Домашнее задание к теме «Функции нескольких переменных»

1.1. Найти область определения функции $z = f(x;\, y)$, дать ее характеристику и графическую иллюстрацию: а) $z = \dfrac{y+2}{7xy - x^2 y - 12y}$; б) $z = \ln\dfrac{7x - x^2 - 12}{y+2}$; в) $z = \sqrt{\dfrac{3-x}{y^2 - y - 6}}$; г) $z = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x + y}}{\sqrt[3]{x+2y}}$;

д) $z = \log_5[y^2(6 + x - x^2)]$; е) $z = \lg(-x^2 + 2x - y^2 - 6y - 1)$; ж) $z = \dfrac{2}{(x^2 + y^2 - 4y)(x^2 + 2x + y^2 + 1)}$;

з) $z = \ln(x^2 + 2x + y^2 - 3) \cdot \sqrt{3 - x^2 + 2x - y^2}$.

1.2. Исследовать на непрерывность функции: а) $z = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10}}$; б) $z = \ln(2y + 4x^2 - 1)$;

в) $z = 2^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 4y}}$; г) $z = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x+y-5}\right)^{-1}$; д) $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{y + \sqrt[3]{x} - 1}$; е) $z = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2y - \operatorname{arctg} x}}$.

1.3. Привести пример функции $z = f(x;\, y)$ с указанной областью определения:

а) плоскость за исключением точек $M_1(0;\, 0)$, $M_2(-2; -2)$; б) часть плоскости выше экспоненты, включая граничные точки; в) плоскость за исключением точек прямой $y = -x + 2$ и единичной окружности; г) внутренние точки параболы $y = 1 - (x+1)^4$.

1.4. Найти частные и полное приращения функции $z = x^2 y - y/x$ в точке $M(-2;\, 3)$ при приращениях аргументов $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}1$.

1.5. Пользуясь **определением**, найти частные производные функции $z = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{y^2}$ и вычислить их значения в точке $M(-1;\, -2)$.

1.6. Найти частные производные первого порядка функции: а) $z = 2x^3 y + \sqrt[4]{xy^2} - \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{y\sqrt{2y}} - \dfrac{1-y}{x^5} - x + y\sqrt{e}$;

б) $z = x^4 \cos^3 5y - \sqrt[6]{y^5 \sin x^3} - \pi x^2$; в) $z = \lg\dfrac{y}{x} \cdot e^{\sin(x/y)}$;

г) $u = \left(\dfrac{2}{x^2 z}\right)^{\sqrt{y}} + \ln\left(\dfrac{1-2y}{\sqrt[3]{z}}\right) + 2x^{3/z^4} - \cos 2z \cdot 5^{z/x} + 2y$;

д) $u = \left(\dfrac{y^3 - 1}{5\sqrt[3]{x}}\right)^{7z^2} + x\left(\sqrt[7]{3z}\right)^{1-2/y} - 8z^{x-y^3} + (1 - 2yz^2)^3 \cdot \operatorname{atcctg}^2 y^2$;

е) $u = z^3 y^{\sqrt{2-x}} + z^{(2y-x)^4} - \dfrac{\sin xy}{2^{1/x}} + \log_2^x y + \pi^{-z}$;

ж) $u = \left(\dfrac{z \cdot \sqrt[5]{x^3}}{6}\right)^{-3y} - \left(\dfrac{\sqrt[3]{3yz^2}}{y - z^2}\right)^{x^3} - \operatorname{tg}^{2y}\dfrac{1}{2x^2} + (1-3x)^{1/(2\sqrt{z})} - \dfrac{e^3}{\cos 4y} - z\ln 2$.

1.7. Найти частные производные второго порядка: а) $z = 5x^2 y^3 + x^4 + (2y^2 - 3x)^2$; б) $z = \dfrac{\cos 4x}{1 - y^2}$.

1.8. Найти частные и полный дифференциалы функции: а) $z = \operatorname{ctg}\dfrac{x^2}{1-y}$; б) $u = \arccos^y x + \arcsin z^y$.

1.9. Построить семейство линий уровня функции: а) $z = y - x^2 - 2x - 1$; б) $z = 2(1-x)(y+1)$;

в) $z = x^2 + y^2 - 4y - 1$; г) $z = 2x - y + 1$; д) $z = (x+2)^3 + y - 1$.

1.10. Найти градиент данной функции в точке M_0: а) $z = 3x^4 - xy + y^3$, $M_0(1;\, 2)$;

б) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$, $M_0(-3;\, -2)$; в) $z = \dfrac{y\ln(1 + 2x - y)}{x}$, $M_0(1/2;\, 1)$; г) $u = \pi + x^2 + \operatorname{arcctg}(y+z)$, $M_0(2;\, 1;\, 1)$.

1.11. Построить линию уровня функции $z = f(x;\, y)$, проходящую через точку $M_0(x_0;\, y_0)$, указать направление и величину наибольшего роста функции в данной точке:

а) $z=4x+4y-x^2-y^2-8$, $M_0(1;\,3)$; б) $z=\dfrac{-5}{x^2+y^2+6y}$, $M_0(2;\,-3)$;

в) $z=xy-2y-3$, $M_0(1;\,2)$; г) $z=y-x^2-6x$, $M_0(-4;\,2)$; д) $z=y+x^3+1$, $M_0(2;\,-6)$.

1.12. Найти производную данной функции в точке M_0 по направлению к точке M :

а) $z=x^2+y^2x$, $M_0(1;\,2)$, $M(3;\,0)$; б) $z=\dfrac{e^y}{x^2-\sin 2y}$, $M_0(1;\,0)$, $M(-2;\,-3)$;

в) $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$, $M_0(1;\,5;\,-2)$, $M(1;\,7;\,-4)$; г) $z=5x^4-3x-y-1$, $M_0(2;1)$, $M(5;5)$.

1.13. Найти полную производную функции: а) $z=xy^2-x^2y$, где $x=(2t-1)^3$, $y=(1-2t)^2$;

б) $u=x^z+z^y$, где $x=\ln t$, $y=t^2$, $z=1/t$.

1.14. Найти частные производные функции по независимым аргументам:

а) $z=x^3-yx^2+y^2$, где $x=\sin 2v^u$, $y=\cos 3u$; б) $z=\ln(x^2+y^2)$, где $x=uv$, $y=u/v$.

