – верхняя половина окружности  $x = \sin 2t, y = \cos 2t$ . Интегрировать против часовой стрелки.

10.1.6.  $\int_L (\frac{y}{x} - 1) dx + \frac{1}{y} dy$ , где  $L$  – дуга кривой  $y = x^2$  от точки  $(-1; 1)$  до точки  $(-2; 4)$ .

10.1.7.  $\int_L y^2 dx + x^2 dy$ , где  $L$  – верхняя четверть окружности  $x = 2 \sin t, y = 2 \cos t$ . Интегрировать против часовой стрелки.

10.1.8.  $\int_L \frac{x^2 + 1}{y + 1} dx + \frac{x - y}{x + 1} dy$ , где  $L$  – отрезок прямой от точки  $(1; 0)$  до точки  $(2; 1)$ .

10.1.9.  $\int_L \frac{y - 1}{x} dx + \frac{x - 1}{y} dy$ , где  $L$  – дуга кривой  $y = x^2$  от точки  $(1; 1)$  до точки  $(2; 4)$ .

10.1.10.  $\int_L (y - x) dx + (x - y) dy$ , где  $L$  – верхняя половина эллипса  $x = 3 \sin 2t, y = 4 \cos 2t$ . Интегрировать против часовой стрелки.