Задачи на метод Фурье

Во всех задачах требуется нарисовать несколько первых собственных функций задачи Штурма – Лиувилля.

Задача 1
Стенки бесконечной прямоугольной коробки заряжены следующим образом: две смежных стенки имеют нулевой потенциал, другая пара — потенциал 1. Найти потенциал электрического поля внутри коробки. Нарисовать изолинии.

Задача 2
Стенки бесконечной прямоугольной коробки $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ заряжены следующим образом: две смежных стенки ($x = 0$ и $y = 0$) имеют нулевой потенциал, на стенке $y = b$ потенциал распределен как $A \sin(\frac{\pi}{a} x)$, на стенке $x = a$ — $B \sin(\frac{\pi}{b} y)$. Найти потенциал электрического поля внутри коробки. Нарисовать изолинии.

Задача 3
Найти потенциал электрического поля внутри бесконечной полосы $(x, y) \in (-\infty, \infty) \times [0, a]$; на верхней и нижней стенках задано периодическое распределение потенциала — $A(\sin x + |\sin x|)$ и $B(\cos x + |\cos x|)$ соответственно. Нарисовать изолинии.

Задача 4
Найти потенциал электрического поля внутри бесконечной полосы $(x, y) \in (-\infty, \infty) \times [0, a]$; на верхней и нижней стенках задано периодическое распределение потенциала — $A(\sin x + |\sin x|)$ и $A(\sin 2x + |\sin 2x|)$ соответственно. Нарисовать изолинии.

Задача 5
Найти потенциал электрического поля внутри бесконечной полосы $(x, y) \in (-\infty, \infty) \times [0, a]$; на верхней стенке задано периодическое распределение потенциала — $A \operatorname{sign}(\sin x + |\sin x|)$, на нижней стороне потенциал нулевой. Нарисовать изолинии.

Задача 6
Найти установившееся температурное поле внутри бесконечной полосы $(x, y) \in (-\infty, \infty) \times [0, a]$; на верхней и нижней стенках поддерживается нулевая температура, внутри действуют источники тепла с плотностью распределения $q = A \operatorname{sign}(\sin x + |\sin x|)$. Нарисовать изолинии.

Задача 7
Найти потенциал электрического поля, создаваемого бесконечной решеткой (с постоянным шагом) параллельных заряженных проволок, расположенных в одной плоскости. Решетка расположена посередине между двумя параллельными заземленными плоскостями. Указание: воспользоваться свойствами δ-функции. Нарисовать изолинии потенциала.

Задача 8
Найти потенциал электрического поля, создаваемого бесконечной заряженной сеткой с квадратными ячейками. Сетка расположена посередине между двумя параллельными заземленными плоскостями. Указание: свести задачу к двумерной, воспользоваться свойствами δ-функции.

Задача 9
Найти стационарное распределение температуры в прямоугольной области $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$, если на двух смежных сторонах происходит теплообмен со средой нулевой температуры, а две другие стороны теплоизолированы. Внутри области равномерно выделяется тепло (объемная плотность q). Нарисовать изолинии.

Задача 10
Рассчитать электростатическое поле в прямоугольной области $(x, y) \in [-a, a] \times [0, b]$. На участке $[-h, h]$ верхней стороны задан потенциал V. На остальной части границы потенциал равен нулю. Нарисовать изолинии.

Задача 11
Рассчитать потенциал электростатического поля в бесконечной полосе $(x, y) \in [-\infty, \infty] \times [0, a]$. На участке $[-h, h]$ верхней стороны задан потенциал 1. На остальной части границы потенциал равен нулю. Нарисовать изолинии.

Задача 12
В бесконечном брусе прямоугольного сечения $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$ равномерно выделяется тепло плотностью Q. Поверхность бруса теплоизолирована за исключением полосы $x \in [-d, d]$ ($d < a$) на верхней грани. В пределах этой полосы через поверхность равномерно отводится тепловой поток q. Найти условие теплового равновесия, определить стационарное распределение температуры, нарисовать изолинии.

Задача 13
Бесконечный брус квадратного сечения имеет внутри квадратный сердечник из материала с теми же тепловыми свойствами. Внутри сердечника равномерно выделяется тепло. Температура наружной поверхности бруса нулевая. Найти стационарное распределение температуры. Изобразить изолинии поля температуры.

