СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Санкт-Петербург
2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Институт интеллектуальных электронных систем

Специальность
210106.65 – промышленная электроника

Направление подготовки бакалавра
210100.62 – электроника и микроэлектроника

Санкт-Петербург
Издательство СЗТУ
2011

Утверждено редакционно-издательским советом университета
УДК 517(07)

Методы математической физики: учебно-методический комплекс / сост. И.Б. Ерунова. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2011. – 130 с.

Учебно-методический комплекс разработан в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования.

Представлены основные методы исследования и решения краевых задач, относящихся к дисциплине «Методы математической физики». Приведена классификация уравнений с частными производными второго порядка и классификация краевых задач. Уравнения переноса, волновое уравнение, уравнения теплопроводности и диффузии выведены при помощи математического моделирования физических процессов. Исследована задача о собственных функциях и собственных значениях оператора Лапласа. В издании рассмотрены аналитические методы решения краевых задач, такие как метод характеристик, метод Даламбера, метод Фурье и метод разделения переменных. Рассмотрен численный метод – метод сеток. Изложение теоретического материала сопровождается физической интерпретацией решений, практическим применением и примерами решения задач.

Рассмотрено на заседании кафедры математики 24.02.2011, одобрено методической комиссией института общепрофессиональной подготовки 25.02.2011.

Рецензенты: кафедра математики (зав. каф. А.А.Потапенко, д-р физ.-мат.наук, проф.), кафедра информатики СЗТУ (зав. каф. Г.Г.Ткаченко, канд. физ.-мат. наук, доц.)

Составитель Ерунова И.Б., канд. физ.-мат. наук, доц.

1. Информация о дисциплине

1.1. Предисловие

Специальный курс «Методы математической физики» изучается студентами специальности 210106.65 – промышленная электроника всех форм обучения в одном семестре. Учебно-методический комплекс может быть использован студентами других специальностей, желающих расширить свои знания по математике.

Дисциплина включает в себя разделы:

1. Основные понятия и определения. Уравнения переноса.
2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка.
3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду.
4. Математическое моделирование колебаний струны. Волновое уравнение.
5. Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции.
6. Параболические уравнения.
7. Эллиптические уравнения.
8. Электрические колебания в длинных линиях.
9. Численные методы. Метод сеток.

ЦЕЛЬ изучения дисциплины – обучение студентов методологии построения математических моделей процессов и явлений инженерной практики, освоение методов исследования возникающих при этом математических задач, выявление практического смысла получаемых решений.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ – получение теоретических навыков по построению и исследованию краевых задач математической физики.

В результате изучения дисциплины студент должен ЗНАТЬ И УМЕТЬ ИСПОЛЬЗОВАТЬ: основные понятия, принципы постановки краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, основные методы решения краевых задач, физическую интерпретацию полученных решений и практические выводы из математических результатов.

Дисциплина «Методы математической физики» базируется на знании и понимании дисциплин «Математика», «Физика», «Теоретическая механика» и в свою очередь оказывает помощь при изучении и выполнении курсовых работ по общепрофессиональным и специальных дисциплинам, а также дипломных работ (проектов).

Основной формой изучения материала является самостоятельная работа с рекомендованной литературой. По узловым вопросам программы читаются лекции. Умения использовать теоретические знания студенты приобретают на практических занятиях и в процессе выполнения контрольной работы. После выполнения контрольной работы студенты сдают экзамен.

1.2. Содержание дисциплины и виды учебной работы

1.2.1. Содержание дисциплины по ГОС

Моделирование физических процессов; основные уравнения математической физики; уравнение Пуассона, теплопроводности, волновое уравнение, собственные числа и собственные функции оператора Лапласа; специальные функции; аналитические и численные методы решения краевых и нестационарных задач.

1.2.2. Объем дисциплины и виды учебной работы

Виды учебной работы	Всего часов		
	Форма обучения		
	Очная	Очно-заочная	Заочная
Общая трудоемкость дисциплины (ОТД)	180		
Работа под руководством преподавателя (включая ДОТ)	108	108	108
В том числе аудиторные занятия: лекции	62	24	12
Практические занятия (ПЗ)	46	22	10
Самостоятельная работа студента (СР)	72	72	72
Промежуточный контроль, количество	9	10	10
Контрольная работа		1	1
Вид итогового контроля – экзамен			

1.2.3. Перечень видов практических занятий и контроля:

— контрольная работа (для очно-заочной и заочной форм обучения);
— практические занятия;
— 9 тестов (текущего контроля по каждому из разделов курса);
— экзамен.

2. Рабочие учебные материалы

2.1. Рабочая программа
(180 часов)

Введение (2часа)
[2] с. 3, [6] с. 9,10, [8] с. 8

Предмет, цель и основные задачи специального курса «Методы математической физики». Роль методов математической физики в научных и прикладных исследованиях и промышленном производстве. Основные краевые задачи, моделирующие физические процессы.

Взаимосвязь математической физики с другими дисциплинами. Структура курса, его роль и место в подготовке студентов. Организация изучения предмета.

Раздел 1. Основные понятия и определения. Уравнения переноса (14 часов)
[1] с. 9…15, [2] с. 12…14, [6] с. 435…439, [7] с. 10, 501-508

1.1. Основные понятия и определения
Определения дифференциального уравнения с частными производными (д.у.ч.п.), порядка, решения д.у.ч.п. Начальные и граничные условия.

1.2. Вывод уравнения переноса
Моделирование физических процессов. Вывод уравнения, моделирующего процесс переноса вещества.

1.3. Уравнения Максвелла
Уравнения Максвелла для плоских электромагнитных волн и их преобразования к линейным дифференциальным уравнениям первого порядка – уравнениям переноса.

Раздел 2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка (12 часов)
[1] с. 15…27, [7] с. 40…44

2.1. Решение линейных уравнений с частными производными первого порядка
Общий вид д.у.ч.п. первого порядка, квазилинейное дифференциальное уравнение. Линейное д.у.ч.п. и его общее решение.

2.2. Задача Коши
Задача Коши. Решение задачи Коши для уравнения переноса.

Раздел 3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду (16 часов)

[1] с. 28…33, [2] с. 15…17, [6] с. 11…22, [7] с. 29…40

3.1. Приведение линейных уравнений с частными производными к каноническому виду

Уравнения с частными производными второго порядка, их приведение к каноническому виду.

3.2. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка

Основные уравнения математической физики. Уравнения гиперболического, эллиптического, параболического типа.

Раздел 4. Математическое моделирование колебаний струны. Волновое уравнение (24 часа)

[1] с. 34…50, [2] с. 3…8, 65…74, [6] с. 23…81, [7] с. 54…64

4.1. Физическая и математическая постановка задачи

Моделирование физических процессов. Физическая модель – струна. Виды начальных условий и граничные условия. Вывод волнового уравнения. Первая и вторая краевые задачи.

4.2. Метод Даламбера

Задача Коши, моделирующая колебания «бесконечной струны». Аналитический метод решения краевых и нестационарных задач. Метод Даламбера, формула Даламбера.

4.3. Физическая интерпретация решения Даламбера

Прямая и обратная волны. Форма струны, по которой перемещается волна начального возмущения.

4.4. Полубесконечная струна. Влияние границы

Краевая задача, моделирующая колебания полубесконечной струны. Решение задачи Коши для полубесконечной струны как решение для бесконечной струны при положительных x. Физическая интерпретация влияния границы.

Раздел 5. Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции (22 часа)

[1] с. 50…61, [2] с. 33…41, 50…53, [6] с. 82…118, 145…150, 615…617, [7] с. 119…135, 568…581

5.1. Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны конечных размеров. Специальные функции

Аналитический метод решения краевых и нестационарных задач. Метод разделения переменных или метод Фурье для решения краевой задачи, моделирующей колебания струны конечных размеров. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные функции и собственные значения. Специальные функции.

5.2. Физическая интерпретация решения Фурье

Стоячие волны. Собственные частоты. Основной тон и обертона струны.

5.3. Сравнение методов Даламбера и Фурье

Равносильность методов Даламбера и Фурье решения краевой задачи колебаний струны конечных размеров.

Раздел 6. Параболические уравнения (26 часов)

[1] с. 62…83, [2] с. 8…12, 17…19, 35…41, [6] с. 177…242, [7] с. 450…470

6.1. Уравнения диффузии

Вывод уравнения диффузии, моделирующего эволюцию концентрации примеси. Оператор Лапласа. Трехмерное уравнение диффузии.

6.2. Уравнения теплопроводности

Распространение тепла в стержне конечных размеров. Вывод одномерного уравнения теплопроводности. Двухмерное и трехмерное уравнения теплопроводности.

6.3. Классификация краевых задач

Краевые задачи первого и второго рода. Смешанная краевая задача.

6.4. Распространение тепла на бесконечной прямой

Задача Коши, моделирующая распространение тепла в бесконечном стержне. Интеграл Пуассона, фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Распределение температуры в двух полубесконечных стержнях, соединенных торцами.

6.5. Одномерная задача о распространении тепла в стенке (или тонком стержне)

Метод Фурье и метод разделения переменных решения краевой задачи, моделирующей процесс распространения тепла в стенке. Физическая интерпретация и практическое применение решения.

6.6. Первая краевая задача. Неоднородные граничные условия

Первая краевая задача, моделирующая процесс распространения тепла в пластине. Преобразование неоднородных граничных условий в однородные. Метод разделения переменных. Физическая и техническая интерпретация решения.

Раздел 7. Эллиптические уравнения (20 часов)

[1] с. 84…89, [2] с. 20…33, 63…65, [6] с. 273…365, [7] с. 248…290, 341…345

7.1. Уравнения Лапласа и Пуассона. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа

Вывод уравнения Лапласа. Решение уравнения Лапласа, ньютоновский потенциал. Уравнения Пуассона. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа. Задача Дирихле, задача Неймана.

7.2. Электростатическая задача для полуполосы

Вывод и решение краевой задачи, моделирующей распределение электрического потенциала в полубесконечной пластине.

Раздел 8. Электрические колебания в длинных линиях (20 часов)

[1] с. 90…105, [6] с. 30, [7] с. 88…97

8.1. Общие положения

Основные требования к передающей сигнал электрической цепи. Физическая модель длинных линий.

8.2. Вывод телеграфного уравнения

Вывод телеграфного уравнения, моделирующего электрическую цепь с распределенными параметрами. Начальные и граничные условия.

8.3. Частные случаи телеграфного уравнения. Установившиеся процессы

Решение телеграфного уравнения, когда процесс не зависит от времени.

8.4. Линия без потерь

Телеграфное уравнение в случае, когда сопротивление провода мало и он хорошо изолирован. Физическая интерпретация решения волнового уравнения, описывающего колебания тока и напряжения в цепи. Техническое применение.

8.5. Линия без искажений

Физическая интерпретация линии без искажений. Решение преобразованного телеграфного уравнения. Ослабление сигнала.

8.6. Линия конечной длины

Решение краевой задачи для определения колебаний напряжения в линии конечной длины.

Раздел 9. Численные методы. Метод сеток (22 часа)

[1] с. 105…112, [6] с. 546-621, [8] с. 67…106, 228…243

9.1. Сетки и сеточные функции

Численные методы решения краевых и нестационарных задач. Сетка, внутренние и граничные узлы сетки. Сеточная функция.

9.2. Аппроксимация производных

Разностное отношение. Правая, левая и центральная разностные производные. Погрешность аппроксимации производных. Разностная аппроксимация вторых производных.

9.3. Задача Дирихле в прямоугольнике

Аппроксимация задачи Дирихле разностными отношениями. Метод простой итерации. Метод Зейделя.

Заключение (2 часа)

Краткое обобщение основных вопросов курса. Состояние и перспективы развития математической физики. Направления дальнейшей работы над расширением знаний о методах математической физики. Практическое использование полученных знаний в учебной и производственной деятельности.

2.2. Тематический план дисциплины для студентов очно-заочной формы обучения

№ п/п	Название раздела, темы	Кол-во часов по очной форме обучения	Виды занятий и контроля							
			Лекции		ПЗ		Самостоятельная работа	№ теста	№ ПЗ	№ к/р
			Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ				
ВСЕГО		180	24	48	22	14	72			
	Введение	2		1			1			
1	**Раздел 1. Основные понятия и определения. Уравнения переноса**	14	3	3	2	2	4	№1	№1	
1.1	Основные понятия и определения	6	1	1	2	2			№1	
1.2	Вывод уравнения переноса	3	1	1			1			
1.3	Уравнения Максвелла	5	1	1			3			
2	**Раздел 2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка**	12	1	2	2	2	5	№2	№2	№1
2.1	Решение линейных уравнений с частными производными первого порядка	5		1	1		3		№2	
2.2	Задача Коши	7	1	1	1	2	2		№2	
3	**Раздел 3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду**	16	2	4	4	2	4	№3	№3	№1
3.1	Приведение линейных уравнений с частными производными к каноническому виду	7	1	2	2		2		№3	
3.2	Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка	9	1	2	2	2	2		№3	
4	**Раздел 4. Математическое моделирование колебаний струны. Волновое уравнение**	24	4	10	4	2	4	№4	№4	№1
4.1	Физическая и математическая постановки задачи	4	1	2			1			
4.2	Метод Даламбера	9	1	3	2	2	1		№4	
4.3	Физическая интерпретация решения Даламбера	7	1	3	2		1		№4	
4.4	Полубесконечная струна. Влияние границы	4	1	2			1			

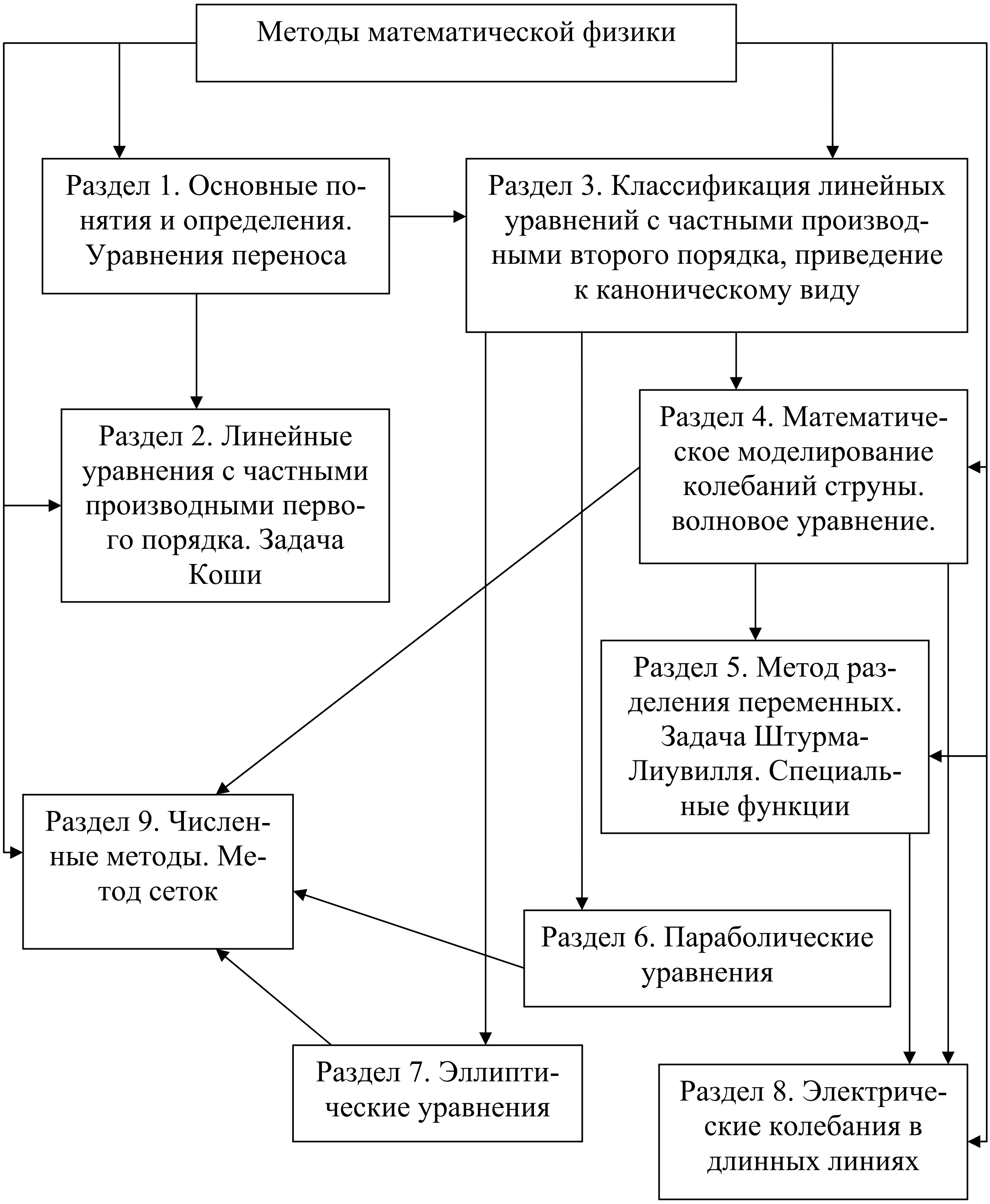
5	**Раздел 5. Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции**	22	2	6	4	2	8	№5	№5	
5.1	Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны конечных размеров. Специальные функции	11	1	3	3	2	2		№5	
5.2	Физическая интерпретация решения Фурье	8	1	2	1		4		№5	
5.3	Сравнение методов Даламбера и Фурье	3		1			2			
6	**Раздел 6. Параболические уравнения**	26	4	6	4	2	10	№6	№6	№1
6.1	Уравнение диффузии	4	1	1			2			
6.2	Уравнение теплопроводности	4	1	1			2			
6.3	Классификация краевых задач	3		1			2			
6.4	Распространение тепла на бесконечной прямой	5	1	1			3			
6.5	Одномерная задача о распространении тепла в стенке (или тонком стержне)	8	1	1	4	2			№6	
6.6	Первая краевая задача. Неоднородные граничные условия	2		1			1			
7	**Раздел 7. Эллиптические уравнения**	20	2	4	2	2	10	№7	№7	
7.1	Уравнения Лапласа и Пуассона. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа	14	1	2	2	2	7		№7	
7.2	Электростатическая задача для полуполосы	6	1	2			3			
8	**Раздел 8. Электрические колебания в длинных линиях**	20	2	4			14	№8		
8.1	Общие положения	2					2			
8.2	Вывод телеграфного уравнения	7	1	2			4			
8.3	Частные случаи телеграфного уравнения. Установившиеся процессы	2					2			
8.4	Линия без потерь	2					2			
8.5	Линия без искажений	2					2			
8.6	Линия конечной длины	5	1	2			2			
9	**Раздел 9. Численные методы. Метод сеток**	22	3	7			12	№9		
9.1	Сетки и сеточные функции	3		2			1			
9.2	Аппроксимация производных	6	1	2			3			
9.3	Задача Дирихле в прямоугольнике	13	2	3			8			
	Заключение	2	1	1						

2.3. Тематический план дисциплины для студентов заочной формы обучения

№ п/п	Название раздела, темы	Кол-во часов по очной форме обучения	Виды занятий и контроля							
			Лекции		ПЗ		Самостоятельная работа	№ теста	№ ПЗ	№ к/р
			Ауд.	ДОТ	Ауд.	ДОТ				
ВСЕГО		180	12	64	10	22	72			
	Введение	2		1			1			
1	**Раздел 1. Основные понятия и определения. Уравнения переноса**	14	1	5	1	2	5	№1	№1	
1.1	Основные понятия и определения	6		2	1	2	1		№1	
1.2	Вывод уравнения переноса	3	1	1			1			
1.3	Уравнения Максвелла	5		2			3			
2	**Раздел 2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка**	12	2	3	1	2	4	№2	№2	№1
2.1	Решение линейных уравнений с частными производными первого порядка	5	1	2		1	1		№2	
2.2	Задача Коши	7	1	1	1	1	3		№2	
3	**Раздел 3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду**	16	1	3	1	2	9	№3	№3	№1
3.1	Приведение линейных уравнений с частными производными к каноническому виду	7		2		1	4		№3	
3.2	Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка	9	1	1	1	1	5		№3	
4	**Раздел 4. Математическое моделирование колебаний струны. Волновое уравнение**	24	2	8	1	4	9	№4	№4	№1
4.1	Физическая и математическая постановки задачи	4	1	2			1			
4.2	Метод Даламбера	9		2	1	2	4		№4	
4.3.	Физическая интерпретация решения Даламбера	7	1	2		2	2			
4.4	Полубесконечная струна. Влияние границы	4		2			2			