Ответы. **1.1.** а) плоскость за исключением прямых $y=0$, $x=3$, $x=4$;

б) $\begin{cases}3<x<4,\\ y>-2;\end{cases}$ или $\begin{cases}x<3,\\ y<-2;\end{cases}$ или $\begin{cases}x>4,\\ y<-2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x\le 3,\\ y<-2;\end{cases}$ или $\begin{cases}x\le 3,\\ y>3;\end{cases}$ или $\begin{cases}x\ge 3,\\ -2<y<3;\end{cases}$ г) $\begin{cases}y\ge 4-(x+2)^2,\\ y\ne -x/2;\end{cases}$ д) $\begin{cases}-2<x<3,\\ y\ne 0;\end{cases}$

е) $(x-1)^2+(y+3)^2<3^2$; ж) плоскость за исключением окружности $x^2+(y-2)^2=2^2$ и точки $M(-1;\,0)$; з) $\begin{cases}(x+1)^2+y^2>2^2,\\ (x-1)^2+y^2\le 2^2.\end{cases}$

1.2. линии разрыва: а) $(-2;\,3)$; б) $y=1/2-2x^2$; в) $x^2+(y-2)^2=2^2$; г) $y=-x$, $y=-x+5$; д) $y=1-\sqrt[3]{x}$; е) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

1.4. $\Delta_x z=0{,}57$, $\Delta_y z=0{,}45$, $\Delta z=1{,}04$. **1.5.** $z'_x=\dfrac{1}{3y^2\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}}\Bigg|_{(-1;\,-2)}=+\infty$; $z'_y=\dfrac{-2\cdot\sqrt[3]{1+x}}{y^3}\Bigg|_{(-1;\,-2)}=0$.

1.6. а) $z'_x=6x^2y+\dfrac{y}{4\cdot\sqrt[4]{x^3y^2}}-\dfrac{2}{5y\sqrt{2y}\cdot\sqrt[5]{x^3}}+\dfrac{5(1-y)}{x^6}-1$, $z'_y=2x^3+\dfrac{x}{2\cdot\sqrt[4]{x^3y^2}}+\dfrac{3\cdot\sqrt[5]{x^2}}{2y^2\cdot\sqrt{2y}}+\dfrac{1}{x^5}+\sqrt{e}$;

б) $z'_x=4x^3\cos^3(5y)-\dfrac{3x^2y\cos x^3}{6\cdot\sqrt[6]{y\sin^5 x^3}}-2\pi x$, $z'_y=-15x^4\cos^2 5y\cdot\sin 5y-\dfrac{5\sin x^3}{6\cdot\sqrt[6]{y\sin^5 x^3}}$; в) $z'_x=-\dfrac{e^{\sin(x/y)}}{x\ln 10}+\lg\dfrac{y}{x}\cdot e^{\sin(x/y)}\cdot\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}$,

$z'_y=\dfrac{e^{\sin(x/y)}}{y\ln 10}-\lg\dfrac{y}{x}\cdot e^{\sin(x/y)}\cdot\cos\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{y^2}$; г) $u'_x=\dfrac{-4\sqrt{y}}{x^3z}\left(\dfrac{2}{x^2z}\right)^{\sqrt{y}-1}+\dfrac{6x^{\frac{3}{z^4}-1}}{z^4}+\dfrac{z\cos 2z\cdot 5^{\frac{z}{x}}\ln 5}{x^2}$,

$u'_y=\left(\dfrac{2}{x^2z}\right)^{\sqrt{y}}\ln\left(\dfrac{2}{x^2z}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{y}}-\dfrac{2}{1-2y}+2$, $u'_z=\dfrac{-2\sqrt{y}}{x^2z^2}\left(\dfrac{2}{x^2z}\right)^{\sqrt{y}-1}-\dfrac{1}{3z}-\dfrac{24x^{\frac{3}{z^4}}\ln x}{x^5}+2\sin 2z\cdot 5^{z/x}-\dfrac{\cos 2z\cdot 5^{z/x}\ln 5}{x}$;

д) $u'_x=7z^2\left(\dfrac{y^3-1}{5\sqrt[3]{x}}\right)^{7z^2-1}\dfrac{1-y^3}{15x\cdot\sqrt[3]{x}}+\left(\sqrt[7]{3z}\right)^{1-2/y}-8z^{x-y^3}\cdot\ln z$,

$u'_y=\left(\dfrac{y^3-1}{5\sqrt[3]{x}}\right)^{7z^2-1}\dfrac{21y^2z^2}{5\sqrt[3]{x}}+\dfrac{2x}{y^2}\left(\sqrt[7]{3z}\right)^{1-2/y}\ln\sqrt[7]{3z}+24y^2z^{x-y^3}\ln z-6z^2(1-2yz^2)^2\cdot\operatorname{atcctg}^2 y^2-\dfrac{4y(1-2yz^2)^3\cdot\operatorname{arcctg}y^2}{1+y^4}$,

$u'_z=14z\left(\dfrac{y^3-1}{5\sqrt[3]{x}}\right)^{7z^2}\ln\left(\dfrac{y^3-1}{5\sqrt[3]{x}}\right)-8(x-y^3)z^{x-y^3-1}-12yz(1-2yz^2)^2\cdot\operatorname{atcctg}^2 y^2$;

е) $u'_x=-\dfrac{z^3y^{\sqrt{2-x}}\ln y}{2\sqrt{2-x}}-z^{(2y-x)^4}\ln z\cdot 4(2y-x)^3-\dfrac{x^2y\cos xy+\sin xy\ln 2}{x^2\cdot 2^{1/x}}+\log_2^x y\cdot\ln\log_2 y$,

$u'_y=z^3\sqrt{2-x}\cdot y^{\sqrt{2-x}-1}+8z^{(2y-x)^4}\ln z\cdot(2y-x)^3-\dfrac{x\cos xy}{2^{1/x}}+\dfrac{x(\log_2 y)^{x-1}}{y\ln 2}$, $u'_z=3z^2y^{\sqrt{2-x}}+(2y-x)^4z^{(2y-x)^4-1}-\pi^{-z}\ln\pi$;

ж) $u'_x=\left(\dfrac{z\cdot\sqrt[5]{x^3}}{6}\right)^{-3y-1}\dfrac{-3yz}{10\cdot\sqrt[5]{x^2}}-3x^2\left(\dfrac{\sqrt[3]{3yz^2}}{y-z^2}\right)^{x^3}\ln\dfrac{\sqrt[3]{3yz^2}}{y-z}+\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{2x^2}\right)^{2y-1}\dfrac{2y}{x^3\cos^2\dfrac{1}{2x^2}}+\dfrac{(1-3x)^{\frac{1}{2\sqrt{z}}-1}}{2\sqrt{z}}$,