Задача 14
Внутри бесконечного проводника прямоугольного сечения выделяется тепло постоянной плотности q, на поверхности происходит теплообмен со средой температуры $T_0 = 1$. Найти стационарное распределение температуры по сечению.
Задача 15
Найти стационарное распределение температуры в прямоугольной области ($x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$) при следующих граничных условиях: на левой стороне поддерживается температура T_0, на правой происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, на нижней стороне поддерживается нулевая температура, на верхней задан тепловой поток: q при $x < a/2$, 0 при $a/2 < x < a$.
Задача 16
Верхняя стенка бесконечной коробки прямоугольного сечения $(x, y) \in [-a, a] \times [0, b]$ совершает малые колебания ω, амплитуда колебаний на стенке распределена по закону $A(a^2 - x^2)$, остальные стенки жесткие. Найти амплитуду установившегося акустического поля внутри коробки. Указание: задача сводится к уравнению Гельмгольца с граничными условиями 2-го рода.
Задача 17
Найти стационарное распределение температуры в квадратной области ($x \in [0, a]$, $y \in [0, a]$) при следующих условиях: на участке $x \in [a/4, 3a/4]$ верхней стороны подводится равномерный тепловой поток q, на участке $y \in [a/4, 3a/4]$ правой стороны такой же поток отводится, остальная часть границы изолирована. Нарисовать изолинии.
Задача 18
Левая и нижняя стороны прямоугольной области $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ имеют нулевую температуру. Вдоль верхней стороны и вдоль правой стороны температура линейно меняется от 0 до 1: на верхней стороне — слева направо, на правой стороне — снизу вверх. Найти распределение температуры внутри области. Нарисовать изолинии.
Задача 19
Бесконечный брус прямоугольного сечения $(x, y) \in [-a, a] \times [0, b]$ составлен из двух одинаковых половинок ($x \in [-a, 0]$ и $x \in [0, a]$) с разными коэффициентами теплопроводности. На свободных поверхностях первой половинки поддерживается температура T_1, на свободных поверхностях второй — температура T_2. Найти распределение температуры в сечении бруса. Нарисовать изолинии.
Задача 20
Тонкостенный бесконечный проводящий цилиндр составлен из двух полуцилиндров (сечение — поуокружность), один из которых заряжен до потенциала V_1, а второй — до потенциала V_2. Найти поле внутри и вне цилиндра. Нарисовать изолинии.
Задача 21
Найти потенциал электростатического поля между двумя соосными бесконечными цилиндрами. Внутренний цилиндр заземлен, наружный составлен из двух полуцилиндров (сечение — поуокружность), один из которых заряжен до потенциала 1, а второй заземлен. Нарисовать изолинии.
Задача 22
Найти электрическое поле внутри и вне бесконечного проводящего тонкостенного полуцилиндра (сечение — поуокружность+диаметр). Цилиндрическая часть стенки заряжена до потенциала V_1, плоская часть — до потенциала V_2. Нарисовать изолинии.
Задача 23
Найти стационарное температурное поле в круговом кольце. На внутреннем радиусе поддерживается нулевая температура, на внешнем температура равна $u\big|_{r=a} = A\cos\varphi$ при $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ и нулю при других значениях φ. Нарисовать изолинии.
Задача 24
Найти стационарное температурное внутри толстостенного цилиндра. Внутренняя поверхность теплоизолирована, на внешнем задано распределение температуры $u\big|_{r=a} = (\mathrm{sign}(\sin\varphi) + 1)/2$. Нарисовать изолинии.
Задача 25
Внутренняя поверхность бесконечной круглой толстостенной трубы теплоизолирована, половина наружной поверхности ($\varphi \in [0, \pi]$) поддерживается при температуре T_1, другая половина — при температуре T_2. Найти распределение температуры в сечении трубы. Нарисовать изолинии.
Задача 26
Внутри бесконечного сплошного цилиндра равномерно распределены источники тепла плотности q, половина наружной поверхности цилиндра ($\varphi \in [0, \pi]$) поддерживается при нулевой температуре, другая половина — при температуре T_0. Найти распределение температуры в сечении цилиндра. Нарисовать изолинии.

Задача 27
Бесконечная тонкостенная коробка имеет сечение в виде четверти круга. Одна из плоских стенок заряжена до потенциала V_1, вторая — до потенциала V_2, на цилиндрической стенке задан потенциал $(V_1+V_2)/2$. Найти распределение потенциала в сечении. Нарисовать изолинии

Задача 28
Внутри бесконечного полуцилиндра (сечение — полукруг) равномерно выделяется тепло (удельная плотность источников — q), наружные стенки поддерживаются при температуре T_0. Найти распределение температуры в сечении. Нарисовать изолинии.

Задача 29
Бесконечный брус имеет сечение в виде полукольца $(r,\varphi)\in[a,b]\times[0,\pi]$. Внутри равномерно выделяется тепло, на поверхности поддерживается нулевая температура. Найти распределение температуры в сечении. Нарисовать изолинии.

Задача 30
Бесконечный сплошной цилиндр составлен из двух полуцилиндров (полукруглого сечения) с разными тепловыми свойствами. На свободной поверхности одного полуцилиндра задана температура T_1, на поверхности другого —- температура T_2. Найти распределение температуры в сечении. Нарисовать изолинии.

Задача 31
Идеальная несжимаемая жидкость поступает в кольцевую область ($r\in[a,b]$) через узкую щель на внешней границе области ($r=b,\ \varphi\in[-\delta,\delta]$) и вытекает через такую же щель сбоку ($r=b,\ \varphi\in[\pi/4-\delta,\pi/4+\delta]$). Найти распределение потенциала скорости в области, считая, что $\delta\to 0$, а расход жидкости равен Q. Указание: записать постановку с использованием δ-функции. Нарисовать изолинии.