5	**Раздел 5. Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции**	22	1	8	2	4	7	№5	№5	
5.1	Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны конечных размеров. Специальные функции	11	1	4	1	2	3		№5	
5.2	Физическая интерпретация решения Фурье	8		2	1	2	3		№5	
5.3	Сравнение методов Даламбера и Фурье	3		2			1			
6	**Раздел 6. Параболические уравнения**	26	2	8	2	4	10	№6	№6	№1
6.1	Уравнение диффузии	4		1			3			
6.2	Уравнение теплопроводности	4	1	2			1			
6.3	Классификация краевых задач	3		1			2			
6.4	Распространение тепла на бесконечной прямой	5		2			3			
6.5	Одномерная задача о распространении тепла в стенке (или тонком стержне)	8	1	1	2	4			№6	
6.6	Первая краевая задача. Неоднородные граничные условия	2		1			1			
7	**Раздел 7. Эллиптические уравнения**	20	1	8	2	4	5	№7	№7	№1
7.1	Уравнения Лапласа и Пуассона. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа	14	1	4	2	4	3		№7	
7.2	Электростатическая задача для полуполосы	6		4			2			
8	**Раздел 8. Электрические колебания в длинных линиях**	20	1	8			11	№8		
8.1	Общие положения	2		1			1			
8.2	Вывод телеграфного уравнения	7	1	2			4			
8.3	Частные случаи телеграфного уравнения. Установившиеся процессы	2		1			1			
8.4	Линия без потерь	2		1			1			
8.5	Линия без искажений	2		1			1			
8.6	Линия конечной длины	5		2			3			
9	**Раздел 9. Численные методы. Метод сеток**	22	1	10			11	№9		
9.1	Сетки и сеточные функции	2		2						
9.2	Аппроксимация производных	6	1	2			3			
9.3	Задача Дирихле в прямоугольнике	14		6			8			
	Заключение	2		2						

2.4. Структурно-логическая схема дисциплины



2.5. Временной график изучения дисциплины при использовании информационно-коммуникационных технологий

№	Название раздела	Продолжительность изучения раздела (в днях, из расчета – 4 ч в день)
1	Введение. Раздел1. Основные понятия и определения. Уравнения переноса	4
2	Раздел 2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка	3
3	Раздел 3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду	4
4	Раздел 4. Математическое моделирование колебаний струны. Волновое уравнение.	6
5	Раздел 5. Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции	5,5
6	Раздел 6. Параболические уравнения	6,5
7	Раздел 7. Эллиптические уравнения	5
8	Раздел 8. Электрические колебания в длинных линиях	5
9	Раздел 9. Численные методы. Метод сеток	5,5
10	Заключение	0,5
11	В том числе: контрольная работа	2
	Итого	**47**

2.6. Практический блок для очно-заочной формы обучения

Номер и название раздела	Номер и наименование тем практических занятий	Кол-во часов по очно-заочной форме обучения	
		Ауд.	ДОТ
Раздел 1. Основные понятия и определения. Уравнения переноса	**1.** Основные понятия и определения. Общее решение уравнений с частными производными	2	2
Раздел 2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка	**2.** Решение задачи Коши для линейных уравнений первого порядка	2	2
Раздел 3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду	**3.** Приведение линейных уравнений с частными производными второго порядка к каноническому виду и их классификация	4	2
Раздел 4. Математическое моделирование колебаний струны. Волновое уравнение	**4.** Волновое уравнение. Задача Коши. Метод Даламбера. Физическая интерпретация решения Даламбера	4	2
Раздел 5. Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции	**5.** Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны конечных размеров. Физическая интерпретация решения в форме Фурье	4	2
Раздел 6. Параболические уравнения	**6.** Одномерная задача о распространении тепла в ограниченном стержне	4	2
Раздел 7. Эллиптические уравнения	**7.** Уравнения Лапласа и Пуассона. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа	2	2

2.7. Практический блок для заочной формы обучения

Номер и название раздела	Номер и наименование тем практических занятий	Кол-во часов по очно-заочной форме обучения	
		Ауд.	ДОТ
Раздел 1. Основные понятия и определения. Уравнения переноса	**1.** Основные понятия и определения. Общее решение уравнений с частными производными	1	2
Раздел 2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка	**2.** Решение задачи Коши для линейных уравнений первого порядка	1	2
Раздел 3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду	**3.** Приведение линейных уравнений с частными производными второго порядка к каноническому виду и их классификация	1	2
Раздел 4. Математическое моделирование колебаний струны. Волновое уравнение	**4.** Волновое уравнение. Задача Коши. Метод Даламбера. Физическая интерпретация решения Даламбера	1	4
Раздел 5. Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции	**5.** Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны конечных размеров. Физическая интерпретация решения в форме Фурье	2	4
Раздел 6. Параболические уравнения	**6.** Одномерная задача о распространении тепла в ограниченном стержне	2	4
Раздел 7. Эллиптические уравнения	**7.** Уравнения Лапласа и Пуассона. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа	2	4

2.8. Балльно-рейтинговая система оценки знаний

Дисциплина содержит 9 разделов, по первым 7 разделам проводятся практические занятия. После изучения каждого раздела студенту следует ответить на вопросы тренировочного теста и выполнить задания практических занятий. Номера соответствующих тестов и практических занятий указаны в тематическом плане. После изучения материала необходимо выполнить контрольную работу. Усвоение теоретического материала проверяется с помощью контрольных тестов, которые находятся либо у преподавателя, либо на учебном сайте СЗТУ.

За каждый вид самостоятельной работы начисляется определенное количество баллов:

— за правильный ответ на вопрос контрольного теста – 1 балл (максимальное количество 54 балла)

— за каждое правильно выполненное задание практического занятия – 2 балла (максимальное количество 2x7=14 баллов)

— за каждую правильно решенную задачу из контрольной работы – 4 балла (максимальное количество 4x5=20 баллов)

— за инициативность (активное участие в занятиях, консультациях, проводимых в аудитории и на форуме сайта СЗТУ, выполнение дополнительных заданий, выдаваемых преподавателем) – максимальное количество 12 баллов.

Ответы на вопросы тренировочных тестов текущего контроля не оцениваются. Однако отвечать на них следует, так как эти тесты являются репетицией сдачи контрольного теста.

При успешной работе с материалами дисциплины студент может получить 100 баллов. Для допуска к экзамену необходимо получить не менее 60 баллов, причем 20 баллов из указанной суммы должны быть набраны в результате решения контрольной работы студентами очно-заочной и заочной форм обучения.

Экзаменационная оценка (по усмотрению преподавателя) может быть выставлена по следующим критериям:

Количество набранных баллов	Экзаменационная оценка
71 – 80	Удовлетворительно
81 – 90	Хорошо
91 – 100	Отлично

3. Информационные ресурсы дисциплины

3.1. Библиографический список

Основной:

1. Мясников, А. В. Методы математической физики: учебн. Пособие / А. А. Мясников. – СПб: Изд-во СЗТУ, 2011.
2. Ерунова, И. Б. Уравнения математической физики: учебн. Пособие / И. Б. Ерунова. – СПб: Изд-во СЗТУ, 2007.

Дополнительной:

3. Потапенко, А. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие / А. А. Потапенко. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008.
4. Потапенко, А. А Методы математической физики: учеб. Пособие / А. А. Потапенко, М. Б. Шефтель. – Л.: СЗПИ, 1979.
5. Гаврилов, В. Л. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: учеб. Пособие / В. Л. Гаврилов. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008.
6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 2004.
7. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков. - М.: Высш. шк., 1970.
8. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977.

3.2. Опорный конспект

Введение

Специальный курс «Методы математической физики» посвящен изучению математических моделей естественнонаучных явлений и процессов. Сюда относятся явления, изучаемые в гидродинамике, теории упругости, акустике, электродинамике и т.д. Математические модели представляют собой краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Особую роль в физических задачах играют дифференциальные уравнения с частными производными первого и второго порядка.

Целью курса служит ознакомление с методологией построения математических моделей процессов и явлений инженерной практики, изучение аналитических и численных методов решения краевых задач, выявление практического смысла получаемых решений.

В предлагаемом опорном конспекте лекций в краткой и сжатой форме изложен теоретический материал, проиллюстрированный разобранными примерами и физическими интерпретациями полученных решений. В каждом разделе конспекта указаны задания, которые необходимо решить для осуществления текущего и итогового контроля.

По данной дисциплине студенты очно-заочной и заочной форм обучения выполняют контрольную работу. Контрольная работа должна быть представлена преподавателю и зачтена. Наличие зачтенной контрольной работы является необходимым условием допуска студента к сдаче экзамена по дисциплине.

Раздел 1. Основные понятия и определения. Уравнения переноса

При изучении данного раздела Вам необходимо:

- Рассмотреть и освоить следующие темы:

1.1. Основные понятия и определения
1.2. Вывод уравнения переноса
1.3. Уравнения Максвелла

- Ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №1.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №1 текущего контроля.

1.1. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением с частными производными **(д.у.ч.п)** называется уравнение, содержащее искомую функцию от нескольких аргументов, ее частные производные, а также сами аргументы.
Порядком д.у.ч.п. называется *порядок старшей производной*, в него входящей.

Например,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x + y \cdot u(x,y)$$

является дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка, а

$$\frac{\partial^3 u(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} - u(x,y,z) = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}$$

является д.у.ч.п. третьего порядка.

Решением д.у.ч.п. называется всякая функция, обращающая уравнение в *тождество относительно независимых переменных*.

Решение д.у.ч.п., разрешенное относительно искомой функции и содержащее произвольную функцию, называют ***общим решением***. В случае неявного задания искомой функции это решение называется ***общим интегралом***.

Например, пусть $u = u(x,y)$. Интегрируя по x дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + x,$$

получаем

$$u(x,y) = xy + \frac{x^2}{2} + f(y),$$

где $f(y)$ – произвольная функция; $u(x,y)$ – решение уравнения при любой $f(y)$, следовательно, это общее решение.

Начальными условиями называются условия, которые определяют *поведение искомой функции в некоторый заданный момент времени* во всех точках области изменения пространственных независимых переменных.

Граничными условиями называются условия, которые задают поведение искомой функции *во всех точках границы области для любого момента времени*.

1.2. Вывод уравнения переноса

По трубе постоянного поперечного сечения движется с заданной скоростью $v(x,t)$ поток воздуха, рис. 1.

Переносимое воздухом вещество, (например, водяной пар), имеет концентрацию $u(x,t)$ и непрерывно осаждается на стенках трубы. Функция $f(x,t)$ – *плотность распределения осаждающегося вещества,* такова, что произведение $f(x,t)u(x,t)Sdxdt$ представляет собой количество вещества, осевшее за время dt на участке трубы длиной dx (S – площадь нормального сечения трубы).

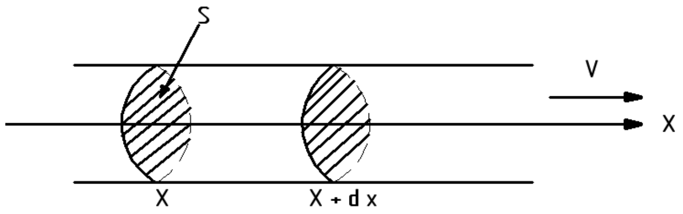


Рис. 1

Количество вещества, содержащееся в рассматриваемом объеме трубы, заключенном между двумя поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии dx, равно $u(x,t)Sdx$. По истечению времени dt количество вещества станет $u(x,t+dt)Sdx$.

В течение времени dt через левое сечение трубы внутрь выделенного объема с потоком воздуха вошло количество вещества $dQ = u(x,t)v(x,t)Sdt$, через правое сечение ушло количество вещества $u(x+dx,t)v(x+dx,t)Sdt$.

В силу закона сохранения массы

$$\big(u(x,t+dt)-u(x,t)\big)Sdx =$$

$$= -\big(u(x+dx,t)v(x+dx,t)-u(x,t)v(x,t)\big)Sdt - f(x,t)u(x,t)Sdxdt.$$

Деля обе части равенства на произведение *Sdxdt,* замечая, что разности в скобках представляют собой в первом приближении соответствующие частные дифференциалы (первая скобка – частный дифференциал по t, вторая – по x) и вспоминая определение частной производной, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + fu = 0$$

Уравнение данного вида называется ***уравнением переноса***. Вводя обозначение $c(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x} + f(x,t)$, перепишем уравнение переноса в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = 0,$$

где $v(x,t)$ и $c(x,t)$ – заданные функции.

Уравнение переноса является *линейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка*. Это уравнение играет важную роль в математической физике, описывая конвективный перенос произвольной субстанции, распределение которой в пространстве характеризуется функцией u. В частности, если u интерпретировать как температуру, то этим уравнением описывается конвективный поток тепла в общем уравнении теплопроводности.

1.3. Уравнения Максвелла

Примером дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка служат лежащие в основании радиоэлектроники уравнения теории электромагнитного поля – *уравнения Максвелла*. Рассмотрим ***уравнения Максвелла*** для *плоских электромагнитных волн:*

$$\frac{\mu}{\tilde{n}_0}\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\mu}{\tilde{n}_0}\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \qquad (1.2)$$

$$\frac{\varepsilon}{\tilde{n}_0}\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad (1.3)$$

$$\frac{\varepsilon}{\tilde{n}_0}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \qquad (1.4)$$

$H_y = H_y(x,t)$, $H_z = H_z(x,t)$ – компоненты вектора напряженности магнитного поля; $E_y = E_y(x,t)$, $E_z = E_z(x,t)$ – компоненты напряженности электрического поля; ε, μ – диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость, соответственно; c_0 – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$). Компоненты E_x, H_x в уравнениях, описывающих распространение плоских волн вдоль оси x, отсутствуют. В этом случае говорят, что электромагнитное *поле поперечное* – векторы $\vec{H}$ и $\vec{E}$ расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

Умножим (1.1) на $\frac{c_0}{\sqrt{\mu}}$, а (1.4) на $\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon}}$, соответственно, и перенесем все члены налево. Получим:

$$\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y)}{\partial t}-\frac{\tilde{n}_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_z)}{\partial t}-\frac{\tilde{n}_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\mu}H_y)}{\partial x}=0.$$

Сложим и вычтем эти уравнения. Соответственно, получим:

$$\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_z+\sqrt{\mu}H_y)}{\partial t}-\frac{\tilde{n}_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_z+\sqrt{\mu}H_y)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_z-\sqrt{\mu}H_y)}{\partial t}+\frac{\tilde{n}_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_z-\sqrt{\mu}H_y)}{\partial x}=0.$$

Проделывая аналогичную процедуру с уравнениями (1.2) и (1.3), придем еще к двум линейным дифференциальных уравнениям первого порядка:

$$\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_y-\sqrt{\mu}H_z)}{\partial t}-\frac{\tilde{n}_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_y-\sqrt{\mu}H_z)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_y+\sqrt{\mu}H_z)}{\partial t}+\frac{\tilde{n}_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}E_y+\sqrt{\mu}H_z)}{\partial x}=0.$$

Таким образом, видим, что, умножая уравнения Максвелла (1.1) – (1.4) на подходящие множители, а затем вычитая или складывая их, можно «расщепить» систему уравнений на четыре *независимых* линейных дифференциальных уравнений первого порядка, каждое из которых имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}\pm\frac{\tilde{n}_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

а значит, является *уравнением переноса.*

Величина $\dfrac{\tilde{n}_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ – скорость распространения электромагнитных волн – называется *скоростью света* в среде с заданными магнитной проницаемостью μ и диэлектрической постоянной ε и обычно обозначается буквой c.

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение дифференциального уравнения с частными производными (д.у.ч.п.).
2. Как определить порядок д.у.ч.п.?
3. Что называется решением д.у.ч.п.?
4. В чем различие общего решения и общего интеграла д.у.ч.п.?
5. Чем отличаются начальные и граничные условия?
6. Какой порядок имеет уравнение переноса?
7. Какой физический процесс описывает уравнение переноса?
8. В основании какой теории лежат уравнения Максвелла?
9. Что представляет собой скорость света?
10. К уравнению какого вида преобразуется каждое из системы уравнений Максвелла?

Раздел 2. Линейные уравнения с частными производными первого порядка

Для изучения данного раздела вам необходимо:

- Рассмотреть и освоить следующие темы:

2.1. Решение линейных уравнений с частными производными первого порядка

2.2. Задача Коши

- Ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №2.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №2 текущего контроля.
- Выполнить задачу из контрольной работы.

2.1. Решение линейных уравнений с частными производными первого порядка

Общий вид д.у.ч.п. *первого порядка* относительно неизвестной искомой функции $u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ таков:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Если F является *линейной функцией относительно старших производных*, то есть:

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... +$$

$$+X_n(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} + P(x_1, ..., x_n, u) = q(x_1, ..., x_n), -$$

то уравнение называется ***квазилинейным д.у.***

Если функции $X_1, ..., X_n$ *не зависят* от u, а *зависимость* P от u *линейна,* то есть $P\left(x_1, ..., x_n, u\right) = Q\left(x_1, ..., x_n\right)$, *тогда* уравнение называется ***линейным***. Если правая часть $q(x_1, ..., x_n) \equiv 0$, то уравнение называется ***однородным линейным дифференциальным***.

Рассмотрим квазилинейное д.у.ч.п. первого порядка:

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u).$$

Для получения общего решения линейного д.у.ч.п. рассматривают характеристическую систему обыкновенных д.у.:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}.$$

Если функция $c = 0$, то система сводится к одному уравнению $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$.

Пусть $f(x,y)=C$ общий интеграл уравнения, тогда $u=w\big(f(x,y)\big)$ – *общее решение*.

Пример. Найти *общее решение* дифференциального уравнения с частными производными:

$$u_x - u_y = 0.$$

В этом случае характеристическая система имеет вид $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}$. Решаем $\frac{dx}{1}=-\frac{dy}{1} \Leftrightarrow dx+dy=0 \Leftrightarrow d(x+y)=0$. Таким образом, общий интеграл $x+y=C_1$.

2.2. Задача Коши

Само дифференциальное уравнение с частными производными содержит в себе только самую общую информацию об описываемом этим уравнением физическом процессе. Для изучения конкретного процесса нужны дополнительные условия, которым искомая функция удовлетворяет в начальный момент времени. Таких условий должно быть столько, сколько произвольных функций входит в общее решение уравнения, то есть число дополнительных условий должно равняться порядку уравнения.

Задачей Коши или *задачей с начальными условиями* называется задача отыскания решения дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, удовлетворяющего начальному условию.

Решение задачи Коши состоит в получении *общего решения* уравнения и в использовании начального условия для определения входящей в него произвольной функции.

Пример. Найти функцию $u=u(x,t)$ такую, чтобы она удовлетворяла равенствам:

$$u_t = 4u_x; \quad u(x,0)=f(x).$$

Первое равенство – уравнение с частными производными, второе – условие Коши. Это уравнение переноса. Тогда решая уравнение, получаем $\frac{dt}{1}=\frac{dx}{-4} \Leftrightarrow d(x+4t)=0 \Leftrightarrow x+4t=C,$ C – произвольная постоянная. Следовательно, общее решение первого уравнения имеет вид $u(x,t)=F(x+4t)$. Подставляя $t=0$, имеем $u(x,0)=F(x)=f(x)$. Из последнего равенства видно, что $F=f$. Таким образом, решением поставленной задачи Коши служит функция $u(x,t)=f(x+4t)$. Например, если $f=\sin$, то $u(x,t)=\sin(x+4t)$.

Вопросы для самопроверки

1. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется квазилинейным?
2. Какое линейное дифференциальное уравнение называется однородным?
3. Что представляет собой характеристическая система обыкновенных д.у.?
4. Что называется общим интегралом характеристической системы о.д.у., и как записывается общее решение?
5. В чем состоит задача Коши?
6. Чем решение задачи Коши отличается от общего решения дифференциального уравнения с частными производными?
7. Как определить количество дополнительных или начальных условий в задаче Коши?

Раздел 3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду

Большую роль играют в математической физике уравнения второго порядка. Это связано с тем, что фундаментальные законы физики – *законы сохранения* – записываются в терминах вторых производных.

При изучении данного раздела вам необходимо:
- Рассмотреть и освоить следующие темы:

3.1. Приведение линейных уравнений с частными производными второго порядка к каноническому виду

3.2. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка

- Ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №3.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №3 текущего контроля.
- Выполнить задачу из контрольной работы.

3.1. Приведение линейных уравнений с частными производными второго порядка к каноническому виду

Уравнением с частными производными второго порядка относительно функции двух независимых переменных x *и* y называется соотношение между независимыми переменными x и y, неизвестной функцией $u(x,y)$ и ее частными производными до второго порядка включительно:

$$F\big(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y), u_{xx}(x,y), u_{xy}(x,y), u_{yy}(x,y)\big) = 0.$$

Здесь F – *заданная функция* своих переменных.

Это уравнение называется ***линейным***, если оно имеет вид

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=F\left(x,y,u,u_x,u_y\right),$$

где A,B,C – функции *только* от независимых переменных, а F – *линейная функция* относительно аргументов u,u_x,u_y. Если F не линейна относительно этих аргументов, то уравнение называется ***квазилинейным***.

Вместо независимых переменных x и y введем новые независимые переменные s и t по формулам

$$s=s(x,y),\ \ t=t(x,y),$$

где s и t – пока произвольные независимые функции. Для независимости этих функций достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta=\begin{vmatrix}s_x & s_y\\ t_x & t_y\end{vmatrix}=s_xt_y-s_yt_x\neq 0,$$

тогда функции s и t имеют однозначные обратные функции

$$x=x(s,t),\quad y=y(s,t).$$

Подставляя обратные функции в исходное линейное уравнение и пересчитывая производные получим новое уравнение относительно новой функции $u=u(s,t)$ (мы сохранили за ней старое обозначение u). Это новое уравнение *сохранит свойство линейности*, то есть будет иметь вид:

$$au_{ss}(s,t)+2bu_{st}(s,t)+cu_{tt}(s,t)=f\left(s,t,u,u_s,u_t\right),$$

где a,b,c – *известные* функции новых переменных s и t, а f – *известная* функция аргументов s,t,u,u_s,u_t, линейная относительно u,u_s,u_t.