$u'_y = -3\cdot\left(\frac{z\cdot\sqrt[5]{x^3}}{6}\right)^{-3y}\ln\frac{z\cdot\sqrt[5]{x^3}}{6} - x^3\left(\frac{\sqrt[3]{3yz^2}}{y-z^2}\right)^{x^3-1}\frac{zy-z^3-\sqrt[3]{9y^2z}}{(y-z^2)^2\cdot\sqrt[3]{9y^2z}} - 2\mathrm{tg}^{2y}\frac{1}{2x^2}\cdot\ln\mathrm{tg}\frac{1}{2x^2} - \frac{4e^3\sin 4y}{\cos^2 4y}$, $u'_z = \frac{-y\sqrt[5]{x^3}}{2}\left(\frac{z\sqrt[5]{x^3}}{6}\right)^{-3y-1} - 2x^3\left(\frac{\sqrt[3]{3yz^2}}{y-z^2}\right)^{x^3-1}\frac{y^2-yz^2+z\sqrt[3]{9y^2z}}{(y-z^2)^2\cdot\sqrt[3]{9y^2z}} - \frac{(1-3x)^{\frac{1}{2\sqrt{z}}}\ln(1-3x)}{4z\sqrt{z}} - \ln 2.$ **1.7.** а) $z''_{xx} = 10y^3+12x^2+18$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 30xy^2-24y$, $z''_{yy} = 30x^2y+48y^2-24x$; б) $z''_{xx} = \frac{-16\cos 4x}{1-y^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{-8y\sin 4x}{(1-y^2)^2}$, $z''_{yy} = \frac{2\cos 4x(1-y^2+4y)}{1-y^2}$. **1.8.** а) $d_x z = -\frac{2x dx}{(1-y)\sin^2\frac{x^2}{1-y}}$, $d_y z = -\frac{x^2 dy}{(1-y)^2\sin^2\frac{x^2}{1-y}}$; б) $d_x u = -\frac{y(\arccos x)^{y-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $d_y u = ((\arccos x)^y\ln\arccos x + \frac{z^y\ln z}{\sqrt{1-z^{2y}}})dy$, $d_z u = \frac{yz^{y-1}}{\sqrt{1-z^{2y}}}dz$.

1.9. а) $y=(x+1)^2+c$; б) $y = 1-\frac{c}{2(x-1)}$; в) $x^2+(y-2)^2=5+c$, $c\ge -5$; г) $y=2x+1-c$; д) $y=1+c-(x+2)^3$. **1.10.** а) $\mathrm{grad}z(M_0)=(10;\,11)$; б) $\mathrm{grad}z(M_0)=(4;\,-6)$; в) $\mathrm{grad}z(M_0)=(4;\,2)$; г) $\mathrm{grad}u(M_0)=(4;\,-1/5;\,-1/5)$. 1**.11.** а) $\mathrm{grad}z(M_0)=(2;\,-2)$, $|\mathrm{grad}z(M_0)|=2\sqrt{2}$; б) $\mathrm{grad}z(M_0)=(4/5;\,0)$, $|\mathrm{grad}z(M_0)|=4/5$; в) $\mathrm{grad}z(M_0)=(2;\,-1)$, $|\mathrm{grad}z(M_0)|=\sqrt{5}$; г) $\mathrm{grad}z(M_0)=(2;\,1)$, $|\mathrm{grad}z(M_0)|=\sqrt{5}$; д) $\mathrm{grad}z(M_0)=(12;\,1)$, $|\mathrm{grad}z(M_0)|=\sqrt{145}$. 1**.12.** а) $\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)=\sqrt{2}$; б) $\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\frac{\sqrt{2}}{12}$; г) $\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)=93{,}4$. 1**.13.** а) $dz/dt = 2(2t-1)^6(15-16t)$; б) $\frac{du}{dt} = \frac{(\ln t)^{1/t-1}t^{t^2-2} - 2t\ln t - t^{t^2-2}(\ln t)^{1/t}\ln\ln t - t}{t^{t^2}}$.
1.14. а) $z'_u = 2v^u\ln v\cdot\sin 2v^u(3\sin 2v^u - 2\cos 3u)\cos 2v^u - 3(2\cos 3u-\sin^2 2v^u)\sin 3u$, $z'_v = 2uv^{u-1}\sin 2v^u(3\sin 2v^u-2\cos 3u)\cos 2v^u$; б) $z'_u = \frac{2v(v^4-1)}{u(v^4+1)}$, $z'_v = \frac{2v(v^4-1)}{(v^4+1)}$.

Домашнее задание к теме «Экстремумы функции двух переменных»

2.1. Исследовать на локальные экстремумы функцию: а) $z = y-4x^2-y^2-2x$; б) $z = 2xy-4y-2y^2$;
в) $z = x^2+xy+y^2-2x-3y$; г) $z = xy-x^2-y^2-9x+3y-20$; д) $z = x^3+3xy^2-15x-3$;
е) $z = x^3+8y^3-6xy+2$; ж) $z = x/y+8/x+y$; з) $z = x^2y^3(2-x-y)$.

2.2. Определить параметры линейной зависимости $y = ax+b$ по следующим данным:

а)	x	1	2	3	4	5	6	7	8
	y	12	14	23	37	44,5	57	65,5	77
б)	x	0,1	0,2	0,5	1	1,2	1,4	1,9	2
	y	3,1	3,2	3,5	4	4,2	4,4	4,9	5

2.3. Найти условные экстремумы функции: а) $z = xy$ при $3x+2y=5$;
б) $z = xy$ при $x^2+y^2=18$; в) $z = 2x^2+3y^2+xy-6x+4y-20$ при $x+y=5$;
г) $z=(x-2)^2+y^2$ при $y^2-x^2=4$; д) $z = x^2+9y^2-8$ при $xy=12$;
е) $z = 3x+y$ при $\frac{3}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}$; ж) $z=5x-2y$ при $\frac{5}{x^2}=3+\frac{2}{y^2}$; з) $z=\frac{2}{y}-\frac{1}{x}$ при $2y=1+x$.

2.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;y)$ в замкнутой области $\overline{D}$:
а) $z = x^3-3x^2-y^2$, $\overline{D}$: $x=-1$, $y=4$, $y-x+1=0$;
б) $z = x^2+y^2-4x+2y$, $\overline{D}$: $x=0$, $x=3$, $y=-4$, $y=2$; в) $z = x+y$, $\overline{D}$: $x^2+y^2\le 1$.

Ответы. **2.1.** а) $z_{\max}(-1/4;\,1/2)=1/2$; б) $(2;\,0)$ – седловая точка; в) $z_{\min}(1/3;\,4/3)=-7/3$; г) $z_{\max}(-5;\,-1)=1$; д) $(0;\,\sqrt{5})$, $(0;\,-\sqrt{5})$ – седловые точки, $z_{\min}(\sqrt{5};\,0)=-10\sqrt{5}-3$, $z_{\max}(-\sqrt{5};\,0)=10\sqrt{5}-3$; е) $(0;\,0)$ – седловая точка, $z_{\min}(1;\,1/2)=1$; ж) $z_{\max}(4;\,2)=6$; з) $(0;\,0)$, $(0;\,3/2)$, $(2;\,0)$, $(0;\,2)$, $(4/3;\,0)$ – седловые точки, $z_{\max}(2/3;\,1)=4/27$. 2**.2.** а) $y=9{,}79x-2{,}79$; б) $y=x+3$. 2**.3.** а) $z_{\text{усл. max}}(5/6;\,5/4)=25/24$; б) $z_{\text{усл. max}}=z(-3;\,-3)=z(3;\,3)=9$, $z_{\text{усл. min}}=z(3;\,-3)=z(-3;\,3)=-9$; в) $z_{\text{усл. min}}(35/8;\,5/8)=-25/16$; г) $z_{\text{усл. min}}(1;\,\pm\sqrt{5})=\sqrt{6}$; д) $z_{\text{усл. min}}=z(-6;\,-2)=z(6;\,2)=64$; е) $z_{\text{усл. max}}(-4;\,-4)=-16$, $z_{\text{усл. min}}(4;\,4)=16$; ж) $z_{\text{усл. max}}(1;\,1)=3$, $z_{\text{усл. min}}(-1;\,-1)=-3$; з) $z_{\text{усл. max}}(1;\,1)=1$, $z_{\text{усл. min}}(-1/3;\,1/3)=9$.
2.4. а) $z_{\underset{\overline{D}}{\text{наиб.}}}=z(5;\,4)=34$, $z_{\underset{\overline{D}}{\text{наим.}}}=z(-1;\,4)=-20$; б) $z_{\underset{\overline{D}}{\text{наиб.}}}=z(0;\,2)=z(0;\,-4)=8$, $z_{\underset{\overline{D}}{\text{наим.}}}=z(2;\,-1)=-5$; в) $z_{\underset{\overline{D}}{\text{наиб.}}}=z(\sqrt{2/2};\,\sqrt{2/2})=\sqrt{2}$, $z_{\underset{\overline{D}}{\text{наим.}}}=z(-\sqrt{2/2};\,-\sqrt{2/2})=-\sqrt{2}$.