Задача 32
Тепловой поток плотности q подводится к цилиндру $(r,z)\in[0,a]\times[-L,L]$ через пояс $z=[-h,h]$. Остальная часть цилиндрической поверхности и верхний торец теплоизолированы. На нижнем торце поддерживается нулевая температура. Найти стационарное температурное поле. Нарисовать изолинии.

Задача 33
Тепловой поток плотности q подводится к цилиндру $(r,z)\in[0,a]\times[0,L]$ через круговую область $r=[0,h]$ на верхнем торце. Остальная часть верхнего торца и цилиндрическая поверхность теплоизолированы. На нижнем торце поддерживается нулевая температура. Найти стационарное температурное поле. Нарисовать изолинии.

Задача 34
В пределах круга радиуса h на верхнем торце цилиндра $(r,z)\in[0,a]\times[0,L]$ подводится тепловой поток плотностью q. Такой же поток снимается с такой же области на нижнем торце. Остальная часть поверхности не пропускает тепла. Найти стационарное распределение температуры. Нарисовать изолинии.

Задача 35
Через верхний и нижний торцы цилиндра подводится тепловой поток с равномерно распределенной плотностью q. На боковой поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Найти стационарное распределение температуры. Нарисовать изолинии.

Задача 36
На тонкостенном цилиндре $(r,z)\in[0,a]\times[-L,L]$ поддерживается следующее распределение потенциала: в пределах пояса $z=[-h,h]$ на цилиндрической поверхности задан потенциал V_0. Остальная часть цилиндрической поверхности и оба торца заземлены. Найти распределение потенциала внутри цилиндра. Нарисовать изолинии.

Задача 37
Внутри цилиндра $(r,z)\in[0,a]\times[0,L]$ равномерно распределены источники тепла плотности q. На поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой температуры T_0. Найти стационарное распределение температуры. Нарисовать изолинии.

Задача 38
Два одинаковых цилиндра высоты L и радиуса a из разных материалов соединены торцами (тепловой контакт идеальный). Наружная часть поверхности одного из цилиндров поддерживается при температуре T_1, наружная часть поверхности другого — при температуре T_2. Найти стационарное распределение температуры. Нарисовать изолинии.

Задача 39
Внутри толстостенного цилиндра $(r,z)\in[a,b]\times[0,L]$ (отрезок толстой трубы) равномерно распределены источники тепла плотности q. На всей поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Найти стационарное распределение температуры. Нарисовать изолинии.

Задача 40
Цилиндрическая втулка $(r,z) \in [a,b] \times [0,L]$ (отрезок толстой трубы) работает при следующих температурных условиях: внутренняя цилиндрическая поверхность и торцы поддерживаются при температуре T_0, на наружной цилиндрической поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Найти стационарное распределение температуры. Нарисовать изолинии.
Задача 41
Найти амплитуду установившегося акустического поля внутри цилиндрической коробки $(r,z) \in [0,a] \times$ $\times [0,L]$ при следующих условиях: в один из торцов вделан плоский "динамик" радиуса $r_0 < a$, который совершает малые колебания в осевом направлении с частотой ω, остальные стенки абсолютно жесткие. Нарисовать изолинии. Указание: задача сводится к решению уравнения Гельмгольца при граничных условиях 2-го рода.
Задача 42
Идеальная несжимаемая жидкость втекает в цилиндрическую камеру $(r,z) \in [0,a] \times [0,L]$ через нижний торец равномерным потоком (скорость везде одинакова и направлена вдоль оси цилиндра). На верхнем торце имеется отверстие $r \in [0,b]$, через которое жидкость вытекает, причем так что осевая составляющая скорости имеет параболическое распределение по радиусу: $V\big|_{z=L,r<b} = A(b^2 - r^2)$. Остальные стенки камеры твердые. Найти распределение потенциала скорости внутри камеры. Нарисовать изолинии.
Задача 43
Найти стационарное распределение температуры внутри куба, две противоположных грани которого поддерживаются при температуре 1, остальные — при нулевой температуре.
Задача 44
Найти стационарное распределение температуры внутри куба, на поверхности которого поддерживаются нулевая температура, а внутри действуют равномерно распределенные источники тепла.
Задача 45
Найти стационарное распределение температуры внутри куба, на поверхности которого происходит теплообмен со средой нулевой температуры, а внутри действуют равномерно распределенные источники тепла.
Задача 46
Найти распределение температуры в пластине толщины $2a$, внутри которой равномерно распределены источники тепла плотности q, если начальная температура пластины T_0, а обе поверхности излучают тепло по закону Ньютона. Температура среды равна 0.
Задача 47
Найти закон изменения температуры, если поверхности $x = a$, $x = -a$ бесконечной пластины начиная с момента $t = 0$ поддерживаются при температуре T_1, $-T_1$ соответственно, а начальная температура пластины равна T_0.
Задача 48
На поверхностях $x = 0$ и $x = a$ бесконечной стенки происходит теплообмен по закону Ньютона с коэффициентами α_1 и α_2 соответственно. Слева от стенки температура среды равна нулю, справа температура среды изменяется по закону $A \sin \omega t$. Найти закон изменения температуры, если начальная температура стенки равна нулю.
Задача 49
К граням бесконечной пластины $x \in [-a,a]$ начиная с момента времени $t = 0$ подводится тепло потоком плотности q. Найти закон изменения температуры, если начальная температура пластины равна нулю.
Задача 50
Тонкий обруч нагрет таким образом что одна половина (по длине) имеет температуру 1, а другая — нулевую температуру. В момент $t = 0$ кольцо опускают в среду нулевой температуры. Теплообмен на поверхности кольца протекает по закону Ньютона. Найти закон изменения средней по сечению температуры.
Задача 51
С момента $t = 0$ одна поверхность бесконечной теплопроводной стенки имеет нулевую температуру, на другой поверхности температура меняется по линейному закону $u = At$. Начальная температура стенки равна T_0.
Задача 52
Две бесконечных стенки (пластины) одинаковой толщины с температурами T_1 и T_2 в момент $t = 0$ приведены в идеальный контакт. Свободные поверхности пластин теплоизолированы. Исследовать изменение поля температуры.
Задача 53
Стержень длины a находится в среде, температура которой меняется по закону $A \sin \omega t$. На одном конце стержня постоянно поддерживается нулевая температура, начальная температура стержня равна нулю, теплообмен со средой происходит по закону Ньютона. Найти закон изменения температуры.

