Вариант 27

Оглавление

[Задача 1 3](#_Toc346782585)

[Задача 2 10](#_Toc346782586)

[Задача 3 15](#_Toc346782587)

# Задача 1

Раскройная задача

На предприятии производится раскрой материала на детали (заготовки), которые необходимы для обеспечения выполнения производственной программы выпуска продукции по ассортименту.

Известны:

 - потребность в деталях различных типоразмеров на плановый период

 - выход деталей определенного типоразмера при раскрое единицы материала по тому или иному варианту

 - величина отходов при раскрое единицы материала по тому или иному вариант -

- количество материала, поступающего в раскрой в плановом периоде для обеспечения производственной программы выпуска готовой продукции

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Типоразмер детали | Необходимо получить деталей при раскрое | Выход деталей при раскрое ед.материала по варианту | Количество материала, поступившего в раскрой |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 350 | 2 | 0 | 1 | 1 | R<=340 |
| B | 800 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| C | 280 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| D | 300 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| Величина отходов | 0,46 | 0,44 | 0,43 | 0,42 |  |

Решение

Составим математическую модель задачи. Пусть - количество материалов, раскроенных по варианту 1, 2, 3, 4.

2x1 + 0x2 + 1x3 + 1x4-1x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 = 350

1x1 + 3x2 + 2x3 + 3x4 + 0x5-1x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 = 800

3x1 + 1x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6-1x7 + 0x8 + 0x9 = 280

0x1 + 2x2 + 1x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7-1x8 + 0x9 = 300

1x1 + 1x2 + 1x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8 + 1x9 = 340

2x1 + 0x2 + 1x3 + 1x4-1x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 + 1x10 + 0x11 + 0x12 + 0x13 = 350

1x1 + 3x2 + 2x3 + 3x4 + 0x5-1x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 + 0x10 + 1x11 + 0x12 + 0x13 = 800

3x1 + 1x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6-1x7 + 0x8 + 0x9 + 0x10 + 0x11 + 1x12 + 0x13 = 280

0x1 + 2x2 + 1x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7-1x8 + 0x9 + 0x10 + 0x11 + 0x12 + 1x13 = 300

1x1 + 1x2 + 1x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8 + 1x9 + 0x10 + 0x11 + 0x12 + 0x13 = 340

Для постановки задачи на минимум целевую функцию запишем так:

F(X) = 0.46x1+0.44x2+0.43x3+0.42x4+Mx10+Mx11+Mx12+Mx13 → min

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

 x10 = 350-2x1-x3-x4+x5

 x11 = 800-x1-3x2-2x3-3x4+x6

 x12 = 280-3x1-x2-x3+x7

 x13 = 300-2x2-x3-x4+x8

которые подставим в целевую функцию:

F(X) = (0.46-6M)x1+(0.44-6M)x2+(0.43-5M)x3+(0.42-5M)x4+(M)x5+(M)x6+(M)x7+(M)x8+(1730M) → min

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Решим систему уравнений относительно базисных переменных:

x10, x11, x12, x13, x9,

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X1 = (0,0,0,0,0,0,0,0,340,350,800,280,300)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 |
| x10 | 350 | 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x11 | 800 | 1 | 3 | 2 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x12 | 280 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x13 | 300 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x9 | 340 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F(X0) | 1730M | -0.46+6M | -0.44+6M | -0.43+5M | -0.42+5M | -M | -M | -M | -M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

**Итерация №0**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x2, так как это наибольший коэффициент .

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai2

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 4-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 | min |
| x10 | 350 | 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | - |
| x11 | 800 | 1 | 3 | 2 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 266.67 |
| x12 | 280 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 280 |
| x13 | 300 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 150 |
| x9 | 340 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 340 |
| F(X1) | 1730M | -0.46+6M | -0.44+6M | -0.43+5M | -0.42+5M | -M | -M | -M | -M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

 После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 |
| x10 | 350 | 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x11 | 350 | 1 | 0 | 0.5 | 1.5 | 0 | -1 | 0 | 1.5 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1.5 |
| x12 | 130 | 3 | 0 | 0.5 | -0.5 | 0 | 0 | -1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 1 | -0.5 |
| x2 | 150 | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 |
| x9 | 190 | 1 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0 | -0.5 |
| F(X1) | 66+830M | -0.46+6M | 0 | -0.21+2M | -0.2+2M | -M | -M | -M | -0.22+2M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.22-3M |