Домашнее задание к теме «Неопределенный интеграл»

3.1. Найти первообразную функции $f(x)$, проходящую через точку M, сделать чертеж:

а) $f(x)=1-2x$, $M\left(\frac{1}{2};1\right)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4;\,4)$.

3.2. Найти интегралы: а) $\int\left(6x^5-\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{3x^5}-\dfrac{1}{x}+e^2-3\right)dx$; б) $\int\dfrac{x-2\cdot\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt[5]{x^4}}dx$; в) $\int\dfrac{7dx}{3x-4}$;

г) $\int(8-x/2)^9dx$; д) $\int\sqrt[3]{(3x-1)^5}dx$; е) $\int(\sqrt{2}-e^{3x+1})dx$;

ж) $\int\sin\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)dx$; з) $\int\dfrac{\mathrm{tg}(\pi/5)}{\cos^2(2-3x)}dx$; и) $\int\dfrac{x-3}{5x+1}dx$

3.3. Найти интегралы: а) $\int\dfrac{dx}{5x^2+4}$; б) $\int\dfrac{2dx}{7-x^2/16}$; в) $\int\dfrac{dx}{3\sqrt{9-25x^2}}$; г) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+7}}$;

д) $\int\dfrac{\sqrt{e}\,dx}{\sqrt{x^2-6x+12}}$; е) $\int\dfrac{dx}{2(x^2+3x+3)}$; ж) $\int\dfrac{3dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$.

3.4. Найти интегралы, используя метод подведения под знак дифференциала или замену переменных:

а) $\int\dfrac{5x^2dx}{4-x^3}$; б) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$; в) $\int\dfrac{x+3}{\sqrt[7]{x^2+6x-1}}dx$; г) $\int\dfrac{5^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}}dx$; д) $\int\dfrac{1-\sin\dfrac{1}{2x}}{x^2}dx$; е) $\int\dfrac{(\mathrm{tg}x-\pi)^4}{\cos^2x}dx$;

ж) $\int e^x\cdot\sqrt[3]{2e^x+\ln 2}\,dx$; з) $\int\dfrac{e^xdx}{e^{2x}+2}$; и) $\int\dfrac{\sqrt{x}+\lg^2x}{x}dx$; к) $\int\dfrac{edx}{x\sqrt{(1-\ln x)^3}}$; л) $\int\dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{arcctg}(x/3)}}{9+x^2}dx$;

м) $\int\dfrac{2\mathrm{arctg}(x+2)}{x^2+4x+5}dx$; н) $\int\dfrac{2\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; о) $\int e^{\cos 4x}\sin 4x dx$; п) $\int x^2\sin(x^3+1)dx$.

3.5. Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

а) $\int x(5-3x)^{15}dx$; б) $\int x\sqrt{2-x}\,dx$; в) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt[4]{(3x+4)^3}}$; г) $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

3.6. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям: а) $\int x\cdot 4^x dx$; б) $\int\dfrac{x^2dx}{e^{x/2}}$;

в) $\int xe^{2x}dx$; г) $\int(2x+7)\sin 3xdx$; д) $\int(x^2+3x+5)\cos 2xdx$; е) $\int x\ln(x^2+5)dx$;

ж) $\int x\ln^2xdx$; з) $\int\dfrac{\ln x}{x^3}dx$; и) $\int x\mathrm{arcctg}(1-x)dx$.

3.7. Не вычисляя коэффициентов, разложить дробь на сумму простейших дробей:

а) $\dfrac{x^3}{(x^3+1)(5x^2+8x+3)}$; б) $\dfrac{x+1}{(x^4+4x^2+3)(x^3+x^2+10x)^2}$.

3.8. Найти интегралы: а) $\int\dfrac{8x+1}{x^2-x-6}dx$; б) $\int\dfrac{4x-57}{30-x^2+x}dx$; в) $\int\dfrac{3x+7}{x^2+4x+4}dx$;

г) $\int\dfrac{2x^2-11}{x^2+x-6}dx$; д) $\int\dfrac{1-3x^2}{x^2+2x-3}dx$; е) $\int\dfrac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$.

Ответы. **3.1.** а) $y=-(x-\frac{1}{2})^2+1$; б) $y=2\sqrt{x}$. **3.2.** а) $x^6-\dfrac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\dfrac{1}{12x^4}-\ln|x|+(e^2-3)x+C$;

б) $\dfrac{5}{6}x\sqrt[5]{x}-\dfrac{15}{4}\sqrt[15]{x^8}+15\sqrt[5]{x}+C$; в) $\dfrac{7}{3}\ln|3x-4|+C$; г) $-\dfrac{1}{5}(8-\frac{x}{2})^{10}+C$; д) $\dfrac{\sqrt[3]{(3x-1)^8}}{8}+C$; е) $\sqrt{2}x-\dfrac{1}{3}e^{3x+1}+C$;

ж) $-\dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+C$; з) $-\dfrac{\mathrm{tg}(\pi/5)}{3}\mathrm{tg}(2-3x)+C$; и) $\dfrac{1}{5}x-\dfrac{16}{25}\ln|5x+1|+C$. **3.3.** а) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}\mathrm{arctg}\dfrac{x\sqrt{5}}{2}+C$;

б) $\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\ln\left|\dfrac{4\sqrt{7}+x}{4\sqrt{7}-x}\right|+C$; в) $\dfrac{1}{15}\arcsin\dfrac{5x}{3}+C$; г) $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+7}\right|+C$; д) $\sqrt{e}\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+12}\right|+C$;

е) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{(2x+3)\cdot\sqrt{3}}{3}+C$; ж) $3\arcsin\dfrac{x+2}{3}+C$. **3.4.** а) $-\dfrac{5}{3}\ln|4-x^3|+C$; б) $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{3}+C$; в) $\dfrac{7}{12}\sqrt[7]{(x^2+6x-1)^6}+C$;

г) $\frac{2\sqrt{3}}{3\ln 5}\cdot 5^{\sqrt{3x}}+C$; д) $-\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{2x}+C$; е) $\frac{1}{5}(\mathrm{tg}x-\pi)^5+C$; ж) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2e^x+\ln 2)^4}+C$; з) $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{2}}+C$;

и) $2\sqrt{x}+\frac{\lg^3 x\cdot\ln 10}{3}+C$; к) $\frac{2e}{\sqrt{1-\ln x}}+C$; л) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(\mathrm{arcctg}(x/3))^4}+C$; м) $\mathrm{arctg}^2(x+2)+C$; н) $\arcsin^2 x-\sqrt{1-x^2}+C$;

о) $-\frac{e^{\cos 4x}}{4}+C$; п) $-\frac{1}{3}\cos(x^3+1)+C$. **3.5.** а) $-\frac{1}{9}\left(\frac{5}{16}(5-3x)^{16}-\frac{1}{17}(5-3x)^{17}\right)+C$; б) $\frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(2-x)^3}+C$;

в) $\frac{1}{9}\left(\frac{4}{5}\sqrt[4]{(3x+4)^5}-16\sqrt[4]{3x+4}\right)+C$; г) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$. **3.6.** а) $\frac{x\cdot 4^x}{\ln 4}-\frac{4^x}{\ln^2 4}+C$; б) $-2(x^2+4x+8)e^{-x}+C$;

в) $\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$; г) $-\frac{2x+7}{3}\cos 3x+\frac{2}{9}\sin 3x+C$; д) $\frac{1}{4}\big((2x^2+6x+9)\sin 2x+(2x+3)\cos 2x\big)+C$;

е) $\frac{x^2}{2}\ln(x^2+5)-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}\ln(x^2+5)+C$; ж) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$; з) $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$; и) $\frac{x^2}{2}\mathrm{arcctg}(1-x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+C$.

3.7. а) $\frac{A_1}{5x+3}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}+\frac{A_4x+A_5}{x^2-x+1}$; б) $\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x+1}+\frac{A_4}{x+3}+\frac{A_5}{(x+3)^2}+\frac{A_6x+A_7}{x^2+x+10}+\frac{A_8x+A_9}{(x^2+x+10)^2}$.

3.8. а) $5\ln|x-3|+3\ln|x+2|+C$; б) $3\ln|x-6|-7\ln|x+5|+C$; в) $3\ln|x+2|-\frac{1}{x+2}+C$;

г) $2x-\frac{3}{5}\ln|x-2|-\frac{7}{5}\ln|x+3|+C$; д) $-3x-\frac{13}{2}\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$; е) $\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\mathrm{arctg}\frac{x+1}{3}+C$.

Домашнее задание к теме «Определенный интеграл»

4.1. Вычислить интегралы: а) $\int_{-1}^{3}x^3dx$; б) $\int_0^{\pi}\sin 2xdx$; в) $\int_{1/2}^{1}\sqrt{4x-2}dx$;

г) $\int_0^2\frac{2x-1}{2x+1}dx$; д) $\int_{3/4}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$; е) $\int_1^3\frac{dx}{x^2+6x+10}$.

4.2. Вычислить интегралы, используя метод подведения под знак дифференциала или замену переменных: а) $\int_1^5\frac{x}{1+x^2}dx$; б) $\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$; в) $\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; г) $\int_0^{\pi/2}\cos^3 xdx$; д) $\int_1^2\frac{e^{1/x^2}}{x^3}dx$;

е) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; ж) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{x\cos x+\sin x}{2x^3\sin^3 x}dx$; з) $\int_0^{1/2}\frac{4\arcsin x+2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; и) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^3xdx$.

4.3. Вычислить интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

а) $\int_0^1 2xe^{-x}dx$; б) $\int_0^1\frac{x^2}{3}3^xdx$; в) $\int_0^{\pi/4}\frac{x^2}{2}\cos 2xdx$; г) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$; д) $\int_1^2(2x+1)\ln xdx$; е) $\int_0^2 2\ln(x^2+4)dx$;

ж) $\int_1^e\frac{\ln^3 x}{2x^2}dx$; з) $\int_0^1 2x\,\mathrm{arctg}\,xdx$; и) $\int_0^{1/2}\mathrm{arctg}\,2xdx$; к) $\int_1^3\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

4.4. Найти среднее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$:

а) $y=\cos^3 x$, $[0;\,\pi/2]$; б) $y=\frac{2}{1+e^x}$, $[0;\,2]$; в) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{(5-x)^4}}$, $[-27;\,4]$.

4.5. Оценить интегралы: а) $\int_{-2}^{3}(3x-x^3)dx$; б) $\int_1^e(x-2\ln x)dx$; в) $\int_0^2\frac{x^2+5}{x^2+2}dx$.

4.6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y^2=9x$, $y=x-4$; б) $y=x-x^2$, $y=0$, $x=2$; в) $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$, $x=4$; г) $y=x^3$, $y=2x$; д) $y=2x+3$, $y=x^2$; е) $y=x^2+8x-12$, $y=18x-x^2$.

4.7. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: а) $\int_5^{+\infty}e^{1-x/5}dx$;

б) $\int_{-\infty}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{3x-1}dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8dx}{4+x^2}$; г) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$; д) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+1)^2}$; е) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{1-2x}dx$; ж) $\int_{e^3}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

4.8. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: а) $\int\limits_{-1}^{-1/4}\frac{dx}{1+4x}$;

б) $\int\limits_3^5\frac{dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$; в) $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ г) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-3x)^6}}$; д) $\int\limits_{-5}^{0}\frac{dx}{x^2-5x+4}$; е) $\int\limits_2^4\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}}$; ж) $\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{tg}xdx$; з) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\ln x}$.

Ответы. **4.1.** а) 20; б) 0; в) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; г) $2-\ln 5$; д) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; е) $\operatorname{arctg}0{,}08$. **4.2.** а) $\frac{1}{2}\ln 13$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$; е) $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$; ж) $\frac{7}{\pi^2}$; з) $\frac{\pi^2}{18}-\sqrt{3}+2$; и) $\frac{1-\ln 2}{2}$. **4.3.** а) $\frac{2e-4}{e}$; б) $\frac{1}{\ln 3}-\frac{2}{\ln^2 3}+\frac{4}{3\ln^3 3}$; в) $\frac{\pi^2-8}{64}$; г) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; д) $6\ln 2-2{,}5$; е) $2\pi-8+12\ln 2$; ж) $\frac{3e-8}{e}$; з) $\frac{\pi-2}{2}$; и) $\frac{\pi-\ln 4}{8}$; к) $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}+1$. **4.4.** $f(c)=\frac{4}{3\pi}$; б) $f(c)=\ln\frac{2e^2}{1+e^2}$; в) $5/31$.