Задача 54
Стержень длины a находится в среде с температурой T_0 и с момента $t=0$ равномерно прогревается электрическим током. Найти закон изменение температуры, считая, что начальная температура равно нулю, концы стержня теплоизолированы, а теплообмен на поверхности происходит по закону Ньютона. Найти также стационарное распределение температуры.
Задача 55
Найти закон, по которому будет охлаждаться полый толстостенный шар $r \in [a, b]$, который был предварительно нагрет до температуры T_0. Поверхность шара начиная с момента $t=0$ поддерживается при нулевой температуре, в полости вакуум.
Задача 56
На поверхности шара радиуса R происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Внутри шара выделяется тепло объемной плотности $Q = A \sin \omega t$. Начальная температура шара равна нулю. Найти закон изменения температуры.
Задача 57
Шар радиуса R, нагретый до температуры T_0, помещают в среду с нулевой температурой. Найти закон охлаждения шара.
Задача 58
Температура поверхности шара радиуса R изменяется по закону $A \sin \omega t$. Начальная температура шара равна нулю. Исследовать поле температуры.
Задача 59
Во внутренних точках шара радиуса R начиная с момента $t=0$ равномерно выделяется тепло объемной плотности αt. На поверхности поддерживается нулевая температура. найти закон изменения температуры, если начальная температура шара равна T_0.
Задача 60
Найти закон, по которому будет нагреваться шар радиуса R, внутри которого выделяется тепло плотностью Q. Начальная температура нулевая. Поверхность шара поддерживается при температуре $T=0$.
Задача 61
Шар состоит из ядра $r \in [0, a]$ и толстостенной оболочки $r \in [a, b]$ с различными тепловыми свойствами. Начальная температура нулевая. С момента $t=0$ на поверхности шара устанавливается температура T_0. Найти закон изменения температуры.
Задача 62
Температура поверхности полого толстостенного шара $r \in [a, b]$ с момента $t=0$ возрастает по закону $u\big|_{r=b} = \alpha t$. Начальная температура равна нулю, внутри шара вакуум. Найти закон изменения температуры.
Задача 63
Шар радиуса a находится в среде, температура которой меняется как $A \sin \omega t$. Теплообмен происходит по закону Ньютона, начальная температура равна T_0. Найти закон изменения температуры.
Задача 64
Найти распределение температуры в цилиндре радиуса R, нагревающемся вследствие объемного тепловыделения (плотность источников — Q). С поверхности цилиндра отводится постоянный тепловой поток q, начальная температура равна нулю. Считать, что внутренние источники и поток на поверхности удовлетворяют условию, при котором возможно наступление теплового равновесия.
Задача 65
В цилиндре радиуса R начиная с момента $t=0$ выделяется тепло плотностью Q. Начальная температура равна T_0, на боковой поверхности поддерживается нулевая температура. Найти закон изменения температуры.
Задача 66
Внутри бесконечного цилиндра имеется сердечник из того же материала. Начиная с момента $t=0$ внутри сердечника выделяется тепло плотностью Q. Начальная температура системы нулевая, на поверхности поддерживается нулевая температура. Найти закон изменения температуры.
Задача 67
Внутри бесконечного цилиндра с момента $t=0$ действуют равномерно распределенные источники тепла, интенсивность которых меняется по закону $q = \sin \omega t$. Начальная температура системы нулевая, на поверхности поддерживается нулевая температура. Найти закон изменения температуры.
Задача 68
Начальная температура бесконечного цилиндра радиуса R равна T_0. На поверхности начиная с момента $t=0$ происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой T_1. Найти распределение температуры в цилиндре.