Встает вопрос, как выбрать новые переменные, чтобы уравнение имело наиболее простой вид. Можно доказать, что для этого в качестве функций s и t следует взять интегралы (под интегралом обыкновенного дифференциального уравнения мы понимаем функцию, стоящую в левой части равенства, которое служит его общим интегралом) двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют вид:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A};\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

Эти уравнения называются *характеристическими* и получаются, если обе части уравнения

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0$$

разделить на dx^2 и решить квадратное уравнение относительно первой производной.

Чтобы привести заданное уравнение к каноническому виду надо:
1) по заданному уравнению с частными производными составить два характеристических уравнения; 2) найти общие интегралы этих уравнений $s(x,y)=C_1$ и $t(x,y)=C_2$; 3) принять значения функций, стоящих в левых частях общих интегралов за новые независимые переменные $s=s(x,y)$, $t=t(x,y)$; 4) используя

правило дифференцирования сложной функции, пересчитать производные. После подстановки этих производных в исходное уравнение и приведения подобных получается искомая каноническая форма заданного уравнения.

3.2 Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка

Определим тип заданного уравнения

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F\left(x, y, u, u_x, u_y\right).$$

Используя коэффициенты уравнения A, B, C, вычислим дискриминант $D = B^2 - AC$.

1) Уравнение называется **гиперболическим**, если $D > 0$.
Обозначим интегралы характеристических уравнений через $s(x, y)$ и $t(x, y)$, соответственно. Принимая за новые независимые переменные $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$, приведем уравнение к виду

$$u_{st} = R\left(s, t, u, u_s, u_t\right), \tag{3.1}$$

где R – линейная функция относительно u, u_s, u_t.

2) Уравнение называется **эллиптическим**, если $D < 0$. В этом случае общие интегралы характеристических уравнений комплексно-сопряженные и имеют вид $s(x, y) \pm it(x, y) = C_{1,2}$, где $s(x, y)$ и $t(x, y)$ – вещественны. Используя эти функции, получим уравнение в виде

$$u_{ss} + u_{tt} = R\left(s, t, u, u_s, u_t\right). \tag{3.2}$$

3) Уравнение называется **параболическим**, если $D = 0$. Характеристические уравнения совпадают и имеют только один интеграл, который обозначим через $s(x, y)$. Принимая за $s = s(x, y)$, а за t *произвольную функцию* $t = t(x, y)$, но так, чтобы функциональный определитель $\Delta = s_x t_y - s_y t_x$ не равнялся нулю, получим в новых переменных уравнение

$$u_{tt} = R\left(s, t, u, u_s, u_t\right) \tag{3.3}$$

Уравнения (3.1), (3.2) и (3.3) называются *канонической формой* уравнения с частными производными второго порядка *гиперболического*, *эллиптического* и *параболического* типа, соответственно.

Итак, чтобы установить тип линейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка надо по его заданным коэффициентам построить функцию $D(x, y) = B^2 - AC$. При тех значениях независимых переменных, где $D > 0$ уравнение имеет гиперболический тип; где $D < 0$ – эллиптический; где $D = 0$ – параболический тип.

В разных частях области задания коэффициентов уравнение может иметь разный тип. То есть, тип уравнения может меняться при переходе от точки к точке.

Вопросы для самопроверки

1. Какое уравнение называется уравнением с частными производными второго порядка?
2. Чем отличаются линейные уравнения и квазилинейные уравнения с частными производными второго порядка?
3. Какова цель замены независимых переменных и перехода к новому дифференциальному уравнению второго порядка?
4. Какие уравнения называются характеристическими уравнениями?
5. Какие типы линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка Вы знаете?
6. Что нужно вычислить, чтобы установить тип линейного уравнения с частными производными второго порядка?
7. Может ли одно уравнение иметь разный тип?
8. Какие уравнения называют канонической формой уравнений с частными производными?

Раздел 4. Математическое моделирование колебаний струны. Волновое уравнение

При изучении данного раздела вам необходимо:

- Рассмотреть и освоить следующие темы:

4.1. Физическая и математическая постановки задачи
4.2. Метод Даламбера
4.3. Физическая интерпретация решения Даламбера
4.4. Полубесконечная струна. Влияние границы

- Ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №4.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №4 текущего контроля.
- Выполнить задачу из контрольной работы.

4.1. Физическая и математическая постановки задачи

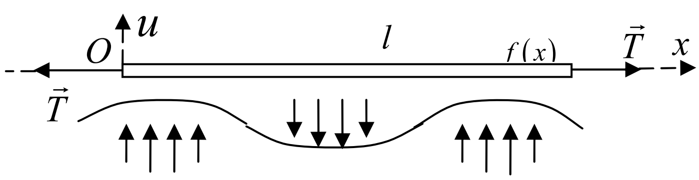


Рис. 2

Рассмотрим тело, длина которого *значительно превышает* его поперечные размеры (Рис. 2). Волнистой линией изображена внешняя силовая нагрузка.

Пусть наше тело совпадает в положении равновесия с отрезком $(0,l)$ оси Ox. Пусть тело растянуто осевыми силами, *величина* которых равна T. Пусть T велико в том смысле, что любыми другими *внутренними* силами можно пренебречь по сравнению с T.

Таким образом, *физическая модель* рассматриваемого тела: сильно растянутая нить, силы действующие в каждом сечении которой, являются силами растяжения. Такая физическая модель называется *струной*.

Будем рассматривать: а) *малые*, а значит *поперечные* и б) *плавные* колебания струны около положения равновесия. Выберем ось координат u перпендикулярно x. Тогда плоские поперечные колебания полностью характеризуются функцией $u = u(x,t)$, которая дает отклонение от начального положения в плоскости (x,u) точки с координатой x в каждый момент времени t. *Плавность* колебаний означает, что угол α (Рис. 3) между касательной к мгновенному графику кривой и осью x мал в *любой* точке кривой.

Струну можно заставить звучать тремя способами: как при игре на гитаре, оттягивая и отпуская без начальной скорости; как на фортепиано, ударяя молоточком, то есть, сообщая точкам струны начальные скорости; комбинированным способом – сообщая начальные скорости точкам струны в ее оттянутом положении. Математически указанные три способа возбуждения колебаний соответствуют заданию следующих *начальных условий*:

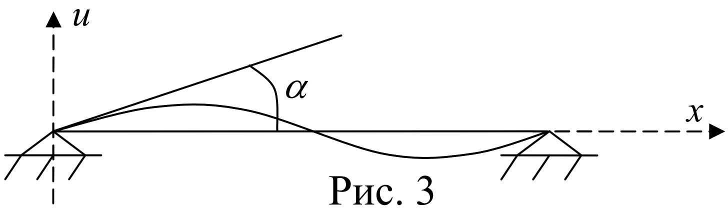


Рис. 3

$$u(x,0) = f(x), \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x). \tag{4.2}$$

В первом случае $g(x) = 0$, во втором $f(x) = 0$, в третьем – и f, и g отличны от нуля.

Наша струна закреплена на концах. Это значит, что граничные точки, которые имеют координаты $x = 0$ и $x = l$, во все время колебаний не отклоняются от своего начального положения:

$$u(0,t) = 0, \tag{4.3}$$

$$u(l,t) = 0. \tag{4.4}$$

Из плавности рассматриваемых колебаний вытекают равенства:

$$\alpha = \mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Следовательно, длина участка струны $\Delta s = x_2 - x_1$ и вектор натяжения T не зависит от аргументов x и t.

Выберем произвольный маленький элемент струны длиной $ds = dx$ (Рис. 4) и отбросим части струны справа и слева от выделенного элемента, заменив, как принято в теоретической механике, действие отброшен-

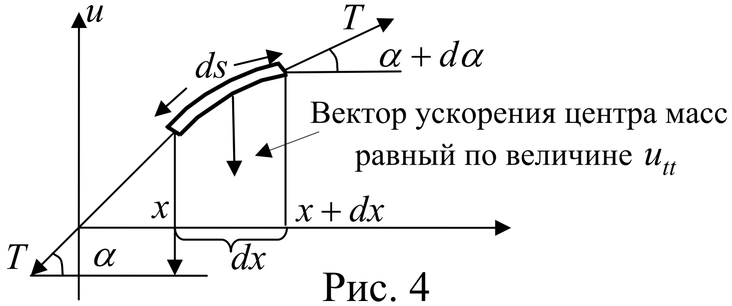


Рис. 4

ных частей силами.

Правая отброшенная часть действует на элемент dx силой, составляющей с осью x угол $\alpha + d\alpha$, а левая – с силой, составляющей с осью x угол α.

Записывая вертикальную проекцию *второго закона Ньютона* для центра масс нашего кусочка, имеем

$$\rho dx \frac{\partial^2 u(x+\theta dx,t)}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right),$$

θ – произвольное число $\in (0,1)$.

В левой части этого равенства ρ обозначает линейную (погонную) плотность материала, поэтому левая часть есть произведение массы кусочка на вертикальную составляющую ускорения его центра масс. Справа – сумма проекций сил натяжения на вертикальную ось.

Деля обе части равенства на dx, переходя к пределу при $dx \to 0$ и вспоминая определение второй производной, получаем

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \text{ где } a^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{4.5}$$

Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка вида (4.5) называется ***волновым уравнением***. Это уравнение описывает колебания струны, происходящие только под действием сил внутренних напряжений, возникающих вследствие взаимодействия молекул деформируемого материала. Такие колебания называются свободными. Система уравнений (4.1) – (4.5) называется *краевой задачей*.

Уравнения (4.1)–(4.4) называются *краевыми* условиями; уравнения (4.1) и (4.2) называются *начальными*; (4.3) и (4.4) – *граничными* условиями краевой задачи.

Для очень длинной струны влияние концов на поведение центральных точек ничтожно и для изучения колебаний части струны, сильно удаленной от концов, мы приходим к так называемой *задаче Коши*, которая состоит в отыскании функции $u(x,t)$, удовлетворяющей волновому уравнению (4.5) и начальным условиям (4.1) и (4.2).

Если моделировать механические колебания в случае, когда концы не закреплены, а *свободны* (свободность концов означает, что их перемещение не вызывает внешней силы, такому перемещению препятствующей), то математически условия на свободных концах (*свободная граница*) записываются так:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0. \tag{4.6}$$

Краевая задача с граничными условиями типа (4.3), (4.4), когда на границе области *задана* искомая функция, называется ***краевой задачей первого рода***.

Краевая задача с граничными условиями типа (4.6), когда в дополнение к дифференциальному уравнению на границе области задана *нормальная* к границе *производная*, называется ***второй краевой задачей***.

4.2. Метод Даламбера

Когда концы струны достаточно удалены от места рассмотрения и в силу этого их влияние на ситуацию незначительно, приходят к модели «бесконечной струны». Задача Коши в данном случае представляет собой систему уравнений (4.1), (4.2) и (4.5):

$$u(x,0)=f(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x).$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Решение проведем по методу Даламбера: 1) приведем (4.5) к каноническому виду; 2) найдем общее решение, в которое войдут две произвольные функции; 3) воспользуемся двумя условиями (4.1) и (4.2) для нахождения двух неизвестных произвольных функций.

В рассматриваемом случае система *характеристических уравнений* имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=-a;\quad \frac{dx}{dt}=a.$$

Общим интегралом этой системы является система уравнений

$$x+at=C_1,\quad x-at=C_2.$$

Введем новые независимые переменные по формулам:

$$s(x,t)=x+at;\quad r(x,t)=x-at. \tag{4.7}$$

Решая систему линейных уравнений (4.7) относительно x и t, получаем

$$t=\frac{s-r}{2a};\quad x=\frac{s+r}{2}.$$

Вторые частные производные функций s и r равны нулю, а первые – постоянные

$$s_x=1,\quad s_t=a,\quad r_x=1,\quad r_t=-a. \tag{4.8}$$

В задаче (4.1), (4.2), (4.5) ищется функция $u=u(x,t)$. При переходе к новым переменным мы получаем, конечно, другую функцию $\tilde{u}(s,r)$. Мы сохраняем за новой функцией старое обозначение и будем писать $u(s,t)$.

Преобразуя производные к новым переменным, получаем (в силу формул (4.8))

$$u_x=u_s s_x+u_r r_x=u_s+u_r,\quad u_t=u_s s_t+u_r r_t=a(u_s-u_r),$$

$$u_{xx}=u_{ss}+2u_{sr}+u_{rr},\quad u_{tt}=a^2(u_{ss}-u_{sr}-u_{rs}+u_{rr}).$$

Подставляя найденные значения вторых производных по старым переменным в (4.5), приводя подобные и сокращая обе части уравнения на 4, получаем

$$u_{sr}=0.$$

Очевидным решением последнего уравнения является функция $u(s,r)=F(s)+G(r)$, где F и G произвольные функции своих аргументов. Подставляя сюда вместо s и r их выражения через x и t по формулам (4.7) приходим к *общему решению* заданного уравнения (4.5):

$$u(x,t)=F(x+at)+G(x-at). \tag{4.9}$$

Для нахождения функций F и G воспользуемся условиями Коши (4.1) и (4.2). Вычислим частную производную

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=F'(x+at)a-G'(x-at)a. \tag{4.10}$$

Подставляя в (4.9) и (4.10) $t=0$ и пользуясь условиями Коши (4.1) и (4.2) получаем систему уравнений

$$F(x)+G(x)=f(x),$$
$$F'(x)-G'(x)=\frac{1}{a}g(x).$$

Интегрируя второе уравнение в пределах от 0 до x, получаем систему

$$F(x)-G(x)=\frac{1}{a}\int_0^x g(x)dx+C,\ \ F(x)+G(x)=f(x).$$

Решая эту систему, находим неизвестные функции $F(x)$ и $G(x)$:

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x g(x)dx+\frac{C}{2},\quad G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x g(x)dx-\frac{C}{2}.$$

Заменяя в первой из этих формул x на $x+at$, а во второй – на $x-at$ и подставляя полученное в (4.9), приходим к искомому решению

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(y)dy. \tag{4.11}$$

Решение (4.11) носит название ***формулы Даламбера***, а изложенный здесь метод построения решения краевых задач для уравнений гиперболического типа носит названия: *метода Даламбера*, *метода характеристик* или *метода распространяющихся волн.*

4.3. Физическая интерпретация решения Даламбера

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой (4.11), описывает *процесс* распространения по материалу рассматриваемого тела *возмущения* его «доначального» состояния.

Напомним, что «доначальное» состояние таково, что все точки струны совпадают с отрезком $(0,l)$ оси Ox $(u=0)$ и находятся в состоянии покоя $(u_t=0)$. В некоторый начальный момент времени правые части равенств, стоящих в скобках, получают *малые добавки* – возмущения: $0+f(x)$ и $0+g(x)$. Эффекты этих возмущений, как показывает формула (4.11), *суммируются.*

Если обозначить $\Psi(x)=\int\limits_0^x \frac{g(x)}{a}dx$, то решение Даламбера (4.11) можно переписать в виде

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t),$$

где $u_1(x,t)=\frac{1}{2}(f(x+at)+\Psi(x+at))$; $u_2(x,t)=\frac{1}{2}(f(x-at)-\Psi(x-at))$.

Функция $u_2(x,t)$ представляет собой волну, распространяющуюся в направлении оси Ox со скоростью a. Аналогично, $u_1(x,t)$ – волна, распространяющаяся с той же скоростью в противоположном направлении. Там, где проекции на ось x графиков функций u_1 и u_2 имеют непустое пересечение, эти графики складываются.

Как показывают две последние формулы, обе волны (прямая и обратная) состоят из двух слагаемых. Первое слагаемое вызвано начальным отклонением точек струны, второе – тем, что этим точкам сообщены начальные скорости.

Например, пусть $g(x)=0$, а $f(x)$ задана графически, как показано жирной линией на рис. 5а, тонкой линией изображены совпадающие в начальный момент прямая и обратная волны, которые в сумме (по правилу сложения графиков) дают возмущенное положение струны в «доначальное» время натянутой вдоль оси Ox.

Решение задачи Коши о колебаниях точек бесконечной струны задается с помощью формулы

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big(f(x+at)+f(x-at)\Big).$$

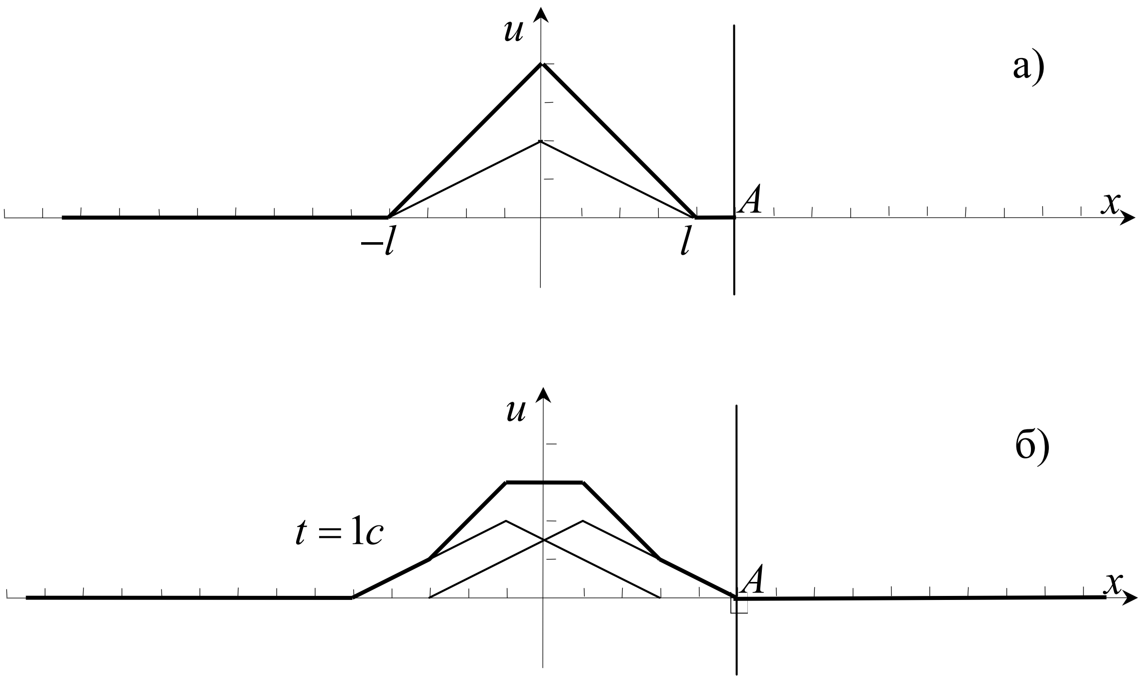


Рис. 5

Жирной линией изображена форма струны, по которой перемещается волна начального возмущения

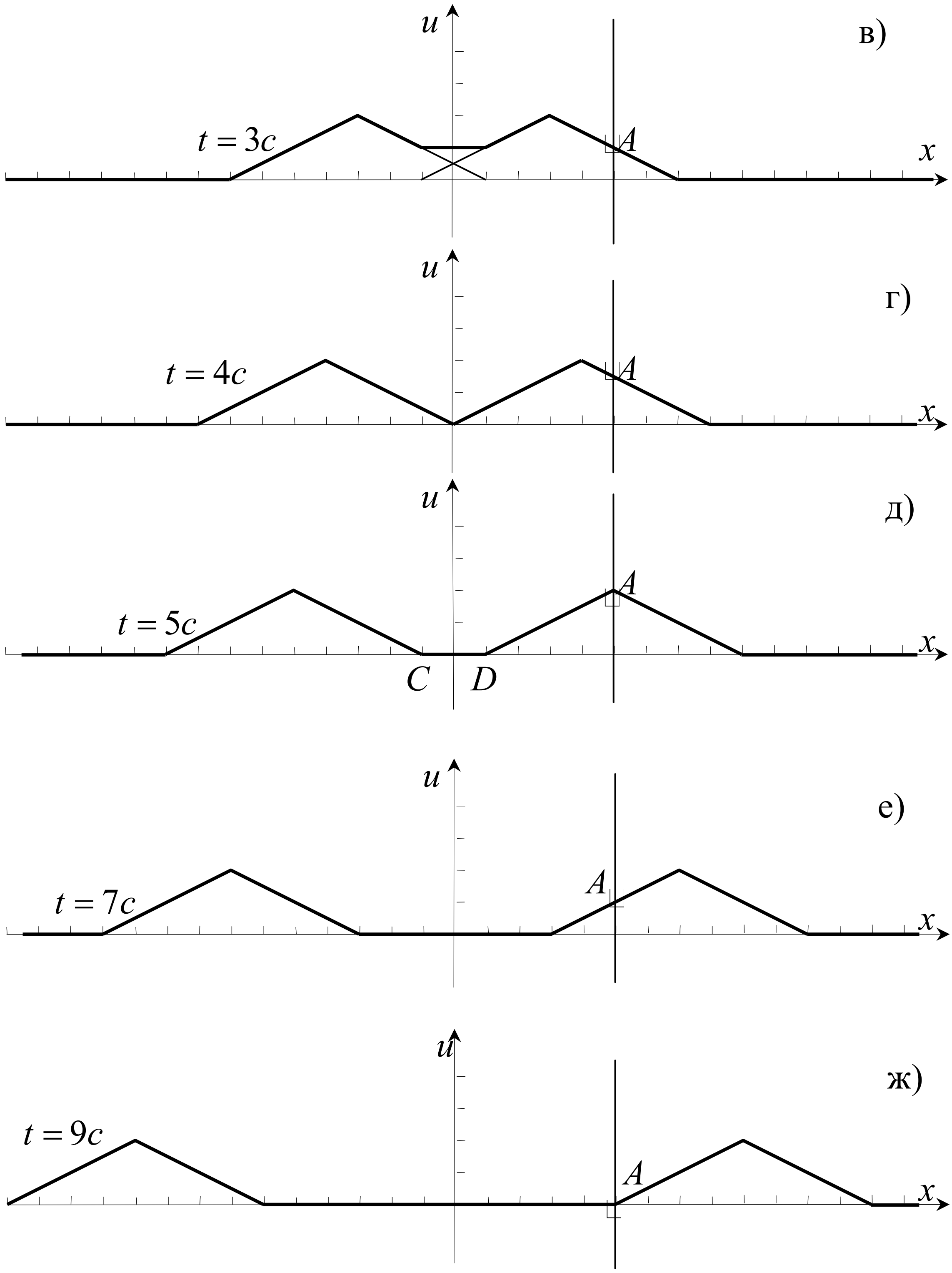


Рис. 5 (продолжение)
Жирной линией изображена форма струны, по которой перемещается волна начального возмущения

Как видно из рисунка, начальное отклонение задано на симметричном относительно начала координат промежутке, который мы обозначим через $(-l,l)$. В нашем примере $l = 4$ единицам длины, а скорость волны a принята равной 1 ед./сек. Следовательно, левая граница зоны возмущения достигнет отмеченной точки A с координатой $x = 5$ через девять секунд. Правая граница достигает точки A уже через секунду и точка начинает свое колебательное движение. Это движение продолжается в течение времени прохождения прямой волны. В общем случае это время равно $\frac{2l}{a}$. В нашем примере это время равно 8 секундам. Как видно из рисунков 5а – 5г в течение некоторого времени (у нас это 4 сек.) прямая и обратная волны взаимодействуют друг с другом, а затем распространяются независимо, оставляя за собой состояние покоя. Прослеживая вертикальное перемещение «поплавка», точки A, можно определить ее вертикальную скорость и ускорение.