4.5. а) $-90\le I\le 10$; б) $2(1-\ln 2)(e-1)\le I\le(e-1)$; в) $3\le I\le 5$. 4.6. а) $S=40\frac{1}{2}$ ед.^{2}; б) $S=1$ ед.^{2}; в) $S=6\ln 2-2$ ед.^{2}; г) $S=2$ ед.^{2}; д) $S=10\frac{2}{3}$ ед.^{2}; е) $S=\frac{32}{3}$ ед.^{2} **4.7.** а) 5; б) расходится; в) 2π; г) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; д) 1/24; е) расходится; ж) 1/18.

4.8. а) расходится; б) π; в) $3+3\sqrt[3]{2}$; г) расходится; д) расходится; е) $\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{25}\right)$; ж) расходится; з) расходится.

Домашнее задание к теме «Дифференциальные уравнения»

5.1. ДУ с разделяющимися переменными

а) $yy'+x=1$; **б)** $(1+y^2)dx-xydy=0$, $y(1)=0$; **в)** $y'\cdot tgx=y$, $y(\pi/2)-1$; **г)** $y'=10^{x+y}$;
д) $y'=\sqrt{4x+2y-1}$; **е)** $2x^2yy'+y^2=2$; **ж)** $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$.

5.2. ЛДУ первого порядка

а) $y'=(1-y)\cos x$, $y(0)=2$; **б)** $y+y'\ln^2 y=(x+2\ln y)y'$; **в)** $(xy+1)y'=\frac{y}{x}$; **г)** $y'=yctgx+\frac{y^3}{\sin x}$;
д) $y'+2x^3y^5=xy$; **е)** $xy'+y=y^2x\ln x$; **ж)** $2y'+ytgx=\frac{\sin x}{\sqrt{y}}$, $y(0)=1$.

5.3 Линейные однородные второго порядка с постоянными коэффициентами

а) $y''+4y=0$; **б)** $3y''+2y'-5y=0$; **в)** $y''-2y'+17y=0$; **г)** $y''+3y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$;
д) $y''-2y'+y=0$, $y(2)=1$, $y'(2)=-2$; **е)** $3y''-y'+y=0$; **ж)** $y''-2y'=0$, $y(0)=0$, $y(\ln 2)=3$.

5.4. ДУ второго порядка, не содержащие явно y, y'

30. $y''=\frac{1}{\sin^2 3x}$; **31.** $y''=\left(\frac{x}{3}-4\right)^5$;

32. $y''=\frac{1}{\sqrt[4]{5-2x}}$; **33.** $y''=\sqrt[6]{(3x+1)^5}$, **34.** $y''=\cos(3+7x)$, **35.** $y''=2^{(3x-1)}$.

Ответы: **5.1.** а) $y^2+(x-1)^2=c^2$; б) $x^2-y^2=1$; в) $y=\sin x$; г) $10^x+10^{-y}=c$; 5) $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(2+\sqrt{4x+2y-1})=x+c$; д) $y^2-2=ce^{1/x}$; е) $\arcsin x+\sqrt{5+y^2}=c$. **5.2.** а) $y=1+e^{-\sin x}$; б) $x=\ln^2 y+cy$; в) $x=\frac{2y}{c-y^2}$; г) $y^2(2\cos x+c)=\sin^2 x$; д) $y^4(2x^2-1+ce^{-2x^2})=1$; е) $y=\frac{-2}{x(c+\ln^2 x)}$; ж) $y\sqrt{y}=4\sqrt[4]{\cos^3 x}-3\cos x$. **5.3**. а) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$; б) $y=c_1e^x+c_2e^{-5x/3}$; в) $y=e^x(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)$; г) $y=(5-2e^{-3x})/3$; д) $y=e^{x-2}(7-3x)$; е) $y=e^{x/6}(c_1\cos\frac{\sqrt{11}x}{6}+c_2\sin\frac{\sqrt{11}x}{6})$; ж) $y=e^{2x}-1$.

Домашнее задание к теме «Числовые ряды»

6.1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{9n^2+2}-3n\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{16n^5+1}}{1-n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}\frac{(3n^2+1)^2}{n(2n^2+1)+n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt[3]{8n^6-1}}{(n+3)^3+3n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1-2n^3}{(n+4)^2}$; е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n+1)\sqrt{\ln n}}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+3)}{n^2+6}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n^2+2n}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{1-2n}}{\sqrt[3]{n+4}}$.

6.2. Исследовать сходимость рядов с помощью признаков сравнения:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\cdot\sqrt{3^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}+n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2n^2}{5n^4+n^3}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{\sqrt{16n^5+9n^2}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{27n^3+1}+\sqrt[3]{8n}}{n^3+2n-1}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^3\cdot\sqrt[8]{n+3}}{n^3\cdot\sqrt[4]{2n+1}}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3n^2+1)^2}{\sqrt{25n^{12}+n^3}}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{2n}\cdot\sqrt[3]{n^5+2}}{2n^4+\sqrt{4n^2-1}}$.

6.3. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-1}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{3n-2}}{(3n-1)\cdot\sqrt[5]{n^3+4}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+1}{e^{n-1}(2n)!}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{5^n+2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!\sqrt{4n-1}}{2^{n+1}(n+1)!}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sqrt[6]{(2n-1)^5}}{7^{n-1}}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-2}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$.

6.4. Исследовать сходимость рядов с помощью радикального признака Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^3+n^2}{n^3+n}\right)^{\frac{n}{2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{5n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n^2+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5}\left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^{n+2}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^{3n+1}}\left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{n^2/2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{ne^n}\left(\frac{5n^2+3}{5n^2-1}\right)^{5n^3-1}$.

6.5. Исследовать ряды на сходимость с помощью интегрального признака Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln^7(n+1)}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\lg n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}5^{2-6n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{2n+3}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+4n^2}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^2-1}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{8n-1}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-2n+5}$.

6.6. Исследовать сходимость рядов по признаку Лейбница:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n^3-1}{(n+1)(2n-1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1/2)^{2n}}{3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+5n+6}$.

6.7. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot\sqrt[5]{32n^2+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{3n+4}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot e^{n+1}}{(3n-1)\cdot 3^{2n-1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{(2n+1)^3}$;

е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln 3n}$; ж) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\sqrt[3]{\lg^2 n}}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot\ln^2(n+2)}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\lg^7(n+1)}}$.

Ответы. **6.1.** а) выполняется; б) не выполняется, ряд расходится; в) выполняется; г) выполняется; д) не выполняется, ряд расходится; е) выполняется; ж) выполняется; з) не выполняется, ряд расходится; и) выполняется. **6.2.** а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится; е) расходится; ж) расходится; з) сходится. **6.3.** а) расходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится; д) расходится; е) расходится; ж) сходится; з) сходится. **6.4.** а) расходится; б) сходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится; е) расходится. **6.5.** а) сходится; б) расходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) расходится; ж) расходится; з) сходится; и) сходится. **6.6.** а) расходится; б) сходится; в) сходится. **6.7.** а) сходится абсолютно; б) сходится условно; в) сходится условно; г) сходится абсолютно; д) расходится; е) сходится условно; ж) сходится условно; з) сходится абсолютно; и) сходится абсолютно.