Задача 69
Начиная с момента $t=0$ к боковой поверхности бесконечного цилиндра радиуса R подводится тепло интенсивности αt. Найти закон изменения температуры, считая начальную температуру цилиндра равной нулю.
Задача 70
Найти закон изменения температуры бесконечного цилиндра радиуса R, если его поверхность теплоизолирована, а в начальный момент времени температура была распределена по закону $T_0 r^2$.
Задача 71
Внешняя поверхность бесконечной трубы $r \in [a, b]$ теплоизолирована. Начальная температура равна нулю. В момент $t=0$ в трубу подается жидкость с температурой T_0. Теплообмен происходит по закону Ньютона. Исследовать температурное поле в трубе.
Задача 72
Внешняя поверхность бесконечной трубы $r \in [a, b]$ имеет нулевую температуру. Температура внутренней поверхности, начиная с момента $t=0$ равна T_0. Начальная температура равна нулю. Исследовать температурное поле в трубе.
Задача 73
Начальная температура бесконечной толстостенной трубы $r \in [a, b]$ равна нулю. С момента $t=0$ через внешнюю поверхность подается постоянный тепловой поток плотности q, внутренняя поверхность поддерживается при нулевой температуре. Найти закон изменения температуры, а также установившееся распределение.
Задача 74
Бесконечная толстостенная труба находится в среде с нулевой температурой. С момента $t=0$ по трубе начинает течь жидкость температуры T_0. Изучить процесс нагревания трубы, считая, что теплообмен на внутренней и внешней поверхностях происходит по закону Ньютона с коэффициентами α_1 и α_2. Найти также стационарное распределение температуры.
Задача 75
Бесконечный цилиндр состоит из круглого сердечника и толстостенной оболочки, выполненных из разных материалов. Начальная температура равна T_0. С момента $t=0$ на поверхности устанавливается нулевая температура. Изучить процесс остывания цилиндра.
Задача 76
Бесконечный цилиндр состоит из круглого сердечника и толстостенной оболочки. Тепловые свойства материалов одинаковы. Начальная температура цилиндра равна нулю. С момента $t=0$ внутри сердечника равномерно выделяется тепло. Наружная поверхность поддерживается при нулевой температуре.
Задача 77
В бесконечном цилиндре начиная с момента $t=0$ выделяется тепло плотностью Q. Начальная температура равна T_0, на поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Найти закон изменения температуры, а также стационарное распределение.
Задача 78
Начальная температура бесконечного цилиндра равна T_0. На поверхности начиная с момента $t=0$ происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой T_1. Найти распределение температуры в цилиндре.
Задача 79
Внешний край тонкой шайбы (кольца) поддерживается при нулевой температуре. С момента $t=0$ вся поверхность шайбы омывается жидкостью с температурой T_0 (теплообмен происходит по закону Ньютона). Найти закон изменения средней по толщине температуры, а также распределение температуры в установившемся состоянии.
Задача 80
В бесконечном цилиндре радиуса a начиная с момента $t=0$ действуют источники тепла, распределенные по закону $q=A(a^2-r^2)$. На поверхности поддерживается температура T_0, начальная температура равна нулю. Найти закон изменения температуры, а также стационарное распределение.
Задача 81
Струна длиной L с закрепленными концами колеблется под действием равномерно распределенной нагрузки $q\sin\omega t$. Найти форму колебаний струны, считая, что в момент времени $t=0$ она находилась в состоянии покоя.
Задача 82
В момент времени $t=0$ на струну длиной L начинает действовать равномерно распределенная нагрузка p, остающаяся в дальнейшем постоянной. Найти закон колебаний струны, считая, что вначале струна покоилась.