4.4. Полубесконечная струна. Влияние границы

Рассмотрим полубесконечную струну, совпадающую в положении равновесия с положительной частью оси Ox (рис. 6).

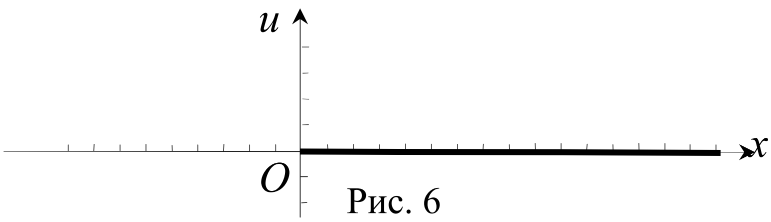


Рис. 6

Пусть левый конец струны, совпадающий с началом координат, закреплен. Это означает, что его отклонение в любой момент времени равно нулю: $u(0,t)=0$.

Пусть на участке (α,β) под действием некоторой силы струна приняла форму, изображенную на рис. 7 (тонкой линией обозначены совпадающие в начальный момент прямая и обратная волны, в сумме дающие волну, обозначенную жирной линией).

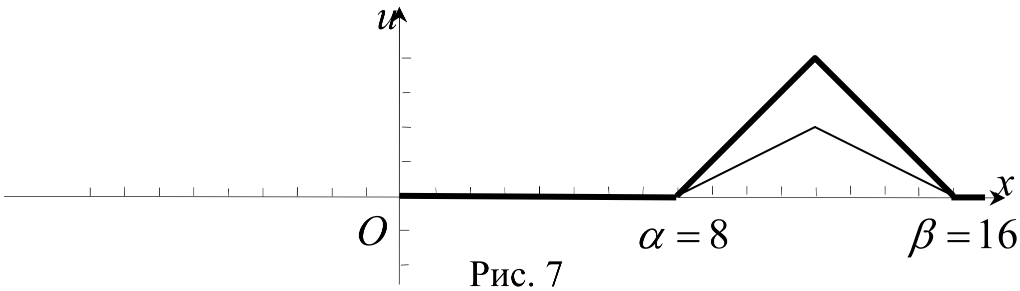


Рис. 7

Пусть в начальный момент времени сила перестала удерживать струну. Дальнейшее поведение струны описывается решением следующей краевой задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad u(x,0)=f(x);\\ &\frac{\partial\, u(x,0)}{\partial t}=0; \quad u(0,t)=0; \quad x\in[0,+\infty),\end{aligned} \tag{4.12}$$

где $f(x)$ отлична от нуля при $x\in(\alpha,\beta)$ и равна нулю при $x\notin(\alpha,\beta)$. Должно быть выполнено условие согласования $f(0)=0$.

Для решения поставленной задачи попробуем поставить *задачу Коши для бесконечной струны* так, чтобы ее решение при $x\in[0,\infty)$ удовлетворяло системе (4.12), то есть описывало колебания полубесконечной *струны с закреплен-*

ным концом. Итак, рассмотрим функцию $F(x)$, заданную при $x \in (-\infty, +\infty)$, совпадающую с $f(x)$, когда $x \in [0, \infty)$, и равную $-f(-x)$ при $x \in (-\infty, 0)$ (рис. 8). (Жирной линией обозначен график функции $f(x)$).

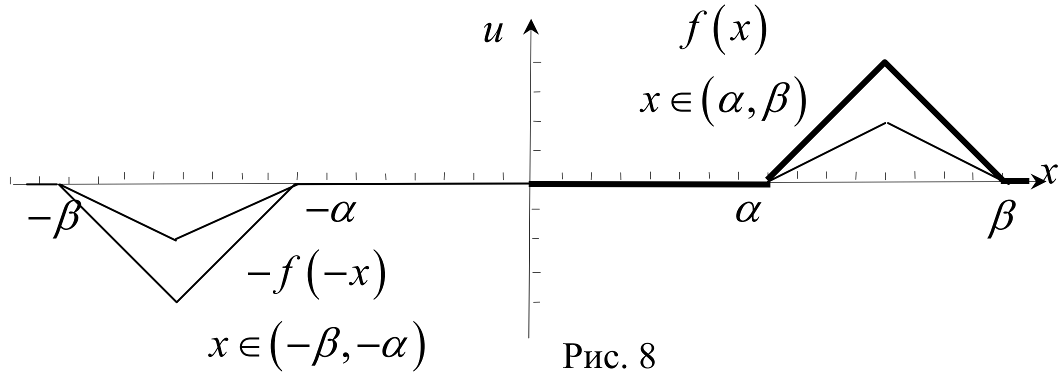


Рис. 8

Поставим задачу Коши: найти функцию $u(x,t)$, заданную на всей числовой прямой, удовлетворяющую волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

и при $t = 0$ удовлетворяющую условиям Коши: $u_t(x,0) = 0$ и $u(x,0) = F(x)$. Решение этой задачи Коши дается формулой Даламбера

$$u(x,t) = \frac{F(x+at) + F(x-at)}{2} \tag{4.13}$$

Функция (4.13) определена для *всех* x и $t \geq 0$ и, в силу нечетности $F(x)$, обращается в ноль при $x = 0$, то есть удовлетворяет граничному условию закрепления левого конца. С другой стороны, при $x > 0$ и $t \geq 0$ она удовлетворяет системе (4.12) и поэтому является решением поставленной задачи о колебаниях полубесконечной струны с закрепленным концом.

$$u(x,t) = \frac{F(x+at) + F(x-at)}{2} = \begin{cases} \dfrac{f(x+at) - f(at-x)}{2}, & 0 \leq x \leq at \\ \dfrac{f(x+at) + f(x-at)}{2}, & x > at \end{cases}$$

На рисунке 9а изображена ситуация, имеющая место через 8 секунд, в предположении, что скорость распространения волн равна одной единице длины в секунду. До этого момента времени начальное отклонение на промежутке (α, β), уменьшившись вдвое, распространялось в виде прямой и обратной волн. В рассматриваемый момент времени обратная волна подошла к границе. В этот же момент к границе подошла прямая волна от «фиктивного» возмущения на промежутке $(-\beta, -\alpha)$. Эти волны начинают налегать одна на другую по тем же законам, как было выше в случае бесконечной струны. Однако физический смысл имеет только часть картинки, соответствующая неотрицательным значениям x.

Рисунки 9а–9ж иллюстрируют этапы взаимодействия набежавшей волны и границы. Происходит «поглощение» волны и затем «излучение» новой волны (Рис. 9ж), находящейся в противофазе к поглощенной.

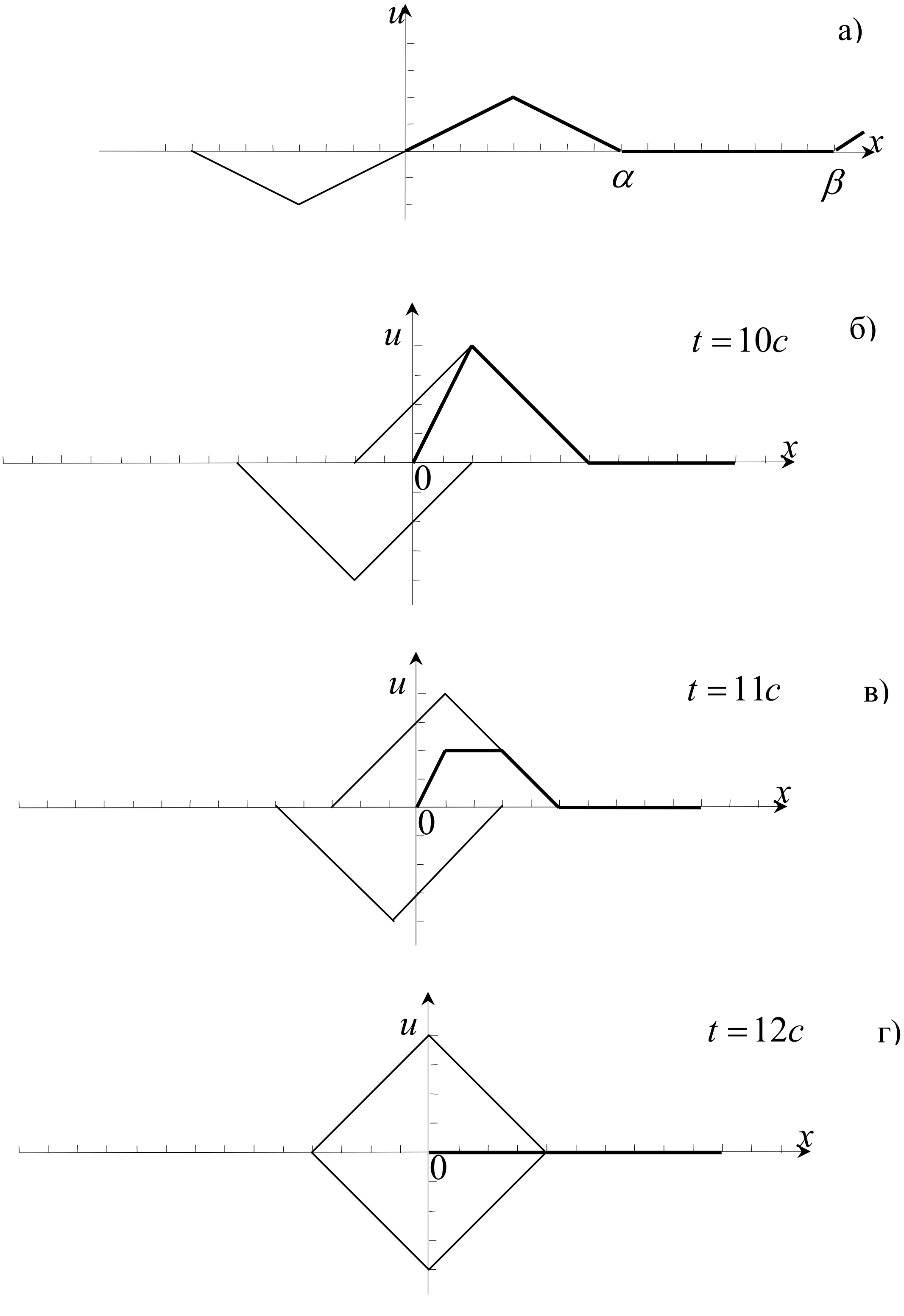
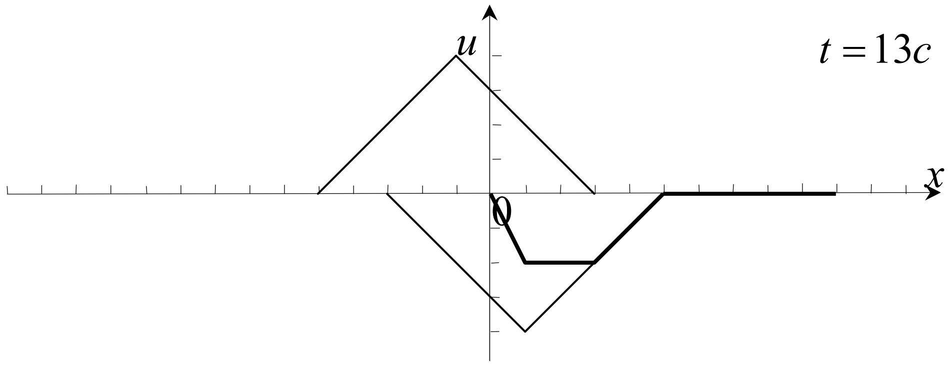
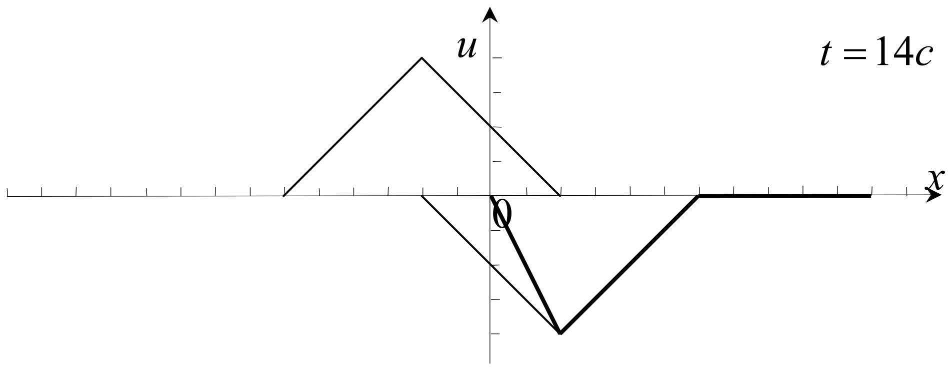


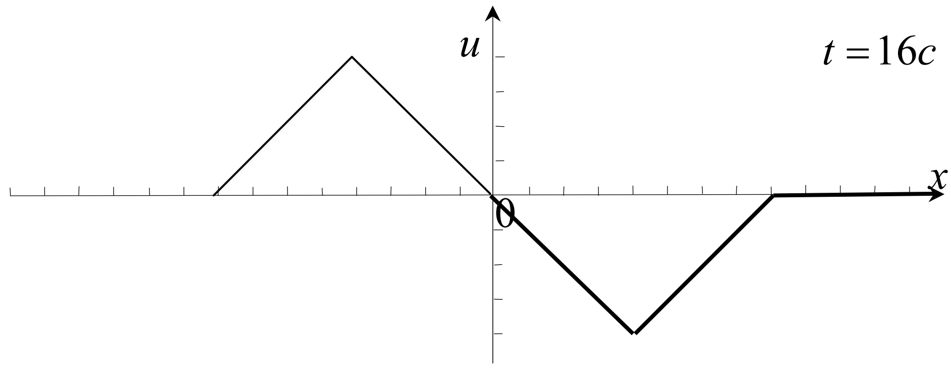
Рис. 9



д)



е)



ж)

Рис. 9 (продолжение)

Вопросы для самопроверки

1. Что такое *струна*?
2. Что означает *плавность* и *малость* колебаний?
3. Какие колебания струны рассматриваются?
4. Какие способы возбуждения колебаний изучаются и как математически записываются соответствующие начальные условия?
5. Какова физическая интерпретация функций $u(x,t), u_x(x,t),\ u_t(x,t),\ u_{tt}(x,t)$?
6. Какое уравнение с частными производными второго порядка называется волновым?
7. Что называется краевой задачей?
8. Какие из условий называются граничными, а какие – начальными?
9. Как математически записываются условия на свободных концах (свободная граница)?
10. Чем отличаются краевые задачи первого и второго рода?

11. Каков физический смысл модели «бесконечная струна»?
12. Как найти решение по методу Даламбера?
13. Как выглядит общее решение волнового уравнения?
14. Какая формула называется формулой Даламбера?
15. В чем состоит физический смысл формулы Даламбера?
16. Как применить решение Даламбера к случаю полубесконечной струны?

Раздел 5. Метод разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Специальные функции

При изучении данного раздела вам необходимо:

- Рассмотреть и освоить следующие темы:

5.1. Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны конечных размеров. Специальные функции
5.2. Физическая интерпретация решения в форме Фурье
5.3. Сравнение методов Даламбера и Фурье

- Ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №5.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №5 текущего контроля.

5.1. Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны конечных размеров. Специальные функции

Метод разделения переменных или *метод Фурье* является универсальным и применимым ко всем типам линейных уравнений.

Рассмотрим следующую краевую задачу, представляющую собой математическую модель колебаний струны конечной длины l с закрепленными концами

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad u(x,0) = f(x), \tag{5.3}$$

Ищем ненулевое решение $u(x,t)$ в виде произведения функции только от x на функцию только от t

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{5.4}$$

Подставляя (5.4) в (5.1), получаем $XT''=a^2X''T$ или, деля обе части равенства на a^2XT,

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (5.5)$$

Правая часть сохраняет значение и не зависит от x, а левая часть равенства (5.5) не зависит от t. Таким образом, правая и левая части рассматриваемого равенства равны одной и той же постоянной величине. Нетрудно показать, что ненулевые решения $X(x)$ и $T(t)$ из уравнения (5.5) получаются только при отрицательном значении этой общей постоянной. Обозначая ее через $-\lambda^2$, приходим к двум *обыкновенным* дифференциальным уравнениям:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda^2, \qquad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

или

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \quad T''(t)+\lambda^2a^2T(t)=0. \qquad (5.6)$$

Подставляя функцию $u=X(x)\cdot T(t)$ в граничные условия (5.2), получаем равенства $X(0)=0$ и $X(l)=0$. Таким образом, приходим к следующей однородной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка: *найти те значения параметра λ, при которых однородная краевая задача*

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \quad X(0)=0, \quad X(l)=0 \qquad (5.7)$$

имеет на промежутке $(0,l)$ ненулевые решения, и найти эти решения. Так поставленная задача носит название ***задачи Штурма-Лиувилля***. Значения параметра λ, при которых краевая задача (5.7) имеет решения, называются ***собственными числами*** задачи Штурма-Лиувилля, а сами ненулевые решения – ***собственными функциями*** задачи Штурма-Лиувилля.

Определение. Бесконечная последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x),...,f_n(x)...$ называется ортогональной на промежутке $[a,b]$, если

$$\int_a^b f_m(x)\cdot f_n(x)dx=0 \text{ для любых } m\neq n.$$

Классы функций, которые встречаются при интегрировании уравнений математической физики, появляющиеся как решения однородных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и обладающие общим для всех свойством ортогональности называются ***специальными функциями.***

В задаче о колебаниях струны с системой тригонометрических функций $\sin\frac{\pi kx}{l}$ и $\cos\frac{\pi kx}{l}$, $k=1,2,...$, ортогональных на промежутке $[0,l]$. Общее решение дифференциального уравнения (5.7) известно [2]:

$$X(x)=C\cos\lambda x+D\sin\lambda x,$$

где C и D – произвольные постоянные.

Первое граничное условие дает $C=0$, второе, при условии $X(x)\neq 0$ приводит к спектру собственных чисел и собственных функций

$$\lambda_k=\frac{k\pi}{l},\quad X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{5.8}$$

При найденных $\lambda_k=\dfrac{k\pi}{l}$ общее решение второго уравнения (5.6) имеет вид

$$T_k(t)=A_k\cos\frac{ka\pi t}{l}+B_k\sin\frac{ka\pi t}{l}, \tag{5.9}$$

где A_k и B_k – произвольные постоянные.