Образцы контрольных работ

Контрольная работа № 1 (20 баллов)

1. Найти область определения функции

$$z=\sqrt{\frac{8+2y-y^2}{1+x}},\ z=\frac{\ln(e^{3-x}-1)}{\ln(x+1)-y},\ z=\lg(8y-4x^2-4y^2-4x-1).$$

изобразить ее на плоскости и дать характеристику.

2. Найти частные производные функции $u=z^{-\frac{y}{4-x^2}}+3^{x\sqrt{5z}}-2\cdot\sqrt[3]{yx^z}+\sin^6 y\cdot\lg(2x^3-y)$.

3. Исследовать на локальные экстремумы функцию

$$z=xy^2-xy-xy^3+3,\ z=2x^2-y^2+x(2y-x)-3y(y+1).$$

4. Найти условные экстремумы функции

$$z=1/y-2/x \text{ при } y+1=2x,\ z=4y-x \text{ при } 4/y^2-1/x^2=3.$$

5. Построить линию уровня функции $z=3-xy+y$, проходящую через точку $M_0(2;-1)$. Указать направление и величину наибольшего роста функции в данной точке.

Контрольная работа № 2 (20 баллов)

1. $\int_1^2\frac{9^{1/x}}{x^2}dx$; 2. $\int_1^{e^3}(2x+1)\ln x\,dx$, $\int_{\pi/2}^{\pi}(2x-1)\cos\frac{x}{2}dx$; 3. $\int\frac{4x^2+3}{x^2+2x-3}dx$;

4. $xy'+y=5^{x/2}$; 5. $16y''+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$, $y''+16y'+15y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-5$.

Контрольная работа № 3 (20 баллов)

1) Проверить выполнение необходимого условия сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{4^{2n+1}}$.

Исследовать ряды на сходимость по признаку:

2) сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sqrt[3]{27n^5+2}}{4n^3+2n+1}$; 3) Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}(n+2)}{(2n+1)!}$; 4) Коши $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+10}$.

5) Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\cdot\sqrt[5]{(\lg(2n+1))^2}}.$$

Итоговая контрольная работа (40 баллов).

1. Доказать теорему о необходимых условиях локальных экстремумов функции двух переменных. Исследовать на локальные экстремумы функцию $z=x^2+y^2$.

2. Определение определенного интеграла, его геометрический смысл. Оценить интеграл $?\le\int_0^3(x-2)^2dx\le ?$. Дать графическую иллюстрацию.

3. Исследовать на непрерывность функцию $z=5^{\frac{1}{y+\sqrt[3]{x+1}}}$.

4. Найти производную функции $z=\frac{y^2\cos 3x}{e^{2x}}$ в точке $M_0(0;\,-1)$ по направлению к точке $M(-2;\,1)$.

5. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость: $\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\mathrm{arcctg}2x}}{1+4x^2}dx$.

6. Определить тип и найти общее решение ДУ: $y''=\sqrt[3]{1-3x}-x+e^2$.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=3x$, $y^2=9x$.

8. Исследовать ряд на сходимость по радикальному признаку Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{6^n}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n^2/2}$.

РГГУ. ФЭК. Математика. Семестр II. Вопросы к итоговой контрольной работе

Функции нескольких переменных

1. Дать определение внутренней и граничной точек множества. *Примеры:* написать аналитические выражения, которые задают на плоскости область: а) неограниченную; б) замкнутую; в) ограниченную и открытую. Проиллюстрировать графически свойство связности.
2. Дать определение функции нескольких переменных. Что графически представляет собой область определения функции: а) одной переменной; б) двух; в) трех? *Примеры:* найдите область определения функции $z = \arcsin(x/y)$ и изобразите ее графически. Приведите примеры функций двух переменных $z = f(x,y)$, у которых областью определения являются следующие множества: а) вся плоскость, за исключением точек $M_1(2,-4)$, $M_2(-1,3)$; б) вся плоскость, за исключением точек, лежащих на параболе $2y = x^2$ и прямой $x = -2$.
3. Дать определение линии уровня. Построить семейство линий уровня функций: $z = y + x^2 - 2x$, $z = \ln(x-1) + y$.
4. Сформулировать два определения непрерывности функции двух переменных. *Примеры:* исследовать на непрерывность функцию: а) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2 - 2x + y^2 + 4y + 4}$; б) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y-2}}$; в) $z = \dfrac{1}{e^{y-2x+1} - 1}$. Приведите примеры функций двух переменных, которые имеют разрыв: а) в точке; б) вдоль прямой; в) вдоль гиперболы.
5. Полное и частные приращения функции двух переменных. *Пример:* найти частные и полное приращение функции $z = x^2 y - y/x$ в точке $M_0(-2;3)$ при $\Delta x = -0.05$, $\Delta y = 0.1$.
6. Дать определение частных производных функции двух переменных. В чем их геометрический смысл? *Пример:* пользуясь **определением** найти z'_x, z'_y функции $z = \sqrt{x} + y^2$, $z = (x^2 - 2x)/y$.
7. Сформулировать теорему Шварца. Сколько у функции $u = f(x,y,z)$ частных производных второго порядка а) всего; б) разных? *Пример:* найдите z''_{xy} и z''_{yx} для функции $z = x^2 \sin y / y$.
8. Дать определение и написать формулу производной по направлению для функции двух переменных. *Пример.* Найти производную данной функции в точке M_0 по направлению к точке M: а) $z = \dfrac{\cos xy}{e^{3y}}$, $M_0(2;0)$, $M(1;-1)$

   б) $z = \dfrac{e^{y/3}}{x - y^2}$, $M_0(-1;0)$, $M(-2;2)$; в) $z = \dfrac{\sin x^2 + y}{e^{3x}}$, $M_0(0;-1)$, $M(1;-3)$; г) $z = \dfrac{y - 2x^2}{e^{2y}}$, $M_0(2;0)$, $M(0;-2)$.
9. Дать определение градиента. *Пример:* найти величину и направление наибольшего роста функции $z = y^2 \ln(2x + y)$ в точке $M(1;-1)$.
10. Дать определение локальных экстремумов функции двух переменных. Доказать теорему о необходимых условиях экстремумов. Сформулировать теорему о достаточных условиях экстремумов. *Пример:* исследуйте на экстремумы функции: $z = y^4 + x^4$, $z = x^3 + y^3$.
11. Вывести формулы для определения параметров линейной зависимости $y = ax + b$ (метод наименьших квадратов). *Пример:* построить по методу наименьших квадратов прямую $y = ax + b$ для данной системы точек (–1;1), (0;2), (3;4) и оценить ее среднеквадратическое отклонение
12. Дать определение условного экстремума функции двух переменных. Сформулировать теоремы о необходимых и достаточных условиях условного экстремума.
13. Привести план нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области. *Примеры:* найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области: $z = x^3 + y^2$, $\overline{D}$: $x^2 + y^2 \le 1$; $z = xy$, $\overline{D}: x^2 + y^2 \le 4$.
14. Определение дифференцируемости функции двух переменных. Доказать теорему о связи дифференцируемости и непрерывности. Доказать теорему о связи дифференцируемости с существованием частных производных. Верны ли обратные теоремы?
15. Дать определение полного и частных дифференциалов функции нескольких переменных. *Примеры:* найти полный дифференциал функции $z = 2x^{1/y} \cdot 3^{\sqrt{x}}$.
16. Доказать теорему о производной сложной функции. Привести частный и общий случаи. *Пример:* найти z'_t для функции $z = tg(2^x y)$, если $x = \cos t^2$, $y = arcctg(2 - 3t)$.