**Итерация №1**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x1, так как это наибольший коэффициент .

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai1

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (3) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 | min |
| x10 | 350 | 2 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 175 |
| x11 | 350 | 1 | 0 | 0.5 | 1.5 | 0 | -1 | 0 | 1.5 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1.5 | 350 |
| x12 | 130 | 3 | 0 | 0.5 | -0.5 | 0 | 0 | -1 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 1 | -0.5 | 43.33 |
| x2 | 150 | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | - |
| x9 | 190 | 1 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 190 |
| F(X2) | 66+830M | -0.46+6M | 0 | -0.21+2M | -0.2+2M | -M | -M | -M | -0.22+2M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.22-3M | 0 |

 После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 |
| x10 | 263.33 | 0 | 0 | 0.67 | 1.33 | -1 | 0 | 0.67 | -0.33 | 0 | 1 | 0 | -0.67 | 0.33 |
| x11 | 306.67 | 0 | 0 | 0.33 | 1.67 | 0 | -1 | 0.33 | 1.33 | 0 | 0 | 1 | -0.33 | -1.33 |
| x1 | 43.33 | 1 | 0 | 0.17 | -0.17 | 0 | 0 | -0.33 | 0.17 | 0 | 0 | 0 | 0.33 | -0.17 |
| x2 | 150 | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 |
| x9 | 146.67 | 0 | 0 | 0.33 | 0.67 | 0 | 0 | 0.33 | 0.33 | 1 | 0 | 0 | -0.33 | -0.33 |
| F(X2) | 85.93+570M | 0 | 0 | -0.13+M | -0.28+3M | -M | -M | -0.15+M | -0.14+M | 0 | 0 | 0 | 0.15-2M | 0.14-2M |

**Итерация №2**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x4, так как это наибольший коэффициент .

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai4

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (1.67) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 | min |
| x10 | 263.33 | 0 | 0 | 0.67 | 1.33 | -1 | 0 | 0.67 | -0.33 | 0 | 1 | 0 | -0.67 | 0.33 | 197.5 |
| x11 | 306.67 | 0 | 0 | 0.33 | 1.67 | 0 | -1 | 0.33 | 1.33 | 0 | 0 | 1 | -0.33 | -1.33 | 184 |
| x1 | 43.33 | 1 | 0 | 0.17 | -0.17 | 0 | 0 | -0.33 | 0.17 | 0 | 0 | 0 | 0.33 | -0.17 | - |
| x2 | 150 | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | -0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 300 |
| x9 | 146.67 | 0 | 0 | 0.33 | 0.67 | 0 | 0 | 0.33 | 0.33 | 1 | 0 | 0 | -0.33 | -0.33 | 220 |
| F(X3) | 85.93+570M | 0 | 0 | -0.13+M | -0.28+3M | -M | -M | -0.15+M | -0.14+M | 0 | 0 | 0 | 0.15-2M | 0.14-2M | 0 |

 После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 |
| x10 | 18 | 0 | 0 | 0.4 | 0 | -1 | 0.8 | 0.4 | -1.4 | 0 | 1 | -0.8 | -0.4 | 1.4 |
| x4 | 184 | 0 | 0 | 0.2 | 1 | 0 | -0.6 | 0.2 | 0.8 | 0 | 0 | 0.6 | -0.2 | -0.8 |
| x1 | 74 | 1 | 0 | 0.2 | 0 | 0 | -0.1 | -0.3 | 0.3 | 0 | 0 | 0.1 | 0.3 | -0.3 |
| x2 | 58 | 0 | 1 | 0.4 | 0 | 0 | 0.3 | -0.1 | -0.9 | 0 | 0 | -0.3 | 0.1 | 0.9 |
| x9 | 24 | 0 | 0 | 0.2 | 0 | 0 | 0.4 | 0.2 | -0.2 | 1 | 0 | -0.4 | -0.2 | 0.2 |
| F(X3) | 136.84+18M | 0 | 0 | -0.078+0.4M | 0 | -M | -0.17+0.8M | -0.098+0.4M | 0.078-1.4M | 0 | 0 | 0.17-1.8M | 0.098-1.4M | -0.078+0.4M |