Подставляя (5.8) и (5.9) в (5.4) приходим к бесконечной последовательности функций

$$u_k(x,t)=\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, k=1,2,3,.... \tag{5.10}$$

Эти функции при *любом* натуральном значении k удовлетворяют дифференциальному уравнению (5.1) и граничным условиям (5.2). В силу линейности уравнений (5.1) и (5.2) им удовлетворяет и сумма любого *числа* функций $u_k(x,t)$. Таким образом, решение уравнений (5.1) и (5.2):

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{5.11}$$

В этом уравнении две неизвестные бесконечные *числовые последовательности* A_k и B_k. Найдем эти последовательности из условия (5.3). Подставляя (5.11) в (5.3) в силу единственности разложения функции в ряд Фурье, получим для A_k и B_k формулы

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ B_k=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{5.12}$$

5.2. Физическая интерпретация решения Фурье

Перепишем формулу для функций (5.10) в виде

$$u_k(x,t)=\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}=\alpha_k\cos\frac{\pi k}{l}a(t+\delta_k)\sin\frac{\pi kx}{l},$$

где

$$\alpha_k=\sqrt{A_k^{\,2}+B_k^{\,2}},\quad \delta_k=-\frac{l}{\pi ka}arctg\frac{B_k}{A_k}.$$

Отсюда видно, что каждая точка струны $x=x_0\in(0,l)$ совершает гармоническое колебание $u_k(x_0,t)=\alpha_k\sin\dfrac{\pi kx_0}{l}\cos\dfrac{\pi k}{l}a(t+\delta_k)$ с амплитудой $\alpha_k\sin\dfrac{\pi kx_0}{l}$. Причем такое колебание, при котором все точки струны *одновременно достигают* своих экстремальных, амплитудных значений. Разумеется, каждая точка – своего амплитудного значения. Колебания такого типа называются *стоячей волной* (*гармоникой*). Профиль каждой стоячей волны (каждому значению k отвечает своя волна) в заданный момент времени $t = t^*$ представляет синусоиду

$$u_k\left(x,t^*\right) = C_k\left(t^*\right)\sin\frac{\pi kx}{l},\quad C_k\left(t^*\right) = \alpha_k\cos\omega_k\left(t^*+\delta_k\right),\quad \text{ãäå}\quad \omega_k = \frac{\pi ka}{l}.$$

Как видно из приведенных формул, каждой стоячей волне (каждому значению k) отвечает своя частота ω_k, то есть все точки струны колеблются в данной стоячей волне с одинаковой частотой. Эти частоты называются *собственными частотами*. Самая низкая частота, а значит самый низкий звук, соответствует значению $k = 1$ и равна $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Звучание на этой частоте называют *основным тоном* струны. Как видно из последней формулы, основной тон тем выше, чем сильнее натянута струна (чем больше T) и чем меньше длина l. Если воспользоваться формулой интегрирования по частям, то из (5.12) видно, что коэффициенты ряда (5.11) убывают достаточно быстро с ростом номера k. Таким образом, решение (5.11), то есть звук, издаваемый струной, складывается из отдельных тонов (чаще тоны, соответствующие более высоким частотам, чем $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, называются *обертонами*). Так как амплитуды тонов, а потому и влияние их на звук, издаваемый струной, быстро убывают с ростом k, то роль обертонов сводится к созданию *тембра*, различного для разных музыкальных инструментов.

5.3. Сравнение методов Даламбера и Фурье

Нетрудно обнаружить полное тождество формул (4.11) и (5.11). Для применения формулы (4.11) к случаю конечной струны требуется продолжение функций $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$, заданных изначально на промежутке $\left(0,l\right)$, сначала нечетным образом на симметричный промежуток $\left(-l,0\right)$, а затем с периодом $2l$ на всю числовую прямую. Это равносильно разложению функций $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ в ряд Фурье по синусам, равносильно замене функций $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ на тригонометрические ряды по формулам

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

в которых правые части, очевидно, обладают требуемыми в методе Даламбера (для бесконечной струны) свойствами: заданы на всей числовой прямой и являются $2l$ периодическими. Подставляя эти выражения для $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ в формулу Даламбера (4.11), мы приходим к решению (5.11)

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi(x+at)}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi(x-at)}{l}\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi y}{l}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left[\sin\frac{k\pi(x+at)}{l}+\sin\frac{k\pi(x-at)}{l}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}B_k\left[\cos\frac{k\pi(x-at)}{l}-\cos\frac{k\pi(x+at)}{l}\right]\right.$$

Теперь, если воспользуемся формулами для суммы синусов и разности косинусов, непосредственно получим (5.11).

Таким образом, видим, что применительно к краевой задаче для волнового уравнения, оба способа принципиально равносильны. Очевидна глубокая физическая содержательность решения Фурье. В остальном решение Даламбера предпочтительней. В самом деле, ряд (5.11) сходится в большинстве случаев медленно и не годится для вычислений. Зависимость решения от начальных данных $f(x)$ и $g(x)$, выражаемая рядом (5.11), гораздо сложнее по внешнему виду, чем зависимость представляемая формулой Даламбера.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит метод разделения переменных или метод Фурье?
2. В чем отличие метода Фурье от метода Даламбера?
3. Какая задача носит название задачи Штурма-Лиувилля?
4. Что такое собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля?
5. Какая последовательность функций называется ортогональной?
6. Какие функции называются специальными?
7. В чем отличия решений Даламбера и Фурье?
8. Колебания какого типа называют стоячей водой?
9. Что называют собственными частотами?
10. Чем метод Даламбера предпочтительнее метода Фурье?

Раздел 6. Параболические уравнения

При изучении данного раздела вам необходимо:

- Рассмотреть и освоить следующие темы:

6.1. Уравнение диффузии
6.2. Уравнение теплопроводности
6.3. Классификация краевых задач
6.4. Распространение тепла на бесконечной прямой
6.5. Одномерная задача о распространении тепла в стенке (или тонком стержне)

6.6. Первая краевая задача. Неоднородные граничные условия

- Ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №6.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №6 текущего контроля.
- Выполнить задачу из контрольной работы.

6.1. Уравнение диффузии

Рассмотрим физическую модель – бесконечную трубу, по которой *протекает с некоторой заданной скоростью* газ, содержащий примесь. Содержание примеси описывается в терминах ее *концентрации* $u(x,t)$. Концентрация уменьшается вследствие осаждения примеси на стенках трубы. Задача состоит в построении математической модели, описывающей эволюцию концентрации примеси.

Если $u(x,t) < u(x+dx,t)$, то со стороны сечения $x+dx$, в котором концентрация выше, в сторону сечения x имеет место диффузионный поток массы, равный согласно *закону Нернста* величине

$$dQ = -D\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}Sdt = WSdt, \quad W = -D\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Здесь D – коэффициент диффузии, S – площадь сечения трубки, $W(x,t)$ – плотность диффузионного потока, равная массе вещества, протекающего в единицу времени через единицу площади. Знак минус показывает, что диффузионный поток массы направлен в сторону убыли концентрации. В общем случае диффузионный поток массы и конвективный поток массы должны складываться. Мы рассматриваем предельный случай, когда скорости течения газа равны нулю, и в силу этого конвективный поток массы отсутствует.

Итак, рассмотрим цилиндрический объем трубы, расположенный между сечениями x и $x+dx$, площадь которых равна S. Масса, которая вследствие диффузии прошла через сечение $x = x$ за время dt, равна $dQ_1 = -D\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}Sdt$. За это же время через сечение $x+dx$ рассматриваемый объем покинет масса вещества, равная $dQ_2 = -D\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}Sdt$. Таким образом, за время dt в объеме произошло увеличение массы на величину $dQ_1 - dQ_2$. Следовательно, в рассматриваемом объеме, величина которого равна Sdx, произошло увеличение концентрации на величину Δu, связанную с изменением массы равенством

$$\Delta uSdx = dQ_1 - dQ_2 = D\left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)Sdt.$$

Написанное уравнение есть *математическая запись* одного из основных физических законов – *закона сохранения массы*.

Деля обе части последнего равенства на произведение $Sdxdt$ и вспоминая определение производной, получим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (6.1)$$

Дифференциальное уравнение с частными производными вида (6.1) называется ***уравнением диффузии***.

Замечание. *Операция, состоящая в вычислении вторых частных производных некоторой функции по пространственным переменным, например* $u = u(x,y,z,t)$, *и их сложения называется* ***оператором Лапласа***. *Оператор Лапласа функции и обозначается буквой* Δ. *Таким образом, по определению,*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Если бы процесс диффузии происходил в трехмерном пространстве, то *пространственный элемент*, в качестве которого у нас выступал слой между сечениями x и $x+dx$, представлял бы кубик, заключенный между уже тремя парами плоскостей x и $x+dx$, y и $y+dy$, z и $z+dz$, и при выводе уравнения нам пришлось бы дополнительно учесть диффузионные потоки массы в направлении координатных осей Oy и Oz. Сложив соответствующие результаты, мы пришли бы к уравнению, описывающему диффузию в трехмерном пространстве

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = D\Delta u(x,y,z,t).$$

6.2. Уравнение теплопроводности

Существуют три механизма передачи тепла: *молекулярная теплопроводность*, *конвекция* и *излучение*.

Здесь мы получим дифференциальное уравнение, которому подчиняется температура в среде, когда тепло от одной части к другой передается только за счет молекулярной теплопроводности.

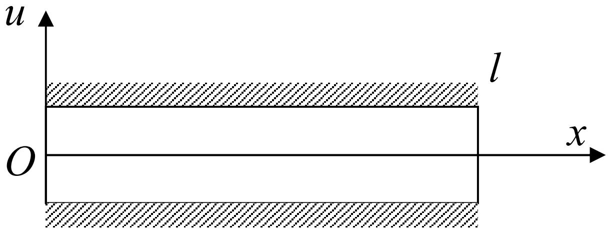


Рис. 10

Так как в данном случае, как и в случае диффузии, перенос вызван действием одного и того же механизма – движением молекул, то и уравнение получится такое же. Рассмотрим однородный стержень, теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температура во всех точках любого поперечного сечения, измеряемая имеющимися в нашем распоряжении приборами, была одинаковой.

Введем систему координат следующим образом: начало совместим с одним из концов стержня, ось Ox направим по его оси в сторону другого конца, ось температур Ou направим перпендикулярно оси Ox. Наш стержень в выбранной системе координат будет совпадать с отрезком $(0,l)$ оси Ox (рис. 10).

Пусть в «доначальное» время некими внешними причинами температура в стержне поддерживалась равной $f(x)$, $x \in (0,l)$. Пусть в какой-то момент времени, который мы принимаем за начало отсчета, причины, поддерживавшие стержень при температуре $f(x)$, $x \in (0,l)$, исчезли, а концы стержня $x = 0$ и $x = l$ соединили с термостатом с температурами $u_1 > u_2$, соответственно.
Согласно *закону теплопроводности Фурье*, в случае нелинейного распределения температуры вдоль стержня количество тепла $Q(x)$, прошедшего за время dt через перпендикулярное оси x сечение площади S, равно

$$Q(x) = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} S dt,$$

постоянная λ, зависящая от физических свойств материала стержня, называется *коэффициентом теплопроводности*.

Теперь, чтобы проследить эволюцию температурного поля *u(x,t) от начального состояния*

$$u(x,0) = f(x), \tag{6.2}$$

нам понадобится *закон сохранения энергии*, который в самой общей форме носит название *первого начала термодинамики*.

В первом начале термодинамики утверждается, что количество теплоты, пришедшее в некоторый объем за какой-то промежуток времени, идет на изменение внутренней энергии объема и на совершение им работы. Применительно к рассматриваемому нами случаю математическая запись первого начала термодинамики имеет вид

$$dQ = c\rho S du dx,$$

где dQ – количество теплоты, ρ – плотность, Sdx – объем, c – удельная теплоемкость, du – частный дифференциал температуры $u(x,t)$.

Понятно, что эволюция температуры стержня будет протекать по-разному в зависимости от температур границ. Будем предполагать, что границы поддерживаются при постоянной температуре

$$u(0,t) = u_1, \quad u(l,t) = u_2, \tag{6.3}$$

Подсчитаем величину dQ. За время dt через левое сечение $x = x$ в объем Sdx стержня, расположенный между поперечными сечениями $x = x$ и $x = x + dx$, протечет количество тепла, равное по закону Фурье величине

$$dQ_1 = -\lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} S dt.$$

За тот же промежуток времени через правое сечение $x = x + dx$ из рассматриваемого объема вытечет количество тепла, равное по закону Фурье

$$dQ_2 = -\lambda \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} S dt.$$

Количество тепла dQ равно разности

$$dQ = dQ_1 - dQ_2.$$

Подставляя полученные результаты в закон сохранения энергии, имеем
$$\lambda S dt\left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=\rho c S dx du.$$

Деля обе части этого равенства на произведение $\rho c S dx dt$ и вспоминая определение производной, получаем искомое уравнение
$$\frac{\partial\ u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad a^2=\frac{\lambda}{c\rho}. \tag{6.4}$$

Введенный здесь коэффициент a называется *коэффициентом температуропроводности*.

Дифференциальное уравнение с частными производными (6.4) носит название ***уравнения теплопроводности***. Собирая полученные результаты, приходим к краевой задаче
$$\frac{\partial\ u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad a^2=\frac{\lambda}{c\rho},$$
$$u(x,0)=f(x),$$
$$u(0,t)=u_1,\ \ u(l,t)=u_2.$$

Краевая задача (6.2)–(6.4) представляет собой математическую модель эволюции одномерного температурного поля $u(x,t)$ в теплоизолированном стержне, концы которого поддерживаются при заданных температурах u_1 и u_2, первоначально нагретом до температуры, распределение которой характеризуется функцией $f(x)$.

Замечание 1*. Если бы распределение температуры имело размерность больше, например, $u=u(x,y,t)$ или $u=u(x,y,z,t)$, нам пришлось бы при подсчете количества тепла, пошедшего на нагревание рассматриваемого объема, дополнительно к тепловому потоку через плоскости $x=x$ и $x=x+dx$, учесть тепловые потоки через еще две пары плоскостей: $y=y$, $y=y+dy$ и $z=z$, $z=z+dz$. Тогда вместо уравнения (6.4) мы имели бы*
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

6.3. Классификация краевых задач

Краевые задачи математической физики классифицируются по виду *граничных условий*. Если на границе области *задана функция*, соответствующая краевая задача называется ***краевой задачей первого рода***; если на границе *задана производная* искомой функции (на самом деле – производная по *направлению нормали* к границе), говорят о ***краевой задаче второго рода***; если на границе задана *линейная комбинация искомой функции и ее производной* (нормальной) приходим к ***краевой задаче третьего рода***. Наконец ***смешанной краевой задачей*** называется краевая задача, в которой *на разных частях границы зада-*

ются разные условия. Например, если в задаче о распределении температуры в тонком стержне на одном конце задана *функция,* а на другом – *ее производная*.

Например, рассмотренная в п. 6.2 краевая задача (6.2)–(6.4) является *краевой задачей первого рода*: в этой задаче граница состоит из двух точек, и во всех точках границы задана искомая внутри отрезка функция. Физически это означает, что, наблюдая (измеряя) температуру на концах стержня, вычисляем температуру внутри посредством математической модели.

Пусть мы измеряем не температуру границы, а функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$, представляющие собой потоки тепла от левого и правого концов стержня соответственно. Но поток с правого торца стержня $h_2(t)$ – это то тепло, которое подошло к правому концу изнутри, и по закону Фурье оно равно $-\lambda \frac{\partial u}{\partial x}$. Таким образом, получаем равенство, которое обязано выполняться на правом конце:

$$-\lambda \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = h_2(t). \tag{6.5}$$

Аналогично на левом конце, учитывая, что там производная положительна, имеем

$$\lambda \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = h_1(t). \tag{6.6}$$

Таким образом, приходим ко *второй краевой задаче*, которую образует система уравнений (6.2), (6.4), (6.5) и (6.6). Она позволяет по измеренным тепловым потокам с концов восстановить температуру внутри стержня. Система уравнений: (6.2), первого уравнения (6.3) и уравнений (6.4), (6.6) – дает пример *смешанной краевой задачи* для одномерного уравнения теплопроводности.

Наконец мы не знаем ни температуру концов стержня, ни тепловые потоки. Пусть мы знаем *механизм* охлаждения (или нагревания) концов и пусть этот механизм есть *конвекция* воздуха, температура которого равна u_0. Тогда тепловой поток, покидающий торцы стержня, *вычисляется* по закону, установленному Ньютоном: $k(u-u_0)$. Величина k носит название *коэффициента теплообмена*. Используя закон теплообмена Ньютона, приходим к следующим граничным условия

$$-\lambda \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = k(u(l,t)-u_0); \quad \lambda \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = k(u(0,t)-u_0). \tag{6.7}$$

Каждым из написанных уравнений, очевидно, задана линейная комбинация искомой функции и ее первой производной на соответствующем конце стержня. Поэтому система уравнений (6.2), (6.7) и (6.4) представляет пример *краевой задачи третьего рода.*

6.4. Распространение тепла на бесконечной прямой

Рассмотрим тонкий длинный теплопроводящий стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Если стержень длинный, эволюция температурного поля в его средней части протекает главным образом под влиянием начального распределения. В задачах такого типа используют идеализацию бесконечного стержня, математической моделью температурного поля в котором служит следующая система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{6.9}$$

где $\varphi(x)$ определена на всей числовой оси $(-\infty < x < \infty)$. Задача, состоящая в решении системы уравнений (6.8), (6.9), называется *задачей с начальными условиями* или *задачей Коши*. Для упрощения сделаем замену переменной по формуле $t = a^2 t$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{a^2 \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial (a^2 t)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Время не входит в начальное условие (6.9), поэтому при сделанной замене переменной это условие не изменяется и вместо задачи (6.8), (6.9) мы приходим к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{6.11}$$

Можно показать, что решение этой задачи дается с помощью формулы

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi,$$

а решение поставленной задачи (6.8) и (6.9) (заменяем здесь время t на $a^2 t$)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \tag{6.12}$$

Равенство (6.12) носит название ***интеграла Пуассона.***

В качестве приложения к этой формуле рассмотрим такой пример. Пусть два длинных теплоизолированных с боков полубесконечных стержня с одинаковыми физическими свойствами нагреты так, что температура одного равна T_1, а температура другого равна T_2, где $T_1 > T_2$ постоянны. Пусть в некоторый начальный момент стержни плотно соединили торцами. Задача состоит в определении дальнейшей эволюции начального разрыва температуры в бесконечном стержне. Математической моделью рассматриваемого процесса теплопроводности служит следующая краевая задача

$$\begin{gathered} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \\ T(x,0) = \varphi_1(x) = \begin{cases} T_1, & x \geq 0, \\ T_2, & x < 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{6.13}$$

Вводя вместо реальной температуры T безразмерную температуру u по формуле $u = \dfrac{T - T_2}{T_1 - T_2}$, а вместо реального времени t подставляя время $a^2 t$, получаем в новых переменных температуру первого стержня равную единице, а температуру второго – нулю.

В новых переменных задача (6.13) примет вид (6.10) и (6.11), где функция $\varphi(x)$ имеет вид $\varphi(x) = \dfrac{\varphi_1(x) - T_2}{T_1 - T_2}$.

Итак, пусть в начальный момент времени два одинаковых стержня, один из которых имеет температуру равную единице, а второй – нулю, плотно соединили торцами.

Систему координат введем так: ось x направим от места соединения в сторону горячего стержня. Тогда начальное распределение температуры $\varphi(x)$ дается формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Подставляя это значение начальной температуры в (6.12) при $a = 1$ имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot 0 \frac{d\xi}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}}.$$

Введем новую переменную по формуле $\alpha(\xi) = \dfrac{\xi - x}{2\sqrt{t}}$. Тогда

$$d\xi = 2\sqrt{t} d\alpha, \quad \alpha(0) = -\frac{x}{2\sqrt{t}},$$

$\alpha(\infty) = \infty$ и выражение для температуры принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

В математике широко применяется *функция Лапласа*:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Эта функция также носит названия *интеграла ошибок* или *интеграла вероятностей.* Известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Используя этот результат и вводя новую переменную $z=\dfrac{x}{2\sqrt{t}}$, получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}d\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(z).$$

Для получения решения поставленной задачи (6.13) надо безразмерную температуру $u(x,t)$ подставить в формулу

$$T=T_2+u(T_1-T_2).$$

Таким образом, заменив t на a^2t, окончательно имеем

$$T(x,t)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

6.5. Одномерная задача о распространении тепла в стенке (или тонком стержне)

Рассматривается стенка толщины h; внутренняя поверхность стенки теплоизолирована (рис. 11). Материал стенки характеризуется своим коэффициентом температуропроводности a. Начальное распределение температуры описывается заданной функцией $\varphi(x)$, $x\in[0,h]$ (температура наружной поверхности $u(h,t)=\varphi(h)$).

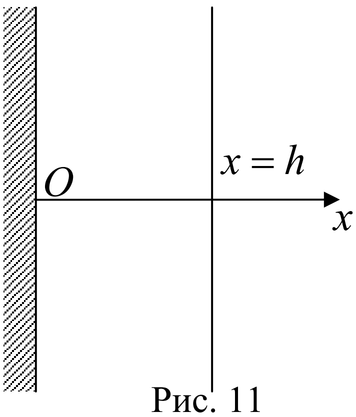


Рис. 11

В начальный момент времени температура наружной стенки упала и $u(h,t)=0$. Требуется найти эволюцию температурного поля внутри стенки.