Интегральное исчисление

1. Определение первообразной и неопределенного интеграла. Доказать теорему об общем виде первообразных. *Пример:* найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=1/x^3$, удовлетворяющую условию $F(\sqrt{2})=1$.
2. Сформулировать свойства неопределенного интеграла.
3. Вывести формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Привести типовые случаи.
4. Привести порядок интегрирования дробно-рациональных функций. Виды простейших дробей. *Пример:* разложить на простейшие дроби функции $\dfrac{x+1}{x^3(x-3)^2(x^2+2x+1)(x^2+2x+10)^2}$ (не определяя коэффициентов); $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+x+1)}$ (с определением коэффициентов). *Пример:* $\int\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2-2x+3}dx$.
5. Определение определенного интеграла. Его геометрический смысл. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.
6. Сформулировать свойства определенного интеграла. *Примеры:* оценить интеграл $?\le\int\limits_0^3(x-2)^2dx\le ?$, дать графическую иллюстрацию. Найти среднее значение функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0;1]$, дать графическую иллюстрацию.
7. Вычисление площади плоской фигуры в прямоугольной системе координат. *Примеры:* найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+6x-8$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; $y=4x^2+4x$, $y=9+4x+3x^2$; $y=x^2-1$, $x+y=1$; $x=27-y^2$, $x=-6y$; $y^2=3x$, $x=3$; $y^2=4-x$, $x+2y=4$.
8. Несобственный интеграл 1-го рода: определение, геометрический смысл, признаки сравнения. *Пример*: вычислить или установить расходимость: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+6x+12}$, $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg}2x}{1+4x^2}dx$, $\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg}3x}}{1+9x^2}dx$; $\int\limits_{10}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\lg^3x}}$.
9. Несобственный интеграл 2-го рода: определение, геометрический смысл, признаки сравнения. Примеры: $\int\limits_{-1}^{3}\dfrac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, $\int\limits_{-2}^{0}\dfrac{dx}{(x+3)\sqrt{\ln(x+3)}}$; $\int\limits_1^{10}\dfrac{dx}{x\lg^2x}$; $\int\limits_0^{1/4}\dfrac{dx}{\operatorname{arctg}2x(1+2x^2)}$; $\int\limits_0^1\dfrac{2^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{\operatorname{arctg}^3x\,(1+x^2)}}$.
10. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка.
11. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения ДУ n-го порядка.
12. ДУ с разделяющимися переменными: вид, схема решения. *Пример:* $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1$, $\sqrt{5+4y^2}+y'y\sqrt{4-x^2}=0$, $y(0)=1$; $e^{1/y}y'=\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}$, $y(1)=1$.
13. Линейное ДУ 1-го порядка: вид, схема решения. Пример: $y'-3y/x=x$, $xy'+y=e^{3x}$.
14. ДУ 2-го порядка, не содержащие явно y, y': вид, общее решение. *Пример*: $y''=2x+\cos(x/2)-3$, $y''=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; $y''=\dfrac{1}{\sqrt[5]{(1-2x)^3}}$; $y''=\dfrac{1}{e^{3x}}+2$.
15. Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами: вид, схема решения.

Числовые ряды

1. Определение числового ряда, частичной суммы, суммы, сходимости.

2. Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии. Вывод условий его сходимости.

3. Свойства рядов. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$?

4. Доказать теорему о необходимом признаке сходимости ряда. Верно ли, что ряд сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$?

5. Доказать расходимость гармонического ряда.

6. Признаки сравнения рядов с положительными членами.

7. Признак Даламбера. **8.** Радикальный признак Коши. **9.** Интегральный признак Коши.

10. Ряд Дирихле. Вывод условий его сходимости.

11. Признак Лейбница. Приведите пример расходящегося знакочередующегося ряда, общий член которого стремится к нулю. Верно ли, что если последовательность u_n монотонна, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$ сходится?

12. Условная и абсолютная сходимость знакопеременных рядов, признак абсолютной сходимости. Верно ли, что если условия признака Лейбница выполняются, то ряд сходится абсолютно? Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$ сходится условно, что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$?

Таблица производных	**Таблица интегралов**
Правила дифференцирования:	*Правила интегрирования:*
1) $(c)'=0$, где $c=\text{const}$;	1) $\int dF(x)=F(x)+C$;
2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;	2) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$, где $a=\text{const}$, $a\neq 0$;
3) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, $(c\cdot u)'=c\cdot u'$;	3) $\int\big(f(x)\pm g(x)\big)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$;
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$, $v\neq 0$, $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{c\cdot v'}{v^2}$;	4) $\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$;
5) производная сложной функции $y=y(u)$, где $u=u(x)$: $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.	5) $\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow\int f(u)du=F(u)+C$, $u=\varphi(x)$;
Производные элементарных функций:	6) $\int udv\begin{bmatrix}du(x)=u'(x)dx\\ v=\int dv\end{bmatrix}=uv-\int vdu$.
1) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$, $(x)'=1$;	*Основные неопределенные интегралы:*
$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$;	1) $\int adx=ax+C$, $a=\text{const}$, $\int dx=x+C$, $\int 0\cdot dx=C$;
2) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$;	2) $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n\neq -1$;
3) $(e^x)'=e^x$;	3) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$;
4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$;	4) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, $a>0$, $a\neq 1$;
5) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;	5) $\int e^x dx=e^x+C$;
6) $(\sin x)'=\cos x$;	6) $\int\sin xdx=-\cos x+C$; 7) $\int\cos xdx=\sin x+C$;
7) $(\cos x)'=-\sin x$;	8) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\text{tg}x+C$; 9) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\text{ctg}x+C$;
8) $(\text{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;	10) $\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\text{arctg}\dfrac{x}{a}+C$, $a>0$;
9) $(\text{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;	11) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$, $\lvert x\rvert<\lvert a\rvert$;
10) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	12) $\int\dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$;
11) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	13) $\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$, $\lvert x\rvert\neq a$;
12) $(\text{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;	14) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$;
13) $(\text{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.	15) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$, $\lvert x\rvert>\lvert a\rvert$.