**Итерация №3**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x6, так как это наибольший коэффициент .

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai6

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (0.8) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 | min |
| x10 | 18 | 0 | 0 | 0.4 | 0 | -1 | 0.8 | 0.4 | -1.4 | 0 | 1 | -0.8 | -0.4 | 1.4 | 22.5 |
| x4 | 184 | 0 | 0 | 0.2 | 1 | 0 | -0.6 | 0.2 | 0.8 | 0 | 0 | 0.6 | -0.2 | -0.8 | - |
| x1 | 74 | 1 | 0 | 0.2 | -0 | 0 | -0.1 | -0.3 | 0.3 | 0 | 0 | 0.1 | 0.3 | -0.3 | - |
| x2 | 58 | 0 | 1 | 0.4 | 0 | 0 | 0.3 | -0.1 | -0.9 | 0 | 0 | -0.3 | 0.1 | 0.9 | 193.33 |
| x9 | 24 | 0 | 0 | 0.2 | 0 | 0 | 0.4 | 0.2 | -0.2 | 1 | 0 | -0.4 | -0.2 | 0.2 | 60 |
| F(X4) | 136.84+18M | 0 | 0 | -0.078+0.4M | 0 | -M | -0.17+0.8M | -0.098+0.4M | 0.078-1.4M | 0 | 0 | 0.17-1.8M | 0.098-1.4M | -0.078+0.4M | 0 |

После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 |
| x6 | 22.5 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | -1.25 | 1 | 0.5 | -1.75 | 0 | 1.25 | -1 | -0.5 | 1.75 |
| x4 | 197.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | -0.75 | 0 | 0.5 | -0.25 | 0 | 0.75 | 0 | -0.5 | 0.25 |
| x1 | 76.25 | 1 | 0 | 0.25 | 0 | -0.12 | 0 | -0.25 | 0.13 | 0 | 0.12 | 0 | 0.25 | -0.13 |
| x2 | 51.25 | 0 | 1 | 0.25 | 0 | 0.38 | 0 | -0.25 | -0.38 | 0 | -0.38 | 0 | 0.25 | 0.38 |
| x9 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | -0.5 | 0 | 0 | -0.5 |
| F(X4) | 140.57 | 0 | 0 | 0.005 | 0 | -0.21 | 0 | -0.015 | -0.21 | 0 | 0.21-M | -M | 0.015-M | 0.21-M |

**Итерация №4**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x3, так как это наибольший коэффициент .

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai3

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (0.5) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 | min |
| x6 | 22.5 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | -1.25 | 1 | 0.5 | -1.75 | 0 | 1.25 | -1 | -0.5 | 1.75 | 45 |
| x4 | 197.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | -0.75 | 0 | 0.5 | -0.25 | 0 | 0.75 | 0 | -0.5 | 0.25 | 395 |
| x1 | 76.25 | 1 | 0 | 0.25 | -0 | -0.12 | -0 | -0.25 | 0.13 | 0 | 0.12 | 0 | 0.25 | -0.13 | 305 |
| x2 | 51.25 | 0 | 1 | 0.25 | 0 | 0.38 | 0 | -0.25 | -0.38 | 0 | -0.38 | 0 | 0.25 | 0.38 | 205 |
| x9 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | -0.5 | -0 | -0 | -0.5 | - |
| F(X5) | 140.57 | 0 | 0 | 0.005 | 0 | -0.21 | 0 | -0.015 | -0.21 | 0 | 0.21-M | -M | 0.015-M | 0.21-M | 0 |

После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 |
| x3 | 45 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2.5 | 2 | 1 | -3.5 | 0 | 2.5 | -2 | -1 | 3.5 |
| x4 | 175 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.5 | -1 | 0 | 1.5 | 0 | -0.5 | 1 | 0 | -1.5 |
| x1 | 65 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | -0.5 | -0.5 | 1 | 0 | -0.5 | 0.5 | 0.5 | -1 |
| x2 | 40 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -0.5 | -0.5 | 0.5 | 0 | -1 | 0.5 | 0.5 | -0.5 |
| x9 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | -0.5 | 0 | 0 | -0.5 |
| F(X5) | 140.35 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.2 | -0.01 | -0.02 | -0.2 | 0 | 0.2-M | 0.01-M | 0.02-M | 0.2-M |

Конец итераций: индексная строка не содержит положительных элементов - найден оптимальный план

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 |
| x3 | 45 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2.5 | 2 | 1 | -3.5 | 0 | 2.5 | -2 | -1 | 3.5 |
| x4 | 175 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.5 | -1 | 0 | 1.5 | 0 | -0.5 | 1 | 0 | -1.5 |
| x1 | 65 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | -0.5 | -0.5 | 1 | 0 | -0.5 | 0.5 | 0.5 | -1 |
| x2 | 40 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -0.5 | -0.5 | 0.5 | 0 | -1 | 0.5 | 0.5 | -0.5 |
| x9 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | -0.5 | 0 | 0 | -0.5 |
| F(X6) | 140.35 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.2 | -0.01 | -0.02 | -0.2 | 0 | 0.2-M | 0.01-M | 0.02-M | 0.2-M |