Задача 83
Точка $x=0$ струны $x \in [-L, L]$ оттянута на величину Δ, струна находится в состоянии покоя. В момент времени $t=0$ струну отпускают. Найти закон колебаний при условии, что струна находится в сопротивляющейся среде. Сила сопротивления пропорциональна скорости с коэффициентом k.
Задача 84
К струне $x \in [-L, L]$, находившейся в состоянии покоя, в момент времени $t=0$ приложили распределенную нагрузку $q = q_0 x^2/L^2$. Найти закон колебаний и форму струны в установившемся состоянии.
Задача 85
Один конец струны $x \in [0, L]$ колеблется по закону $A \sin \omega t$, другой закреплен. Найти закон колебаний, считая что струна находится в вязкой среде (сила сопротивления пропорциональна скорости) и в начальный момент покоилась.
Задача 86
Струна длины L заделана в упругой резиновой пленке, которая создает сопротивление движению струны, пропорциональное величине отклонения. Один конец струны закреплен, другой колеблется по закону $A \sin \omega t$. Найти закон колебаний, считая что струна в начальный момент покоилась.
Задача 87
На свободном конце $x = L$ упругого стержня с момента $t = 0$ действует гармоническая продольная сила $F = A \sin \omega t$. Конец $x = 0$ закреплен. Найти закон колебаний.
Задача 88
На конце упругого стержня начиная с момента $t=0$ действует продольная сила $F = A \sin \omega t$, второй конец закреплен. На поверхности стержня действует сила трения пропорциональная скорости. До начала процесса стержень покоился в недеформированном состоянии. Изучить поведение решения при $t \to \infty$.
Задача 89
Один конец упругого стержня закреплен, движение другого сдерживается трением, пропорциональным скорости. Стержень покоится и растянут продольной силой, приложенный к незакрепленному концу. В момент $t=0$ действие силы прекращается. Найти закон последующих колебаний.
Задача 90
Упругий стержень состоит из двух частей одинаковой длины, но различной удельной плотности (ρ_1 и ρ_2). Концы стержня закреплены. Система покоится под действием сосредоточенной продольной силы, приложенной в точке соединения. В момент $t=0$ действие силы прекращается. Найти закон последующих колебаний.
Задача 91
Упругий стержень состоит из двух частей одинаковой длины, но различной удельной плотности (ρ_1 и ρ_2). Один конец закреплен, на другом с момента $t=0$ действует продольная сила $F = A \sin \omega t$.
Задача 92
Струна равномерно движется в поперечном направлении со скоростью v в сопротивляющейся среде (сопротивление пропорционально скорости); движение установившееся. В момент времени $t=0$ струна мгновенно останавливается. Найти закон последующих свободных колебаний в среде. Указание: сначала определить форму струны до момента остановки.
Задача 93
В момент $t=0$ к участку $[-a, a]$ покоящейся струны $[-L, L]$ прикладывается нагрузка p. Найти закон колебаний.
Задача 94
Упругий стержень $[0, L]$ покоится, находясь под действием сосредоточенной продольной силы F, приложенной в точке $x = a$ ($a < L$). Концы стержня закреплены. В момент $t = 0$ сила перестает действовать. Исследовать колебания стержня.
Задача 95
Один конец упругого стержня закреплен, движение другого сдерживается пружиной (сила пропорциональна смещению). Стержень покоится и растянут продольной силой, приложенный к незакрепленному концу. В момент $t = 0$ действие силы прекращается. Найти закон последующих колебаний.
Задача 96
Тяжелый стержень подвешен вертикально и покоится. В момент $t = 0$ на свободном конце начинает действовать постоянная продольная сила F. Найти закон колебаний, приняв во внимание действие силы тяжести. Указание: вначале необходимо определить продольное смещение в состоянии покоя.
Задача 97
Исследовать колебания струны под действием поперечной силы тяжести при условии, что в начальный момент времени точкам струны была сообщена скорость V_0.