Математическая модель в данном случае такова

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<h, \tag{6.14}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad u(h,t)=0. \tag{6.16}$$

Здесь, как в предыдущих рассмотрениях, переменная t связана с реальным временем τ формулой $t=a^2\tau$.

Построим решение, используя метод Фурье или метод разделения переменных. Разделим переменные: ищем решение в виде произведения

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t). \tag{6.17}$$

Подстановка этого выражения в (6.14) приводит к равенствам

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda^2,\quad \lambda=const.$$

Решая полученные уравнения

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T' + \lambda^2 T = 0,$$

находим

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \quad T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}, \qquad (6.18)$$

где A, B, C – произвольные постоянные.

Подставляя (6.17) в граничные условия (6.16), приходим к системе уравнений

$$X(h) = A\cos h\lambda + B\sin h\lambda = 0,$$

$$X'(0) = -\lambda A\sin 0\lambda + \lambda B\cos 0\lambda = 0.$$

Из второго уравнения следует, что $B = 0$. Подстановка этого значения B в первое уравнение приводит к простейшему тригонометрическому уравнению для нахождения λ:

$$\cos\lambda h = 0.$$

Откуда получаем собственные числа и собственные функции

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2h} \quad \text{è} \quad X_n = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h};$$

Подставляя найденные значения λ_n во второе уравнение (6.18), получаем

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t}.$$

Таким образом, приходим к бесконечной последовательности функций, каждая из которых удовлетворяет и дифференциальному уравнению, и граничным условиям краевой задачи (6.14)–(6.16):

$$u_n(x,t) = C_n e^{-\lambda_n^2 t}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}, n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (6.19)$$

В силу линейности рассматриваемой краевой задачи, этим же условиям удовлетворяет и сумма любого *сколь угодно большого* количества слагаемых вида (6.19).

В результате искомое решение

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 t}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}.$$

Подчиняя $u(x,t)$ условию (6.15), получаем равенство

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}.$$

Это равенство дает разложение заданной функции в ряд по ортогональной системе функций на промежутке $[0, h]$. Откуда с учетом значения интеграла

$$\int_0^h \cos^2\frac{(2n-1)\pi x}{2h}dx = \frac{h}{2},$$

находим

$$C_n = \frac{2}{h}\int_0^h \varphi(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}dx.$$

Полное обоснование найденного решения исследуется в [1]. При записи ответа необходимо от фиктивного времени t перейти к физическому времени τ по формуле $t = a^2\tau$.

Вернемся к физическому времени τ и выпишем окончательный результат

$$u(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 a^2 \tau} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}, \text{ где } C_n = \frac{2}{h}\int_0^h \varphi(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}dx. \qquad (6.20)$$

В качестве примера рассмотрим решение (6.20) для $\varphi(x) = 1$. В этом случае

$$C_n = \frac{2}{h}\int_0^h \varphi(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}dx = \frac{2}{h}\int_0^h \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}dx = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 4}{(2n-1)\pi},$$

и эволюция температурного поля в стенке дается формулой

$$u(x,\tau) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a^2\tau}{4h^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}. \qquad (6.21)$$

Если бы начальная температура была равна не единице, а другой постоянная величине, например, T_0, то (6.20) выглядела бы так

$$u(x,\tau) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a^2\tau}{4h^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}. \qquad (6.22)$$

Полученное решение показывает, что, за исключением короткого начального промежутка времени, ряд, стоящий в правой части равенства (6.21), так же как и любые ряды типа (6.20), сходится весьма быстро. В частности, можно показать, что при больших временах достаточно удержать в решении только первый член ряда. То есть при больших t формула (6.22) принимает вид

$$u(x,\tau) = \frac{4T_0}{\pi}e^{-\frac{\pi^2 k\tau}{4h^2 c\rho}}\cos\frac{\pi x}{2h}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}.$$

Напомним, что k – коэффициент теплопроводности, ρ –- плотность, c – теплоемкость материала сооружения, охлаждение (нагревание) которого мы изучаем. Теплоизолированная стенка имеет максимальную температуру. Функция $u(x,t)$ принимает максимальное значение при $x = 0$, поэтому:

$$u_{\max} = T_0 e^{-\frac{\pi^2 k\tau}{4h^2 c\rho}}, \quad \frac{4}{\pi}\approx 1 \Rightarrow \frac{u_{\max}}{T_0} = e^{-\frac{\pi^2 k\tau}{4h^2 c\rho}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{u_{\max}}{T_0} = -\frac{\pi^2 k\tau}{4h^2 c\rho} \Rightarrow \tau = -\frac{4h^2 c\rho \ln\frac{u_{\max}}{T_0}}{\pi^2 k}.$$

По этой формуле мы можем оценить через какое время максимальная температура остывающего образца станет равна, например $0{,}01T_0$, т.е. уменьшиться в сто раз.

6.6. Первая краевая задача. Неоднородные граничные условия

Как и выше рассмотрим стенку (пластину) толщины h, длина и ширина которой бесконечно велики. Пусть начальная температура стенки $u(x,0)=u_0=\text{const}$; пусть температура одной стенки постоянна и равна u_1, а другой – u_2 $\left(u_1>u_2\right)$.Найти температуру стенки $u(x,t)$ в точке x в момент времени t. Для определенности предположим справедливость неравенства $u_1>u_0>u_2$. Направим ось x от горячей поверхности к холодной (поверхности предполагаются плоскими и параллельными) рис. 11.

Математическая постановка задачи такова:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\&u(x,0)=u_0,\\&u(0,t)=u_1,\\&u(h,t)=u_2.\end{aligned}\tag{6.23}$$

Решение выполним методом разделения переменных. Прежде всего введем вспомогательную функцию $w(x,t)$ по формуле

$$u(x,t)=w(x,t)+u_1+\frac{u_2-u_1}{h}x.\tag{6.24}$$

Для функции $w(x,t)$ краевая задача (6.23) преобразуется в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\&w(x,0)=u_0-u_1-\frac{u_2-u_1}{h}x,\\&w(0,t)=0,\\&w(h,t)=0.\end{aligned}\tag{6.25}$$

Принципиальное отличие (6.23) от (6.25) в том, что в последнем случае и дифференциальное уравнение, и граничные условия *однородны.* Именно *однородность граничной задачи* позволяет сконструировать естественный для данной *краевой задачи* ортонормированный базис и построить решение в виде ряда.

Разделяя переменные так же, как в случае предыдущей задачи с теплоизолированной границей, получим бесконечные последовательности собственных чисел и собственных функций

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{h},\quad X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{h}x,\quad n=1,2...,$$

после чего построим бесконечномерный базис

$$w_n(x,t)=e^{-\lambda_n^2a^2t}\sin\frac{\pi n}{h}x, n=1,2,...$$

Далее, ищем решение в виде разложения искомой функции по этому базису

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{h}x. \qquad (6.26)$$

Коэффициенты разложения C_n находим, требуя, чтобы функция (6.26) удовлетворяла начальному условию (6.24)

$$w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi nx}{h}=u_0-u_1-\frac{u_2-u_1}{h}x.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\sin\frac{\pi kx}{h}$ и интегрируя по промежутку $(0,h)$, имеем равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_0^h\sin\frac{\pi nx}{h}\sin\frac{\pi kx}{h}dx=\int_0^h(u_0-u_1-\frac{u_2-u_1}{h}x)\sin\frac{\pi kx}{h}dx.$$

В силу ортогональности последовательности синусов все интегралы слева, в которых $n\neq k$ обращаются в ноль. При $n=k$ имеем

$$\int_0^h\sin^2\left(\frac{\pi kx}{h}\right)dx=\frac{h}{2},$$

откуда

$$C_k=\frac{2}{h}\int_0^h(u_0-u_1-\frac{u_2-u_1}{h}x)\sin\frac{\pi kx}{h}dx.$$

Вычисляя интеграл, получаем значения коэффициентов разложения (6.26)

$$C_n=\frac{2}{\pi n}[u_0-u_1+(u_2-u_0)(-1)^n],n=1,2,3,...$$

Теперь вспомогательная функция найдена

$$w(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(u_0-u_1)+(-1)^n(u_2-u_0)\right]\frac{e^{-\left(\frac{\pi an}{h}\right)^2 t}\sin\frac{\pi nx}{h}}{n}\right\}.$$

Следовательно, в силу формулы (6.24) найдено решение основной краевой задачи (6.23)

$$u(x,t)=u_1+\frac{u_2-u_1}{h}x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(u_0-u_1)+(-1)^n(u_2-u_0)\right]\frac{e^{-\left(\frac{\pi an}{h}\right)^2 t}\sin\frac{\pi nx}{h}}{n}\right\}. \qquad (6.27)$$

Если воспользоваться известными разложениями в ряды Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{\pi x}{h}n)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{h}\right); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(\frac{\pi x}{h}n)=-\frac{\pi}{2}\frac{x}{h},$$

то видно, что при $t=0$ $u(x,0)=u_0$. С другой стороны, очевидно, при $t\to\infty$ распределение температуры в стенке стремиться к линейному:

$u(x,t)=u_1+\dfrac{u_2-u_1}{h}x$. Переход между этими стационарными режимами, как можно проследить на основании полученного решения, происходит так: в районе границ происходит резкое, с большими градиентами, изменение температуры от начального значения u_0 до u_1 у левой границы и от u_0 до u_2 у правой. При больших значениях времени, как и в случае стенки с теплоизолированной границей, рассмотренном в предыдущем пункте, можно сохранить в разложении (6.27) только первый член. Тогда имеем

$$u(x,t)=u_1+\frac{u_2-u_1}{h}x-\frac{4}{\pi}\left(\frac{u_1+u_2}{2}-u_0\right)\sin\frac{\pi x}{h}e^{-\frac{\pi^2a^2t}{h^2}}.$$

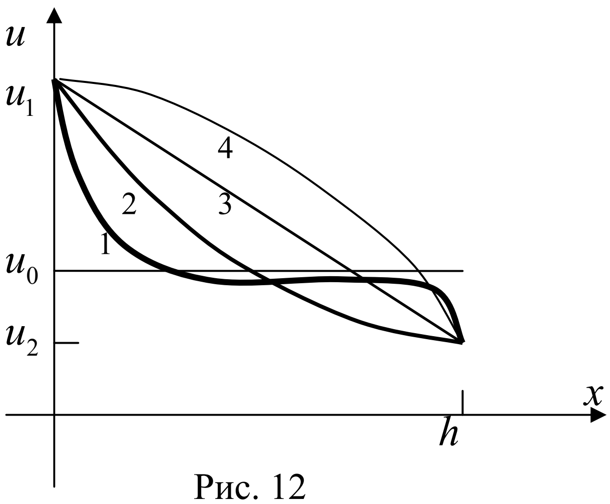


Рис. 12

Из последней формулы видно, что если средняя температура термостатов, с помощью которых нагревается или охлаждается пластинка (стенка), выше начальной температуры, то кривая температур будет выходить на стационар (прямая 3 на рис.12) выпуклостью вниз (кривая 2); в противном случае – выпуклостью вверх (кривая 4). Это может иметь значение в промышленности, например, оптических материалов, в которых порой предъявляются весьма высокие требования к величине и знаку термических напряжений.

Вопросы для самопроверки

1. Какие физические законы лежат в основе уравнения диффузии?
2. Какое уравнение называется уравнением диффузии?
3. К какому типу уравнений второго порядка относится уравнение диффузии?
4. Что такое оператор Лапласа?
5. Какие физические законы лежат в основе уравнения теплопроводности?
6. Что называется коэффициентом температуропроводности?
7. Чем уравнение теплопроводности отличается от уравнения диффузии?
8. Назовите виды краевых задач. Что лежит в основе их классификации?

9. Какое условие ставится в задаче Коши для уравнения теплопроводности?
10. Как называется полученное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности?
11. Что называется функцией Лапласа?
12. Каким методом решается одномерная задача о распространении тепла в стенке или тонком стержне?
13. Чем отличаются формулы решения, полученные методом Фурье, для уравнения теплопроводности и волнового уравнения?
14. Как преобразуется формула решения для уравнения теплопроводности при больших временах t?
15. Какие преобразования следует сделать с неоднородными граничными условиями, прежде чем решать задачу о распространении тепла в стенке или пластине?

Раздел 7. Эллиптические уравнения

При изучении данного раздела вам необходимо:
- Рассмотреть и освоить следующие темы

7.1. Уравнения Лапласа и Пуассона. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа
7.2. Электростатическая задача для полуполосы
- Ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №7.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №7 текущего контроля.
- Выполнить задачу из контрольной работы.

7.1. Уравнения Лапласа и Пуассона.

Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа

Выше мы рассмотрели волновое уравнение и уравнение теплопроводности. Первое было типичным представителем гиперболических уравнений, второе – параболических. Сейчас мы познакомимся с типичным представителем эллиптических уравнений – уравнением Лапласа.

Ньютон установил закон всемирного тяготения:

«Между двумя любыми телами действует сила притяжения, прямо пропорциональная их массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними».

Масса вещества, помещенная в начало координат, порождает во всем пространстве некоторую субстанцию (поле), интенсивность u которой в точке (x, y, z) вычисляется по формуле

$$u(x, y, z) = \frac{\gamma M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (7.1)$$

Здесь γ – некоторая постоянная, M – величина массы. Чтобы вычислить координаты силы, которая будет действовать со стороны массы M на единичную массу, помещенную в произвольную точку пространства, отличную от начала координат, надо положить

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{7.2}$$

Функцию (7.1), обладающую свойством (7.2) называют потенциалом векторного поля

$$\left\{F_x, F_y, F_z\right\}.$$

Лаплас предложил для изучения тяготения пользоваться не самой функцией ***u****, а тем дифференциальным уравнениям, которым эта функция удовлетворяет. Сейчас мы найдем это уравнение.*

Введем обозначение $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и вычислим вторые производные функции $u = u(r)$ как сложной функции координат. При этом несущественный для дальнейшего постоянный множитель γM мы положим равным единице и будем писать $u = \dfrac{1}{r}$. Дальше придется пользоваться частными производными от радиуса-вектора, поэтому вспомним, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}.$$

Откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{x' r^3 - x(r^3)'}{r^6} = -\frac{x' r^3 - x3r^2 r'}{r^6} = -\frac{r^3 - x3r^2 \dfrac{x}{r}}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

Но независимые переменные входят в выражение потенциала u абсолютно *равноправно*. Следовательно, можно сразу написать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}.$$

Сложим полученные вторые производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

называется ***уравнением Лапласа***.

Как только что было показано потенциал сил тяготения, он называется *ньютоновским потенциалом*, является решением уравнения Лапласа. Чуть более общее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$

называется **уравнением Пуассона**.

Следствие. Так как закон Кулона о взаимодействии электрических зарядов является точной копией закона всемирного тяготения, то *потенциал электрического поля* также *является решением уравнения Лапласа*, как и потенциал поля тяготения.

Замечание. *Таким образом, Лаплас предложил отказаться от явной формулы для сил дальнодействия и заменить ее на дифференциальное уравнение для поля величины* $\boldsymbol{u}$. *Дифференциальное уравнение описывает взаимодействие между соседними точками поля* $\boldsymbol{u}$. *Таким образом, введение поля заменяет задачу о дальнодействии между реальными телами на задачу о «близкодействующем» взаимодействии между соседними областями пространства, заполненного некоторым полем величины* $\boldsymbol{u}$.

Задача на ***собственные значения*** для оператора Лапласа состоит в нахождении тех числовых значений λ, для которых уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\lambda u$$

в области Ω имеет ненулевые решения $u(x,y,z)$. Ненулевые решения u называются ***собственными функциями*** оператора Лапласа, соответствующими этому собственному значению λ.

Задачей Дирихле называется *краевая задача первого рода* для уравнения Лапласа (Пуассона). *Краевая задача второго рода* для этих уравнений называется ***задачей Неймана***.

Если имеем теплопроводное тело, температура границы которого так или иначе измерена, то определение температуры во внутренних точках такого тела приводит к задаче Дирихле. С другой стороны, если нам доступна информация о тепловых потоках с границы тела, то для прогноза температуры во внутренних точках нужно решать задачу Неймана.

7.2. Электростатическая задача для полуполосы

Рассматривается длинная в направлении оси x пластинка ширины b (рис. 13). Одна сторона пластинки соединена с источником напряжения и ее напряжение (потенциал) $u=V$, две противоположные стороны заземлены, их

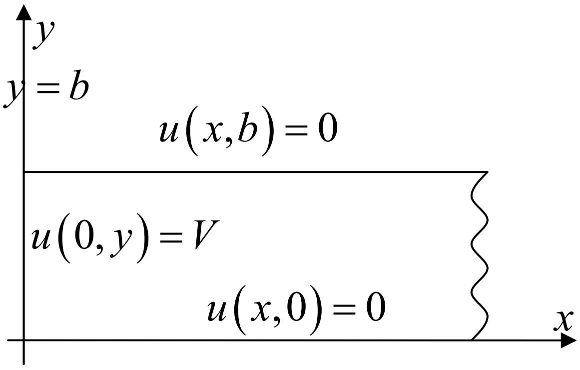


Рис. 13

напряжение равно нулю. Требуется найти распределение потенциала пряжения) в каждой внутренней точке пластинки. Прежде всего свяжем с пластинкой систему координат. В выбранной системе (рис. 13) границы имеют уравнения: $x=0, y=0, y=b.$

Если искомый потенциал обозначить $u(x,y)$, то граничные условия выразятся уравнениями:

$$u(0,y)=V,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,b)=0,\quad \lim_{x\to\infty} u(x,y)<\infty. \tag{7.3}$$

Составим уравнение. Прежде всего, вспоминаем, что напряжение или потенциал u, по определению, это такая функция $u(x,y)$, частные производные которой равны проекциям вектора напряженности электрического поля E_x и E_y

$$\frac{\partial u}{\partial x}=E_x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=E_y. \tag{7.4}$$

С другой стороны, из уравнений Максвелла для статического поля

$$div\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0. \tag{7.5}$$

Подставляя (7.4) в (7.5), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{7.6}$$

Таким образом, краевая задача, которая служит математической моделью распределения электрического потенциала в полубесконечной пластинке, представляет собой систему уравнений (7.3) и (7.6). Характерной особенностью данной задачи является наличие бесконечно удаленной точки $(x\to\infty)$, где естественно считать решение ограниченным.

Разумеется, на пересечении линий $x=0,\ \ y=0$ и $x=0, y=b$ должны находиться изоляторы, обеспечивающие возможность поддержания заданных потенциалов. Решение ищем методом разделения переменных (методом Фурье), который уже обсуждался, поэтому приводим только схему.

$$u(x,y)=\varphi(x)\cdot f(y)\Rightarrow \frac{\varphi''}{\varphi}=-\frac{f''}{f}=\lambda^2\Rightarrow f''+\lambda^2 f=0;\varphi''-\lambda^2\varphi=0;$$

$$f=A\cos\lambda y+B\sin\lambda y;\quad \varphi=Ke^{-\lambda x}+Le^{\lambda x},$$

где A,B,K,L – пока произвольные постоянные.

Знак минус перед равными дробями, который, конечно, может быть отнесен к любой дроби, выбран с тем, чтобы зависимость от y давалась тригонометрическими функциями. Подставляя найденные функции f в граничные условия при $y=0$ и $y=b$, находим, что $A=0,\quad \sin\lambda b=0,$ т.е. что собственные числа и собственные функции таковы

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{b},\quad f_n(y)=\sin\frac{\pi ny}{b};\quad n=1,2,3,...$$

Значение $n=0$ отбрасывается, так как при этом $f_0=A_0+B_0y$ и условия $f_0(0)=f_0(b)=0$ дают $A_0=B_0=0$, т.е. $f_0(y)=0$. Из ограниченности искомого решения на бесконечности и формулы для φ вытекает, что $L=0$, поэтому базовые функции задачи (они же – функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа и почти всем граничным условиям) имеют вид

$$u_n(x,y)=C_n\sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-\frac{\pi nx}{b}},\quad n=1,2,3,...$$

Здесь C_n произвольные пока числа. Составим ряд

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi ny}{b}e^{-\frac{\pi nx}{b}},0<y<b.$$

Предположим, что составленный ряд сходится равномерно, а также равномерно сходятся ряды, составленные из вторых частных производных членов этого ряда. Тогда

$$\lim_{x\to0}u(x,y)=\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi ny}{b}e^{-\frac{\pi nx}{b}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi ny}{b}\lim_{x\to0}e^{-\frac{\pi nx}{b}}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi ny}{b}=V$$

Из последнего равенства находим

$$C_n=\frac{2}{b}\int_0^b V\sin\frac{\pi ny}{b}dy=\frac{2V}{\pi n}\left(1-\cos\pi n\right)=\begin{cases}0, & n=2k;\\ \dfrac{4V}{\pi n}, & n=2k-1.\end{cases}$$

Таким образом, решение рассматриваемой краевой задачи представляет собой ряд

$$u(x,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi y}{b}\cdot e^{-\frac{(2k-1)\pi x}{b}}.$$

Вопросы для самопроверки

1. К какому типу уравнений относится уравнение Лапласа?
2. Какое уравнение называется уравнением Лапласа?
3. Какое уравнение называется уравнением Пуассона?
4. Какие физические поля описываются уравнениями Лапласа и Пуассона?
5. Что называется задачей Дирихле?
6. Что называется задачей Неймана?
7. Как записать краевую задачу, которая служит математической моделью распределения электрического потенциала в полубесконечном стержне?