Оптимальный план можно записать так:

x3 = 45

x4 = 175

x1 = 65

x2 = 40

x9 = 15

F(X) = 0.46\*65 + 0.44\*40 + 0.43\*45 + 0.42\*175 = 140.35

# Задача 2

Однопродуктовая транспортная задача

Математическая модель транспортной задачи:

F = ∑∑cijxij, (1)

при условиях:

∑xij = ai, i = 1,2,…, m, (2)

∑xij = bj, j = 1,2,…, n, (3)

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 7 | 5 | M | 9 | 260 |
| 2 | 5 | 4 | 8 | 10 | 220 |
| 3 | 4 | 2 | 6 | 7 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 |  |

Поскольку в матрице присутствуют запрещенные к размещению клетки, то для отыскания оптимального плана достаточно заменить их на максимальные тарифы (10 умноженное на 3).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 7 | 5 | 30 | 9 | 260 |
| 2 | 5 | 4 | 8 | 10 | 220 |
| 3 | 4 | 2 | 6 | 7 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

∑a = 260 + 220 + 170 = 650

∑b = 200 + 170 + 90 + 100 = 560

Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5 | 30 | 9 | 0 | 260 |
| 2 | 5 | 4 | 8 | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4 | 2 | 6 | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

**Этап I. Поиск первого опорного плана**.

1. Используя *метод наименьшей стоимости*, построим первый опорный план транспортной задачи.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5 | 30[70] | 9[100] | 0[90] | 260 |
| 2 | 5[200] | 4 | 8[20] | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4 | 2[170] | 6 | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 6, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является вырожденным.

Строим новый план.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5 | 30[70] | 9[100] | 0[90] | 260 |
| 2 | 5[30] | 4[170] | 8[20] | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4[170] | 2 | 6 | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является *невырожденным*.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

**Этап II. Улучшение опорного плана**.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vi. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vi = cij, полагая, что u1 = 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=27 | v2=26 | v3=30 | v4=9 | v5=0 |
| u1=0 | 7 | 5 | 30[70] | 9[100] | 0[90] |
| u2=-22 | 5[30] | 4[170] | 8[20] | 10 | 0 |
| u3=-23 | 4[170] | 2 | 6 | 7 | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vi > cij

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;2): 5

Для этого в перспективную клетку (1;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5[+] | 30[70][-] | 9[100] | 0[90] | 260 |
| 2 | 5[30] | 4[170][-] | 8[20][+] | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4[170] | 2 | 6 | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

Цикл приведен в таблице (1,2; 1,3; 2,3; 2,2; ).

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 3) = 70. Прибавляем 70 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 70 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5[70] | 30 | 9[100] | 0[90] | 260 |
| 2 | 5[30] | 4[100] | 8[90] | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4[170] | 2 | 6 | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vi. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vi = cij, полагая, что u1 = 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=6 | v2=5 | v3=9 | v4=9 | v5=0 |
| u1=0 | 7 | 5[70] | 30 | 9[100] | 0[90] |
| u2=-1 | 5[30] | 4[100] | 8[90] | 10 | 0 |
| u3=-2 | 4[170] | 2 | 6 | 7 | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vi > cij

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;2): 2

Для этого в перспективную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5[70] | 30 | 9[100] | 0[90] | 260 |
| 2 | 5[30][+] | 4[100][-] | 8[90] | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4[170][-] | 2[+] | 6 | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

Цикл приведен в таблице (3,2; 3,1; 2,1; 2,2; ).

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 2) = 100. Прибавляем 100 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 100 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5[70] | 30 | 9[100] | 0[90] | 260 |
| 2 | 5[130] | 4 | 8[90] | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4[70] | 2[100] | 6 | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vi. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vi = cij, полагая, что u1 = 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=7 | v2=5 | v3=10 | v4=9 | v5=0 |
| u1=0 | 7 | 5[70] | 30 | 9[100] | 0[90] |
| u2=-2 | 5[130] | 4 | 8[90] | 10 | 0 |
| u3=-3 | 4[70] | 2[100] | 6 | 7 | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vi > cij

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;3): 6

Для этого в перспективную клетку (3;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5[70] | 30 | 9[100] | 0[90] | 260 |
| 2 | 5[130][+] | 4 | 8[90][-] | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4[70][-] | 2[100] | 6[+] | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

Цикл приведен в таблице (3,3; 3,1; 2,1; 2,3; ).