Задача 98
Струна $x \in [0, L]$ покоится. В момент $t = 0$ в точке струны $x = a$ начинает действовать сосредоточенная сила $F = A\sin\omega t$. Исследовать последующие колебания струны. Указание: сосредоточенную силу f можно рассматривать как нагрузку плотности $f/2\delta$, распределенную на малом отрезке $x \in [a-\delta, a+\delta]$ вблизи точки a при $\delta \to 0$.
Задача 99
Внутри сферы находится неподвижный воздух, в момент $t = 0$ сфера начинает совершать малые пульсации (радиус сферы меняется по закону $a + A\sin\omega t$). Найти акустическое поле внутри сферы.
Задача 100
Между двумя концентрическими сферами заключен неподвижный воздух. В момент $t = 0$ внутренняя сфера начинает совершать малые пульсации (радиус сферы меняется по закону $a + A\sin\omega t$), внешняя сфера остается неподвижной. Найти акустическое поле в пространстве между сферами.
Задача 101
В начальный момент времени поверхность мембраны радиуса a была отклонена по закону $u = A(a^2 - r^2)$. Найти закон колебаний, если начальная скорость точек мембраны равна нулю.
Задача 102
Задача о тяжелой мембране. Исследовать колебания тяжелой мембраны под действием силы тяжести. В начальный момент времени мембрана покоилась в недеформированном состоянии.
Задача 103
На круглую мембрану действует пульсирующее давление $p\sin\omega t$. В начальный момент времени мембрана покоилась в недеформированном состоянии. Исследовать колебания. Указание: можно выделить частное решение, пропорциональное $\sin\omega t$.
Задача 104
Внешний край мембраны кольцевой формы закреплен. Внутренний, начиная с момента $t = 0$, колеблется по закону $A\sin\omega t$. Определить форму колебаний. В начальный момент времени мембрана покоилась в недеформированном состоянии. Указание: можно выделить частное решение, пропорциональное $\sin\omega t$.
Задача 105
Внешний край мембраны радиуса a, начиная с момента $t = 0$, колеблется по закону $A\sin\omega t$. Определить форму колебаний. В начальный момент времени мембрана покоилась в недеформированном состоянии. Указание: выделить частное решение, пропорциональное $\sin\omega t$.
Задача 106
В момент $t = 0$ поверхность кольцевой мембраны ($r \in [a, b]$) мгновенно приобретает скорость v под действием импульсной силы. Исследовать колебания. В начальный момент времени мембрана покоилась в недеформированном состоянии.
Задача 107
Тяжелая нить подвешена вертикально и покоится. С момента $t = 0$ начинает действовать постоянная равномерно распределенная по длине нити поперечная нагрузка (“ветер”). Исследовать малые колебания. Найти установившееся состояние. Указание: начало отсчета поместить на свободный конец нити, сделать замену переменной $\xi = \sqrt{x}$.
Задача 108
Удельная плотность упругого стержня линейно меняется по длине (стержень переменного сечения). Один конец закреплен, на другом на другом с момента $t = 0$ действует продольная сила $F = A\sin\omega t$. Изучить процесс колебаний. Указание: начало отсчета поместить в условную точку, где толщина стержня обращалась бы в ноль; сделать замену переменной $\xi = \sqrt{x}$.
Задача 109
Стенка бесконечного цилиндра радиуса a с момента $t = 0$ начинает совершать малые волнообразные колебания по закону $u\big|_{r=a} = A\sin\omega t\cos n\varphi$. Определить колебания газа, находящегося внутри цилиндра. Начальные условия нулевые. Указание: решение искать в виде $u(r, \varphi, t) = v(r, t)\cos n\varphi$.
Задача 110
Между бесконечными соосными цилиндрами заключен покоящийся воздух. В момент $t = 0$ внутренний цилиндр начинает пульсировать с малой амплитудой по закону $A\sin\omega t$. Получить выражение для потенциала скорости.
Задача 111
Найти напряжение в однородном электрическом проводе с параметрами C, G, L, R, если начальный ток и начальное напряжение равны нулю, один конец провода заземлен, а к другому начиная с момента $t = 0$ приложена ЭДС $E = A\sin\omega t$.
Задача 112
Один конец провода заземлен, к другому с момента $t = 0$ через сосредоточенное сопротивление приложена постоянная ЭДС. Начальные напряжение и ток в проводе нулевые. Принять, что самоиндукция и утечка равны нулю.

Задача 113
Провод с парамeтрами L, C, R на одном конце присоединен к источнику постоянной ЭДС E, а на другом замкнут на сопротивление R_0. В момент $t=0$ нагрузка R_0 отключается. Найти напряжение.

Задача 114
Один конец кабеля ($L=G=0$) замкнут на сосредоточенное сопротивление R_0. К другому концу в момент $t=0$ подключается источник постоянной ЭДС E. Найти напряжение в кабеле. Начальные условия нулевые.

Задача 115
Один конец линии без искажений заземлен, к другому в момент $t=0$ подключается источник ЭДС E. Найти напряжение. Начальные условия нулевые.

Задача 116
Один конец кабеля ($L=G=0$) заземлен, к другому через сосредоточенное сопротивление R_0 в момент $t=0$ подключается источник постоянной ЭДС E. Найти напряжение. Начальные условия нулевые.

Задача 117
Один конец электрической линии длины a открыт. К другому концу в момент $t=0$ приложена постоянная ЭДС E. Начальный ток и начальное напряжение нулевые.

Задача 118
Кабель ($L=G=0$) заземлен в точке $x=a$. При $t=0$ в точке $x=0$ через емкость C_0 приложена ЭДС E_0. Начальные условия нулевые. Найти напряжение в кабеле.

Задача 119
Линия без искажений ($RC=LG$) заземлена в точке $x=a$. В момент $t=0$ в точке $x=0$ приложена ЭДС $A\sin\omega t$. Начальные условия нулевые. Найти напряжение в линии.

Задача 120
Конец $x=a$ линии без искажений ($RC=LG$) изолирован. Линия заряжена до потенциала 1. При $t=0$ конец $x=0$ заземляется. Найти напряжение в линии.

Общие решения некоторых дифференциальных уравнений

1) Уравнение $y'' + \lambda y = 0$

$$y = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x);$$

2) Уравнение $y'' - \lambda y = 0$

$$y = C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} x) = D_1 \exp(\sqrt{\lambda} x) + D_2 \exp(-\sqrt{\lambda} x);$$

3) Уравнение Бесселя (цилиндр) $(xy')' + (\lambda x - n^2/x) y = 0$

$$y = C_1 \mathrm{J}_n(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \mathrm{Y}_n(\sqrt{\lambda} x);$$

4) Модифицированное уравнение Бесселя $(xy')' - (\lambda x + n^2/x) y = 0$

$$y = C_1 \mathrm{I}_n(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \mathrm{K}_n(\sqrt{\lambda} x);$$