Раздел 8. Электрические колебания в длинных линиях

При изучении данного раздела вам необходимо:
- Рассмотреть и освоить следующие темы:

8.1. Общие положения
8.2. Вывод телеграфного уравнения
8.3. Частные случаи телеграфного уравнения. Установившиеся процессы
8.4. Линия без потерь
8.5. Линия без искажения
8.6. Линия конечной длины

- Ответить на вопросы самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №8.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №8 текущего контроля.

8.1. Общие положения

С электрическими колебаниями в проводах мы сталкиваемся повсеместно. Суть принципа действия проводной телефонной связи такова. В электрическую цепь встроен преобразователь звуковых сигналов в электрические – микрофон. Звуковые сигналы вызывают колебания мембраны, воздействие которой на угольный порошок приводит к пульсирующему изменению сопротивления. По проводу бегут волны напряжения и тока, которые в дальнейшем вновь преобразуются в звуковые колебания.

Основные требования к передающей сигнал цепи: цепь, в идеале, не должна сильно ослаблять сигнал, и уж тем более его искажать.

Теоретически удовлетворить эти требования можно с помощью телеграфного уравнения, обсуждению которого и посвящен данный раздел курса.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и в теоретической электротехнике изучается расчет электрических цепей переменного тока, содержащих *сосредоточенные параметры*. Примером такого рода цепей служит колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных сопротивления, емкости и индуктивности. При этом считают, что ни катушка индуктивности, ни подводящие провода при прохождении тока не выделяют тепла. Полагают, что изменение магнитного потока индуцирует электродвижущую силу только в катушке индуктивности, а токи смещения возникают только между обкладками конденсатора. Все вышесказанное допустимо, если *линейные размеры всех элементов цепи малы* по сравнению *с длиной электромагнитной волны* в окружающем цепь диэлектрике.

Если протяженность цепи сравнима с длиной электромагнитной волны (например, телеграфные линии или линии передачи электроэнергии на практически используемых частотах), то *физическая модель* цепи *с сосредоточенными параметрами* становится неприемлема и используется *физическая модель длинных линий* или линий *с распределенными параметрами*. Наконец, если длина волны еще более уменьшается (соответственно растет передающая частота), то приходится для расчета цепей использовать систему уравнений Максвелла.

Будем рассматривать электрическую цепь в приближении «длинных линий».

8.2. Вывод телеграфного уравнения

Рассмотрим *однопроводную* линию (рис.14); пусть $i = i(x,t)$ – ток в точке, находящейся на расстоянии x от начала, в момент времени t, а $u = u(x,t)$ – напряжение между проводом и землей, измеренное в этой же точке в тот же момент времени; пусть $i(x+\Delta x,t)$ и $u(x+\Delta x,t)$ – ток и напряжение в точке, отстоящей от рассматриваемой на расстоянии Δx. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx, имеют место равенства $u(x+\Delta x,t) = u(x,t) + \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx$ и $i(x+\Delta x,t) = i(x,t) + \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x}dx$. Здесь использовано определение $\Delta x \equiv dx$, а под основной бесконечно малой понимается Δx.

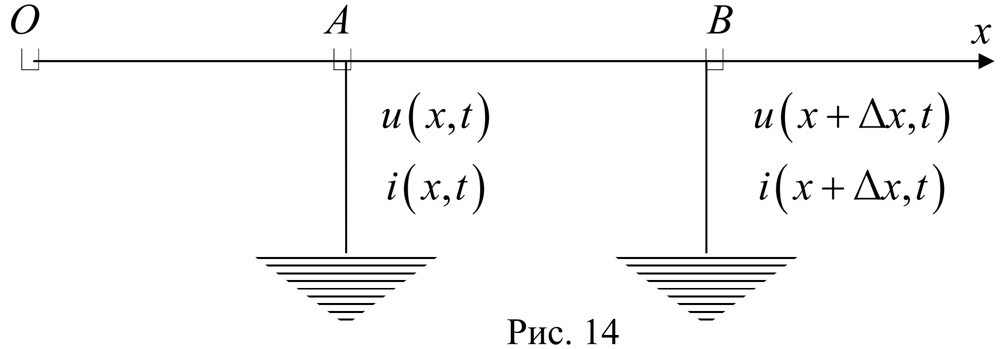


Рис. 14

Основные параметры цепи: сопротивление, индуктивность, емкость и проводимость утечки – равномерно *распределены* вдоль провода с плотностями распределения R, L, C и G соответственно. Плотность распределения есть такая величина, что сопротивление, индуктивность, емкость и проводимость утечки участка провода длиной Δx равно $R\cdot\Delta x$, $L\Delta x, C\Delta x$ и $G\Delta x$ соответственно.

Применяя *закон Ома* к участку цепи между точками A и B, имеем

$$u-(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)=Rdxi+Ldx\frac{\partial i}{\partial t},$$

т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}=0. \qquad (8.1)$$

По закону сохранения заряда ток, вошедший на рассматриваемый участок через точку A, равен сумме токов вышедшего с участка через точку B тока, пошедшего на зарядку «конденсатора», и тока утечки. Другими словами,

$$i=(i+\frac{\partial i}{\partial x}dx)+Cdx\frac{\partial u}{\partial t}+Gdxu,$$

откуда

$$\frac{\partial i}{\partial x} + Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \qquad (8.2)$$

Система (8.1), (8.2) представляет собой *систему уравнений с частными производными первого порядка* и носит название **системы *телеграфных* уравнений.**

Замечание. *Эти уравнения являются приближенными в рамках теории электромагнитного поля, поскольку они не учитывают электромагнитных колебаний в среде, окружающей провод.*

Следствием этой системы является уравнение с частными производными второго порядка, называемое *телеграфным уравнением*. Для получения телеграфного уравнения, определяющего, например, функцию u, продифференцируем первое уравнение по x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\frac{\partial i}{\partial x} + L\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = 0.$$

Изменим в последнем слагаемом порядок дифференцирования

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\frac{\partial i}{\partial x} + L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right) = 0.$$

В полученном уравнении заменим частную производную от тока по координате на ее значение из уравнения (8.2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\left(-Gu - C\frac{\partial u}{\partial t}\right) + L\frac{\partial}{\partial t}\left(-Gu - C\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC}u - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (8.3)$$

Уравнение (8.3) называется ***телеграфным уравнением***.

Дифференцируя второе уравнение (8.2) телеграфной системы и исключая из полученного $\frac{\partial u}{\partial x}$, взятую из первого уравнения, получим аналогичное (8.3) уравнение для тока

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC}i - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0.$$

Уравнения тождественны, поэтому дальше будем говорить только о (8.3).

Телеграфное уравнение (8.3) является гиперболическим дифференциальным уравнением. Оно имеет второй порядок по обеим независимым переменным, поэтому постановка краевых задач для него в общем случае потребует двух начальных и двух граничных условий. В большинстве случаев должно быть известно исходное состояние, то есть

$$u(x,0) = f(x), \quad i(x,0) = \varphi(x). \qquad (8.4)$$

Начальные условия (8.4) должны давать приборы. Перейдем в (8.2) к пределу при $t \to 0$. Если левая часть уравнения непрерывна, то получаем равенство

$$\lim_{t\to 0}(\frac{\partial i}{\partial x}+Gu+C\frac{\partial u}{\partial t})=\frac{\partial i(x,0)}{\partial x}+Gu(x,0)+C\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Откуда получаем второе начальное условие для (8.3)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{G}{C}f(x)-\frac{1}{C}\varphi'(x). \qquad (8.5)$$

Аналогично

$$\left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{R}{L}\varphi(x)-\frac{1}{L}f'(x). \qquad (8.6)$$

Граничные условия могут быть самые разные.

На левом конце линии расположен источник напряжения, на правом – происходит короткое замыкание, тогда $u\big|_{x=0}=E\sin\omega t$ (в частности, $u\big|_{x=0}=E$),

$$u\big|_{x=l}=0.$$

Если на правом конце линии – электроизоляция, то $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$. Часто встречается случай, когда на конце имеется приемник энергии с сопротивлением R_l и индуктивностью L_l (рис. 15). Тогда, рассуждая так же, как при выводе уравнения (8.1), получим

$$u(l,t)=R_l i(l,t)+L_l\frac{\partial i(l,t)}{\partial t}.$$

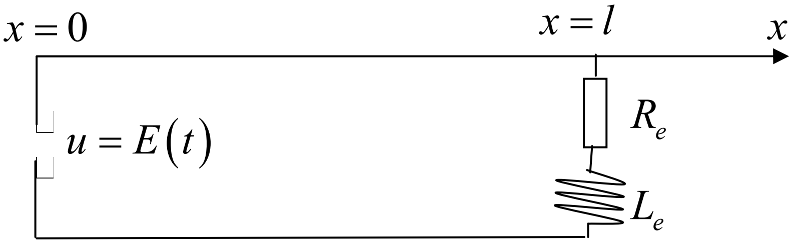


Рис. 15

8.3. Частные случаи телеграфного уравнения. Установившиеся процессы

Процесс со временем становится установившимся, когда внешние факторы, действующие на рассматриваемую систему (в данном случае, электрическая цепь) либо постоянны, либо являются синусоидальными величинами. Рассмотрим первый случай и будем считать u и i не зависящими от времени: $u=u(x), i=i(x)$.

В этом случае телеграфное уравнение (8.3) имеет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2}-RGu=0.$$

Общее решение этого обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$u(x)=Me^{bx}+Ne^{-bx}, \qquad (8.7)$$

где $b=\sqrt{RG}$, а M и N – произвольные постоянные. Найдем эти постоянные при условии, что на левом конце цепи действует источник постоянной ЭДС, равной E, а на правом – либо заземление (в случае *однопроводной* линии), либо короткое замыкание (в случае линии *двухпроводной*). В этом случае граничные условия таковы

$$u(0) = E, \quad u(l) = 0.$$

Подставляя (8.7) в граничные условия, приходим к системе алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} M + N &= E \\ e^{bl}M + e^{-bl}N &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Решая систему, получаем

$$M = -\frac{E}{e^{2bl} - 1} = -\frac{Ee^{-bl}}{e^{bl} - e^{-bl}}, \quad N = \frac{Ee^{bl}}{e^{bl} - e^{-bl}},$$

и, подставляя в формулу (8.7), получим

$$u(x) = E\frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}} = E\frac{\text{sh}b(l-x)}{\text{sh}bl}. \tag{8.8}$$

Здесь использовано определение гиперболических функций:

$$\text{sh}\alpha = \frac{\text{e}^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}, \quad \text{ch}\alpha = \frac{\text{e}^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

Отметим случай практического применения полученной формулы. Пусть где-то произошел пробой (или короткое замыкание). Замеряем в произвольной точке $x = x^*$ напряжение $u(x^*)$ и получаем согласно (8.8) уравнение

$$u(x^*) = E\frac{\text{sh}b(l - x^*)}{\text{sh}bl},$$

в которое входит одна неизвестная величина l – расстояние до места пробоя. Решая это уравнение находим место, где произошел пробой.

8.4. Линия без потерь

Если сопротивление провода мало и он хорошо изолирован, то естественно считать, что

$$R = G = 0.$$

Уравнение (8.3) при этом условии переходит в обычное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8.9}$$

подробно рассмотренное в разделе 5.

Общее решение его имеет вид $u(x,t) = F(x - at) + G(x + at)$ и представляет собой результат наложения двух волн – прямой $F(x - at)$ и обратной $G(x + at)$, распространяющихся вправо и влево со скоростью $a = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Произведенные измерения величин L и C для воздушных линий показали, что скорость распространения волн в этих линиях практически совпадает со скоростью света в воздухе. Это в свое время явилось убедительным доказательством электромагнитной природы света.

Рассмотрим линию бесконечной протяженности. Тогда (8.9) следует дополнить только начальными условиями. Они получаются из (8.4) и (8.5)

$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{C}\varphi'(x).$$

Воспользовавшись формулой Даламбера из раздела 5, сразу получаем напряжение

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}-\frac{1}{2aC}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi'(x)dx.$$

Вычисляя интеграл и учитывая, что $aC=\frac{C}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\frac{C}{L}}$, получаем

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\varphi(x-at)-\varphi(x+at)}{2}. \tag{8.10}$$

Для тока получим аналогичное выражение

$$i(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{f(x-at)-f(x+at)}{2}. \tag{8.11}$$

Формулы (8.10) и (8.11), каждая из которых представляет собой сумму прямой и обратной волны, полностью описывают колебания тока и напряжения в нашей цепи. Посмотрим, как изменяются ток и напряжение, например, в прямой волне.

$$u_{np}(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x-at)+\sqrt{\frac{L}{C}}\varphi(x-at)\right),$$

$$i_{np}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-at)+\sqrt{\frac{C}{L}}f(x-at)\right).$$

Вынося, например, в первой формуле $\sqrt{\frac{L}{C}}$ за скобку, получим

$$u_{np}(x,t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\varphi(x-at)+\sqrt{\frac{C}{L}}f(x-at)\right).$$

Сравнивая ток и напряжение в прямой волне видим, что отношение $\frac{u_{np}(x,t)}{i_{np}(x,t)}=\sqrt{\frac{L}{C}}$, есть величина постоянная. Она имеет размерность сопротивления и носит название *волнового сопротивления линии*. Возникновение волн в линиях на практике очень часто связано с атмосферными разрядами. Если на некотором участке линии внезапно возникает индуцированный заряд, то вдоль линии начинают распространяться волны напряжения и тока в соответствии с формулами (8.10) и (8.11). Так как начальный ток равен нулю, то $\varphi(x)=0$.

Функция $f(x)$ будет отлична от нуля только на том участке, на котором возник индуцированный заряд.

Из полученного решения (8.10) видно, что линия без потерь идеальна для осуществления телефонной связи. Ваш голос без искажений и не ослабевая доходит до того, кому он предназначен.

8.5. Линия без искажений

Линией без искажения называется линия, параметры которой связаны соотношением

$$RC = LG \Leftrightarrow \frac{R}{L} = \frac{G}{C}. \tag{8.12}$$

Покажем, что в такой линии волны напряжения и тока распространяются таким же образом, как и в линии без потерь, но с той разницей, что амплитуда волны не сохраняет своей величины, а монотонно убывает со временем.

Рассмотрим телеграфное уравнение (8.3) и введем в рассмотрение новую неизвестную функцию $v(x,t)$ по формуле

$$u(x,t) = e^{-\frac{R}{L}t} v(x,t). \tag{8.13}$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-\frac{R}{L}t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = e^{-\frac{R}{L}t}\left(-\frac{R}{L}v + \frac{\partial v}{\partial t}\right), \tag{8.14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{R}{L}t}\left(-\frac{R}{L}v + \frac{\partial v}{\partial t}\right)\right) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{R^2}{L^2}v - \frac{2R}{L}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right).$$

После подстановки этих формул в (8.3), сокращения полученного на общий множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$ и группировки слагаемых получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(-\frac{2R}{L} + \frac{RC+LG}{LC}\right)\frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{R}{L}\frac{RC+LG}{LC} + \frac{RG}{LC}\right)v - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

На основании (8.12) заключаем, что выражения в скобках равны нулю, что приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad a^2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Как всегда в таких задачах следует считать ток и напряжение в начальный момент известными:

$$u(x,0) = f(x), \quad i(x,0) = \varphi(x).$$

Отсюда и из формулы (8.13) сразу получаем

$$v(x,0) = u(x,0) = f(x).$$

Из формулы (8.14), записанной для случая $t = 0$, следует

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + \frac{R}{L}v(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + \frac{R}{L}f(x).$$

Подставляя сюда значение $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}$ из равенства (8.5), получаем второе начальное условие для новой искомой функции $v(x,t)$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=\frac{R}{L}f(x)-\frac{G}{C}f(x)-\frac{1}{C}\varphi'(x)=-\frac{1}{C}\varphi'(x).$$

Сразу замечаем, что уравнение и начальные условия для функции $v(x,t)$ такие же, какими они были при отыскании напряжения в предыдущем разделе в случае линии без потерь. Следовательно, $v(x,t)$ дается формулой (8.10), а функция $u(x,t)$ равна

$$u(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\varphi(x-at)-\varphi(x+at)}{2}\right].$$

Проделав аналогичные преобразования изменение электрического тока в рассматриваемой нами цепи

$$i(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{f(x-at)-f(x+at)}{2}\right].$$

Таким образом, в линии без искажений, так же как и в линии без потерь, имеет место постоянное отношение напряжения к току равное величине $\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (*волновое сопротивление)*. Волны напряжения и тока распространяются в обоих направлениях от места начального возмущения, но с существенной разницей по сравнению с линией без потерь. Эта разница состоит в том, что в рассматриваемом случае линии без искажений $R\neq 0$ и $G\neq 0$, и следовательно, имеет место рассеяние энергии (в частности, за счет выделения джоулева тепла). Вследствие рассеяния энергии амплитуда прямой и обратной волн со временем затухает, причем затухание происходит достаточно быстро – по показательному закону (множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$).

Ослабление сигнала линией без искажений на практике компенсируется применением промежуточных усилителей.

Линии, для которых условие (8.12) нарушается порождают так называемую дисперсию волн, состоящую в том, что фазовая скорость каждой гармоники зависит от частоты. Это приводит к тому, что отдельные гармонические составляющие сигнала смещаются друг относительно друга, вызывая его существенное искажение. Такие линии непригодны для использования в антеннах, телефоне, телеграфе.

8.6. Линии конечной длины

Наиболее часто встречающиеся граничные условия в линиях конечной длины описывают ситуацию, когда на одном конце линии ($x=0$) действует источник электродвижущей силы, в общем случае переменной во времени, а другой конец замкнут (заземлен) или изолирован. Тогда граничные условия имеют вид (в случае замкнутого правого конца):

$$u(0,t)=E,\;\; u(l,t)=0,$$

или (в случае изолированного правого конца):

$$u(0,t)=E,\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0.$$

Встречаются ситуации, в которых для получения граничного условия на конце линии приходится записывать закон сохранения заряда или закон Ома. Например, если на конце двухпроводной линии включен приемник энергии с сопротивлением R и индуктивностью L, то получим граничное условие вида

$$u(l,t)=Ri(l,t)+L\frac{\partial i(l,t)}{\partial x}.$$

Пусть однопроводная линия длины l, свободная от искажений $\left(RC=LG\right)$, заряжена до потенциала E (по отношению к земле). Один конец линии $(x=l)$ изолирован, а другой $(x=0)$ в начальный момент заземляется. Найдем распределение потенциала вдоль линии.

Пусть искомое распределение потенциала описывается функцией $u(x,t)$. Составим начальные условия для этой функции. Так как $u(x,0)=E, i(x,0)=0$, то согласно (8.4) и (8.5) найдем $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=-\dfrac{G}{C}E$. Введем в рассмотрение новую функцию $v(x,t)$ по формуле

$$v(x,t)=e^{\frac{R}{L}t}u(x,t). \tag{8.15}$$

Подставляя сюда $t=0$, получаем $v(x,0)=E$. Дифференцируя (8.15), получим

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=e^{\frac{R}{L}t}\frac{R}{L}u(x,t)+e^{\frac{R}{L}t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Подставляя $t=0$ и пользуясь выше полученным значением производной $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}$, в силу условия $RC=LG$ имеем

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=\frac{R}{L}E-\frac{G}{C}E=0.$$

Таким образом, приходим к следующей краевой задаче для определения колебаний напряжения. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad a=\frac{1}{\sqrt{LC}},$$

с начальными условиями

$$v(x,0)=E,\quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=0$$

и граничными условиями

$$v(0,t)=0,\quad \frac{\partial v(l,t)}{\partial x}=0.$$

Применяя метод разделения переменных, придем к ряду по собственным функциям

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\frac{(2k+1)\pi a t}{2l} + b_k \sin\frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \right] \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Применяя формулы (5.12), получаем

$$a_k = \frac{2E}{l}\int_0^l \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx = \frac{4E}{\pi(2k+1)}; \quad b_k = 0.$$

Переходя к старой функции, окончательно получим

$$u(x,t) = \frac{4E}{\pi} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \cdot \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{2k+1}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие основные требования к передающей сигнал электрической цепи?
2. Что такое длинная линия?
3. Какие физические законы используются при выводе системы телеграфных уравнений?
4. Каков тип телеграфного уравнения (ТУ)?
5. Сколько граничных и начальных условий требует постановка краевых задач для ТУ?
6. Как называются частные случаи ТУ?
7. Чем ТУ для установившихся процессов отличается от остальных?
8. Какой вид имеют типичные начальные условия для ТУ?
9. Какой вид имеют наиболее типичные граничные условия для ТУ?

Раздел 9. Численные методы. Метод сеток

При изучении данного раздела вам необходимо:

- Рассмотреть и освоить следующие темы:

9.1. Сетки и сеточные функции

9.2. Аппроксимация производных

9.3. Задача Дирихле в прямоугольнике

- Ответить на вопросы для самопроверки, приведенные в конце раздела.
- Разобрать примеры и выполнить задания практического занятия №9.
- Ответить на задания тренировочного и контрольного теста №9 текущего контроля.