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (3, 1) = 70. Прибавляем 70 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 70 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 7 | 5[70] | 30 | 9[100] | 0[90] | 260 |
| 2 | 5[200] | 4 | 8[20] | 10 | 0 | 220 |
| 3 | 4 | 2[100] | 6[70] | 7 | 0 | 170 |
| Потребности | 200 | 170 | 90 | 100 | 90 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vi. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vi = cij, полагая, что u1 = 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=6 | v2=5 | v3=9 | v4=9 | v5=0 |
| u1=0 | 7 | 5[70] | 30 | 9[100] | 0[90] |
| u2=-1 | 5[200] | 4 | 8[20] | 10 | 0 |
| u3=-3 | 4 | 2[100] | 6[70] | 7 | 0 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vi <= cij.

Минимальные затраты составят:

F(x) = 5\*70 + 9\*100 + 0\*90 + 5\*200 + 8\*20 + 2\*100 + 6\*70 = 3030

# Задача 3

Задача о замене оборудования

**I этап. Условная оптимизация** (k = 4,3,2,1).

Переменной управления на k-м шаге является логическая переменная, которая может принимать одно из двух значений: сохранить (С) или заменить (З) оборудование в начале k-го года.

1-й шаг: k = 4. Для 1-го шага возможные состояния системы t = 1,2,3,4, а функциональные уравнения имеют вид:

F4(t) = max(r(t), (C); S(t) - P + r(0), (З) )

F4(1) = max(152 ; 20 - 15 + 140) = 152 (C)

F4(2) = max(148 ; 22 - 15 + 140) = 148 (C)

F4(3) = max(132 ; 25 - 15 + 140) = 150 (З)

F4(4) = max(125 ; 30 - 15 + 140) = 155 (З)

2-й шаг: k = 3. Для 2-го шага возможные состояния системы t = 1,2,3, а функциональные уравнения имеют вид:

F3(t) = max(r(t) + F4(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F4(1))

F3(1) = max(152 + 148 ; 20 - 15 + 140 + 152) = 300 (C)

F3(2) = max(148 + 150 ; 22 - 15 + 140 + 152) = 299 (З)

F3(3) = max(132 + 155 ; 25 - 15 + 140 + 152) = 302 (З)

3-й шаг: k = 2. Для 3-го шага возможные состояния системы t = 1,2, а функциональные уравнения имеют вид:

F2(t) = max(r(t) + F3(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F3(1))

F2(1) = max(152 + 299 ; 20 - 15 + 140 + 300) = 451 (C)

F2(2) = max(148 + 302 ; 22 - 15 + 140 + 300) = 450 (C)

4-й шаг: k = 1. Для 4-го шага возможные состояния системы t = 1, а функциональные уравнения имеют вид:

F1(t) = max(r(t) + F2(t+1) ; S(t) - P + r(0) + F2(1))

F1(1) = max(152 + 450 ; 20 - 15 + 140 + 451) = 602 (C)

Результаты вычислений по уравнениям Беллмана Fk(t) приведены в таблице, в которой k - год эксплуатации, а t - возраст оборудования.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  k / t | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 602 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 451 | 450 | 0 | 0 |
| 3 | 300 | 299 | 302 | 0 |
| 4 | 152 | 148 | 150 | 155 |

В таблице выделено значение функции, соответствующее состоянию (З) - замена оборудования.

**II этап. Безусловная потимизация** (k = 4,3,2,1)

Безусловная оптимизация начинается с шага при k = 1. Максимальной возможный доход от эксплуатации оборудования за годы с 1-го по 5-й составляет F1(1) = 602. Этот оптимальный выигрыш достигается, если на первом году не производить замены оборудования.

К началу 2-го года возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t2 = t1 + 1 = 1 + 1 = 2.

Оптимальное управление при k = 2, x2(2) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 2-го по 4-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 3-го года возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t3 = t2 + 1 = 2 + 1 = 3.

Безусловное оптимальное управление при k = 3, x3(3) = (З), т.е. для получения максимума прибыли за оставшиеся годы необходимо в этом году провести замену оборудования.

К началу 4-го года возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t4 = t3 + 1 = 0 + 1 = 1.

Оптимальное управление при k = 4, x4(1) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 4-го по 4-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

Таким образом, за 5 лет эксплуатации оборудования замену надо произвести:

- в начале 3-го года эксплуатации