5) Уравнение $(x^2 y')' + \lambda x^2 y = 0$

$$y = C_1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda} x)}{x} + C_2 \frac{\cos(\sqrt{\lambda} x)}{x};$$

6) Уравнение $(x^2 y')' - \lambda x^2 y = 0$

$$y = C_1 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} x)}{x} + C_2 \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} x)}{x};$$

7) Уравнение Эйлера $(x^2 y')' - n(n+1) y = 0$

$$y = C_1 x^n + C_2 x^{-n-1};$$

8) Уравнение $(xy')' + \lambda \dfrac{y}{x} = 0$

$$y = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x);$$

9) Уравнение $(xy')' - \lambda \dfrac{y}{x} = 0$

$$y = C_1 x^{\sqrt{\lambda}} + C_2 x^{-\sqrt{\lambda}};$$

Простейшие свойства δ-функции

Определение:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \xi)\, dx = \begin{cases} f(\xi), & \text{если } \xi \in [a, b], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение уравнения с δ-функцией в правой части

$$\big(p(x) y'\big)' + q(x) y = \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in [a, b],$$

“склеивается” из двух решений однородного уравнения $(p(x)y')' + q(x)y = 0$. Одно решение — y_1 — задано на отрезке $[a, \xi]$ и удовлетворяет г. у. в точке a, другое — y_2 — задано на отрезке $[\xi, b]$ и удовлетворяет г. у. в точке b. В точке ξ выполняются условия $y_1(\xi) = y_2(\xi)$ (непрерывность) и $y_2'(\xi) - y_1'(\xi) = 1/p(\xi)$ (скачок производной). Всего, таким образом, имеется 4 условия, из которых однозначно определяются постоянные в выражениях для y_1 и y_2.
Ряд Фурье δ-функции по системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля:

$$\delta(x - \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(\xi)}{\|X_k\|^2} X_k(x).$$

Некоторые свойства бесселевых функций

Ряды:

$$\mathrm{J}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+n}, \quad \mathrm{I}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+n}.$$

Связь обычных и модифицированных цилиндрических функций:

$$\mathrm{I}_n(z) = (-\mathrm{i})^n \mathrm{J}_n(\mathrm{i}z), \quad \mathrm{K}_n(z) = \frac{1}{2}\mathrm{i}\pi\mathrm{i}^n\Big(\mathrm{J}_n(\mathrm{i}z) + \mathrm{i}\mathrm{Y}_n(\mathrm{i}z)\Big).$$

Рекуррентные формулы

$$\mathrm{J}_{n-1}(z) + \mathrm{J}_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}\mathrm{J}_n(z), \quad \mathrm{J}_{n-1}(z) - \mathrm{J}_{n+1}(z) = 2\mathrm{J}'_n(z);$$

$$\mathrm{Y}_{n-1}(z) + \mathrm{Y}_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}\mathrm{Y}_n(z), \quad \mathrm{Y}_{n-1}(z) - \mathrm{Y}_{n+1}(z) = 2\mathrm{Y}'_n(z);$$

$$\mathrm{I}_{n-1}(z) - \mathrm{I}_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}\mathrm{I}_n(z), \quad \mathrm{I}_{n-1}(z) + \mathrm{I}_{n+1}(z) = 2\mathrm{I}'_n(z);$$

$$\mathrm{K}_{n-1}(z) - \mathrm{K}_{n+1}(z) = -\frac{2n}{z}\mathrm{K}_n(z), \quad \mathrm{K}_{n-1}(z) + \mathrm{K}_{n+1}(z) = -2\mathrm{K}'_n(z).$$

Вронскианы:

$$W\{\mathrm{J}_n, \mathrm{Y}_n\} = \mathrm{J}_n(x)\mathrm{Y}'_n(x) - \mathrm{J}'_n(x)\mathrm{Y}_n(x) = \frac{2}{\pi x};$$

$$W\{\mathrm{I}_n, \mathrm{K}_n\} = \mathrm{I}_n(x)\mathrm{K}'_n(x) - \mathrm{I}'_n(x)\mathrm{K}_n(x) = -\frac{1}{x}.$$

Вычисление нормы. Пусть $\mathrm{Z}_n(x) = C_1\mathrm{J}_n(\sqrt{\lambda}x) + C_2\mathrm{Y}_n(\sqrt{\lambda}x)$ — произвольное решение уравнения Бесселя

$$(xy')' + \Big(\lambda x - \frac{n^2}{x}\Big)y = 0.$$

Тогда

$$\int_a^b \mathrm{Z}_n^2(x)x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big(\mathrm{Z}_n^2(x) - \mathrm{Z}_{n-1}(x)\mathrm{Z}_{n+1}(x)\Big)\Big|_a^b = \frac{x^2}{2}\Big(\mathrm{Z}_n^2(x) + \mathrm{Z}_{n+1}^2(x) - \frac{2n}{x}\mathrm{Z}_n(x)\mathrm{Z}_{n+1}(x)\Big)\Big|_a^b.$$