Рассмотренные выше методы решения краевых задач математической физики – метод характеристик (Даламбера) и метод разделения переменных (Фурье) – относятся к так называемым аналитическим методам, когда решение получается в виде формулы, в которую могут входить ряды и интегралы. Многие краевые задачи математической физики невозможно решить аналитическими методами. Необходимо применять численные методы, а следовательно, получать приближенное решение краевых задач.

Универсальным методом, применимым для широкого класса краевых задач математической физики, является *метод сеток*. Суть метода такова. Область непрерывного изменения независимых переменных (например, x и y) заменяется *сеткой* – конечным множеством точек (*узлов сетки*) (рис.16); искомая непрерывная функция заменяется *сеточной функцией* – функцией, *определенной в узлах сетки*; производные, входящие в дифференциальные уравнения и краевые условия задачи, заменяются *разностными отношениями*. После такой замены происходит редукция краевой задачи для уравнений с частными производными к системе алгебраических уравнений линейных или нелинейных.

9.1. Сетки и сеточные функции

Пусть искомая функция двух независимых переменных $u = u(x, y)$ задана в плоской области D, ограниченной кривой γ с уравнением $F(x, y) = 0$, где $x \in [0, a], y \in [0, b]$. Разобьем эти отрезки на большое число частей M и N, соответственно. Введем обозначения $h_1 = \dfrac{a}{M}$, $h_2 = \dfrac{b}{N}$. Множество точек прямоугольника $[0, a] \times [0, b]$ с координатами

$$x_i = ih_1,\ \ i = 0,1,2,...,\ M,\ \ \ y_j = jh_2,\ \ j = 0,1,2,...,N \qquad (9.1)$$

называется ***сеткой***, а сами точки – ***узлами сетки***. Пусть внутренние точки области D характеризуются неравенством $F(x, y) < 0$. Тогда те узлы (i, j), для которых $F(x_i, y_j) < 0$ называются ***внутренними***, а узлы $(0, j)$; (M, j) и при любом $i = 1,2,...,(M-1)$ все узлы с натуральными координатами (i, N_i) для которых $F(x_i, y_{N_i}) \ge 0$, а $F(x_i, y_{N_{i-1}}) < 0$, – ***верхними граничными узлами***. ***Нижние граничные узлы*** определяются как множество таких точек (x_i, y_{n_i}), для которых $F(x_i, y_{n_i}) \ge 0$, а $F(x_i, y_{n_i+1}) < 0$. На рис. 16 внутренние узлы изображены крестиками, а граничные – точками. Функция u, рассматриваемая в узлах построенной сетки,

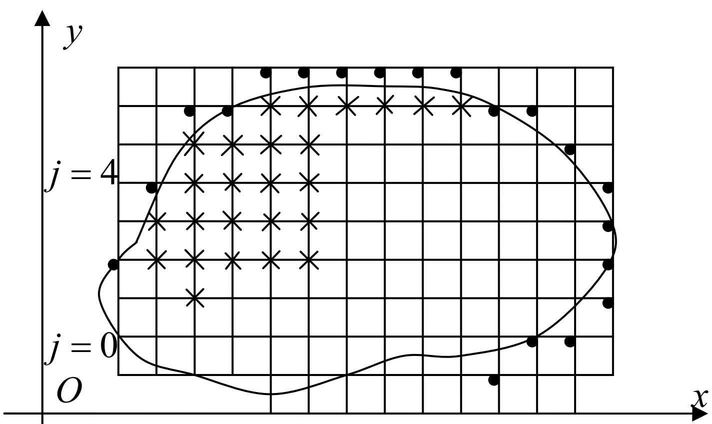


Рис. 16

$$u(x_i, y_j) = u_{ij},\ \ i = 0,1,2,...,\ \ j = 0,1,2,.... \qquad (9.2)$$

называется ***сеточной функцией***. Множество внутренних узлов будем обозначать $\bar{D}$, а множество граничных узлов – $\bar{\Gamma}$. Сетка, для которой $h_1 \neq h_2$ называется **неравномерной сеткой**. На практике неравномерные сетки используют только в случаях, когда к этому есть специальные основания. Например, когда по одной из независимых переменных функция изменяется гораздо быстрее, чем по другой. Иначе стараются использовать ***сетки равномерные***, когда $h_1 = h_2 = h$, что мы и будем делать в дальнейшем.

9.2. Аппроксимация производных

По определению производных имеют место равенства

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h};$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x-h,y)}{\partial x}}{h}. \tag{9.3}$$

Значение производной всегда можно заменить

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}, \tag{9.4}$$

допуская при этом, быть может, некоторую погрешность, которая тем меньше, чем меньше h. Дробь в правой части последнего равенства называется *разностным отношением.* Аналогично для второй производной

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x-h,y)}{\partial x}}{h}. \tag{9.5}$$

Разностные отношения, стоящие под знаком предела в формулах (9.3) и в правых частях формул (9.4) и (9.5) очевидно отличаются друг от друга. Первое в (9.4) называется *правым разностным отношением*, второе в (9.5) – *левым разностным отношением*.

Разностностное отношение $\dfrac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h}$ называется *центральным* или ***центральной разностной производной***. Аналогично, правая часть (9.4) называется ***правой разностной производной***, а правая часть в (9.5) – ***левой разностной производной***.

С точки зрения определений (9.3) не имеет значения, какое разностное отношение стоит под знаком предела, так как во всех случаях $h \to 0$. С другой стороны, нетрудно, разлагая функции $u(x \pm h, y)$ в ряд Тейлора по степеням h, показать, что правое и левое разностные отношения аппроксимируют первую производную с первым порядком точности по h, а центральное разностное отношение – со вторым. Это означает, что погрешность равенства (9.4) есть $O(h)$. Если аппроксимировать первую частную производную согласно равенству

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h}, \tag{9.6}$$

то погрешность будет порядка $O(h^2)$. Таким образом, если *шаг сетки* $h = 0{,}1$, то, аппроксимируя производную по (9.4), совершаем погрешность порядка числа 0,1, а по формуле (9.6) погрешность гораздо меньше, а именно – порядка 0.01. Заменим первые производные в числителе разностными отношениями по формуле (9.4)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x-h,y)}{\partial x} = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} -$$

$$-\frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} = \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h}.$$

Подставляя этот результат в формулу (9.5), имеем аппроксимацию второй производной

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}. \tag{9.7}$$

Применяя формулу Тейлора как выше, нетрудно установить, что порядок аппроксимации (9.7) равен $O(h^2)$.

Аналогично получается аппроксимация второй частной производной по переменной y:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}. \tag{9.8}$$

В заключение запишем аппроксимационные формулы (9.4), (9.7) и (9.8) на сетке (9.1) с использованием обозначений (9.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} &= \frac{u(ih+h,jh)-u(ih,jh)}{h} = \frac{u_{i+1\,j}-u_{i\,j}}{h}, \\ \frac{\partial^2 u(x_i,y_i)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(ih,jh)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1\,j}-2u_{i\,j}+u_{i-1\,j}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u(x_i,y_i)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u(ih,jh)}{\partial y^2} = \frac{u_{i\,j+1}-2u_{i\,j}+u_{i\,j-1}}{h^2} \end{aligned} \tag{9.9}$$

9.3. Задача Дирихле в прямоугольнике

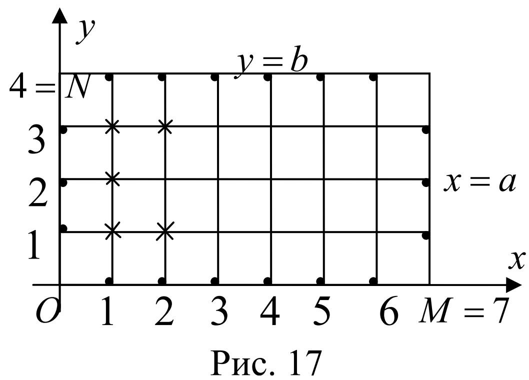


Рис. 17

Пусть $f(x,y)$ означает заданную температуру границ плоской прямоугольной пластинки ширины a и высоты b (рис. 17). Тогда определение температурного поля пластинки $u(x,y)$, согласованного с заданной температурой ее границ сводится к решению задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y)\big|_\gamma = f(x,y), \tag{9.10}$$

где γ есть граница, которая в нашем случае состоит из четырех отрезков прямых с уравнениями: $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$ (рис.17). Для решения задачи (9.10) строим сетку $x_i = ih,\ y_j = jh,\ i=0,1,...,M;\ j=0,1,...,N.$ В нашем примере (рис.17) $M=7,\ N=4$. Используя аппроксимационные формулы (9.9), после элементарных преобразований получим

$$u_{i\,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1\,j} + u_{i+1\,j} + u_{i\,j+1} + u_{i\,j-1}\right). \tag{9.11}$$

Согласно формуле (9.11) значение искомой функции в каждом внутреннем узле является средним арифметическим четырех соседних узлов. Заметим, что в этой формуле неизвестных столько, сколько внутренних узлов сетки. В общем случае (9.11) есть система $(M-1)\cdot(N-1)$ уравнений с таким же количеством неизвестных. В нашем примере это система 18 уравнений с 18 неизвестными. Существуют эффективные итерационные методы решения систем с большим количеством неизвестных. Прежде всего, заметим, что в (9.11) i меняется от **1** до $\boldsymbol{M}-1$, а j – от **1** до $\boldsymbol{N}-1$. Формула самого простого итерационного метода решения (*метод простой итерации*) выглядит так

$$u^{\nu+1}{}_{i\,j} = \frac{1}{4}\left(u^{\nu}{}_{i-1\,j} + u^{\nu}{}_{i+1\,j} + u^{\nu}{}_{i\,j+1} + u^{\nu}{}_{i\,j-1}\right), \tag{9.12}$$

где верхний индекс ν принимает значения от $\nu=0$ и до того значения $\nu=N$, при котором вычисления будут остановлены. Способы выхода из счета указаны ниже. Для запуска счета во всех внутренних точках задаем *произвольное* начальное приближение: $u_{i\,j}{}^{0}$. Например, $u_{i\,j}{}^{0}=0$ для всех $i=1,\ldots,M-1$; $j=1,\ldots,N-1$. Выпишем несколько уравнений системы

$$\left.\begin{aligned}
&u^{1}{}_{11} = \frac{1}{4}\left(u^{0}{}_{01} + u_{21}{}^{0} + u_{12}{}^{0} + u_{10}{}^{0}\right)\\
&u^{1}{}_{12} = \frac{1}{4}\left(u_{02}{}^{0} + u_{22}{}^{0} + u_{13}{}^{0} + u_{11}{}^{0}\right)\\
&u_{13}{}^{1} = \frac{1}{4}\left(u_{03}{}^{0} + u_{23}{}^{0} + u_{14}{}^{0} + u_{12}{}^{0}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{63}{}^{1} = \frac{1}{4}\left(u_{53}{}^{0} + u_{73}{}^{0} + u_{64}{}^{0} + u_{62}{}^{0}\right)
\end{aligned}\right\}. \tag{9.13}$$

Полученные 18 уравнений решаются в произвольном порядке, например, по столбцам так, как они выписаны, столбец за столбцом (или по строкам). Всякий раз, когда справа встречается слагаемое, один из нижних индексов которого выходит на границу (в нашем примере – когда левый индекс равен 0 или $M=7$, а верхний индекс равен 0 или $N=4$), соответствующее значение искомой функции известно из граничного условия. А именно, при любом номере итераций ν имеют место равенства

$$u^{\nu}{}_{0j} = f(0, jh) = f_{0j}, \quad u^{\nu}{}_{Mj} = f(a, jh) = f_{Mj},$$
$$u^{\nu}{}_{i0} = f(ih, 0) = f_{i0}, \quad u^{\nu}{}_{iN} = f(ih, b) = f_{iN},$$
где $f_{ij} = f(x_i, y_j)$.

После того, как мы решаем $(M-1)\cdot(N-1)$ уравнений (в примере 18 уравнений), получаем несколько исправленные по сравнению с начальным приближением значения $u^{1}{}_{ij}$ и процесс повторяется. Только теперь в правых частях формул (9.13) будут стоять числа $u^{1}{}_{ij}$. Процесс повторяется раз за разом. Вообще, здесь могут быть три варианта: 1) начиная с некоторого номера итераций ν_0 числа $u^{\nu_0}{}_{ij}$ и $u^{\nu_0+1}{}_{ij}$ при любых i и j в некотором смысле перестают отличаться, и тогда говорят, что используемый *итерационный процесс сходится*; 2) числа, получаемые раз за разом, начиная с некоторого итерационного номера, быстро возрастают по абсолютной величине вплоть до аварийной остановки счета; 3) не происходит ни первого, ни второго. Во втором случае говорят, что *итерационный процесс неустойчив,* в третьем – фиксируют отсутствие сходимости метода. Два последних случая означают, что выбранный метод вычислений не пригоден для данной задачи и следует искать другой. *Выбор метода вычислений* представляет собой одну *из важнейших задач* современной математической физики, которая не может быть решена без глубокого понимания существа *физических процессов*, лежащих в основе той или иной краевой задачи.

Одна из задач исследователя – поиск устойчивых итерационных процессов. В нашем случае метод счета устойчив и сходится, причем достаточно быстро. Разумеется, определенное влияние на скорость сходимости оказывает выбор начального приближения. На практике сходимость того или иного метода устанавливается следующим образом. На каждой итерации считается так или иначе определенная *норма вектора* $u^{\nu}{}_{ij}$. Норма вектора обозначается так: норма $= \left\| u^{\nu}{}_{ij} \right\|$ и определяется по-разному. В простейшем случае это просто сумма абсолютных величин компонентов: $\left\| u^{\nu}{}_{ij} \right\| = \sum\limits_{i=1}^{i=M-1} \sum\limits_{j=1}^{j=N-1} \left| u^{\nu}{}_{ij} \right|$. Итак, задаются точностью ε и останавливают счет как только выполняется неравенство
$$\left| \left\| u^{\nu+1}{}_{ij} \right\| - \left\| u^{\nu}{}_{ij} \right\| \right| < \varepsilon.$$

Другой способ выхода из счета состоит в том, что после каждой итерации находится так называемая *невязка*. Для нахождения невязки в каждой точке сетки вычисляется величина
$$d_{ij} = u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} - 4u_{ij}.$$

Счет останавливается, когда $\sum\limits_{i=1}^{i=M} \sum\limits_{j=1}^{j=N} \left| d_{ij} \right| < \varepsilon$

Метод Зейделя. При решении системы (9.12) с помощью метода Зейделя не нужно при каждом шаге счета хранить два массива чисел $u^{\nu}{}_{ij}$ и $u^{\nu+1}{}_{ij}$, то есть расходовать память компьютера. Метод Зейделя приводит к улучшению сходимости. Суть метода в том, чтобы использовать уже исправленные в процессе счета значения функции сразу, как только они получены. Формула метода Зейделя такова

$$u^{\nu+1}_{i\,j} = \frac{1}{4}\left(u^{\nu+1}_{i-1\,j} + u^{\nu}_{i+1\,j} + u^{\nu}_{i\,j+1} + u^{\nu+1}_{i\,j-1}\right). \qquad (9.14)$$

Для того, чтобы идея метода работала, следует применять специальный способ сканирования, в котором индексы составляют монотонную последовательность. Для формулы (9.14) следует просчитывать точки сетки снизу вверх и слева направо.

Вопросы для самопроверки

1. Какой метод можно применить для приближенного решения многих краевых задач математической физики?
2. Что называется сеткой?
3. Что называется узлами сетки?
4. Как построить сеточную функцию?
5. В чем отличие равномерной и неравномерной сетки?
6. Что называется разностным отношением?
7. Чем отличаются правое разностное отношение, левое разностное отношение и центральное?
8. Что называется разностной производной?
9. Какую погрешность имеют правая и левая разностные производные?
10. Какую погрешность имеет центральная разностная производная?
11. Как выглядит формула метода простой итерации для решения задачи Дирихле в прямоугольнике?
12. Когда говорят, что итерационный процесс сходится?
13. Когда говорят, что итерационный процесс неустойчив и когда фиксируют отсутствие сходимости метода?
14. В чем суть метода Зейделя?
15. Какие преимущества у метода Зейделя в сравнение с методом простой итерации?

Заключение

Методы математической физики все шире используются в технических науках и различных областях производственной деятельности. Математическая физика позволяет построить математические модели самых трудных научных и производственных процессов и исследовать их математическими методами. При помощи методов математической физики можно не только решать возникающие проблемы, но и предсказать поведение технических систем в дальнейшем. В задачу дисциплины входит вооружение будущего специалиста комплексом методов, необходимых для участия в научно-исследовательской и творческой работе.

Использование современных средств вычислительной техники и численных методов математической физики позволяет проводить изучение влияния большого количества самых разнообразных факторов и условий на состояние исследуемого процесса.

Для дальнейшей самостоятельной работы по изучению и применению методов математической физики можно рекомендовать их использование для выполнения курсовых работ и выпускной квалификационной работы, а также при решении производственных задач.

3.3. Глоссарий

Волновое уравнение одномерное – уравнение свободных колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Вторая краевая задача – краевая задача, в которой на границе области задана производная искомой функции по направлению нормали к границе.

Граничные условия – значения искомой функции u на границе области.

Дифференциальное уравнение с частными производными (ДУЧП) – уравнение, содержащее искомую функцию от нескольких аргументов, ее частные производные, а также сами аргументы.

Задача Дирихле – первая краевая задача для уравнения Пуассона или Лапласа.

Задача Коши – задача нахождения решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям.

Задача Неймана – вторая краевая задача для уравнения Пуассона или Лапласа.

Задача Штурма-Лиувилля – задача по определению условий (собственных чисел) существования ненулевых решений однородной граничной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и по отысканию этих решений (собственных функций).

Краевая задача – задача по нахождению решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым условиям.

Краевые условия – начальные и / или граничные условия.

Линейное уравнение с частными производными первого порядка –

$$A\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + B\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + C\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + Du(x,y,z) = f(x,y,z).$$

Начальные условия – условия, задающие искомую функцию в начальный момент времени в каждой точке области ее определения.

Общее решение ДУЧП – решение, зависящее от произвольных функций.

Оператор Лапласа – оператор Δ, действующий на функцию $u(x,y,z)$ следующим образом

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Первая краевая задача – краевая задача, в которой на границе области задана искомая функция.

Порядок ДУЧП – порядок старшей производной, входящей в данное уравнение.

Решение ДУЧП – функция, обращающая дифференциальное уравнение в тождество относительно независимых переменных.

Сетка в области задания функции – конечное множество точек рассматриваемой области.

Сеточная функция – искомая функция, рассматриваемая в узлах сетки.

Смешанная краевая задача – задача, в которой граница разбита на части так, что на одной части задается сама функция, на другой – ее производная, на третьей - линейная комбинация и т.д.

Собственные значения оператора Лапласа – числовые значения λ, для которых уравнение $\Delta u = \lambda u$ имеет ненулевые решения u.

Собственные функции оператора Лапласа – ненулевые решения u уравнения $\Delta u = \lambda u$.

Струна – физическая модель тела, продольные размеры которого много больше поперечных, и внутренние напряжения которого препятствуют только изменению его длины.

Телеграфное уравнение – уравнение, описывающее колебания электрического тока и напряжения в цепях, линейные размеры которых сравнимы с длиной волны соответствующего электромагнитного излучения.

Третья краевая задача – задача, в которой в граничных точках задается линейная комбинация искомой функции и ее нормальной производной.

Узлы сетки – точки сетки.

Уравнение Лапласа – однородное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, неоднородное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f$.

Уравнение Пуассона – неоднородное уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f$.

Уравнение теплопроводности и диффузии – уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

3.4. Методические указания к выполнению практических занятий

Целью практических занятий является закрепление и практическое использование знаний, полученных при изучении теоретического курса.

Тематика практических занятий и количество часов указаны в п. 2.6 для очно-заочной формы обучения или в п. 2.7 для заочной формы обучения.

Из каждого задания практического занятия студент должен решить одну задачу, номер которой совпадает с последней цифрой шифра студента.

Прежде чем решить задачи, следует внимательно разобрать решения типовых примеров по соответствующей теме.

Практическое занятие №1
Основные понятия и определения.
Общее решение уравнений с частными производными

Примеры

Пример 1. Найти общее решение уравнения с частными производными

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=f(y).$$

Решение. Интегрируя по y, получаем

$$u(x,y)=\int f(y)dy+g(x),$$

где $g(x)$ – произвольная функция.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=6y^2-2.$$

Решение. Интегрируя по y, получаем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=6\frac{y^3}{3}-2y+f(x).$$

Интегрируя полученное равенство по x, имеем

$$u(x,y)=2y^3\cdot x-2y\cdot x+\int f(x)dx+g(y).$$

Вводя обозначение $F(x)=\int f(x)dx,$ получаем общее решение

$$u(x,y)=2x\left(y^3-y\right)+F(x)+g(y),$$

здесь $F(x)$ и $g(y)$ - произвольные функции.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^3 u(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}=12x^3y^2z.$$

Решение. Трижды проинтегрируем в любой последовательности по независимым переменным $x,y,z.$ Имеем цепочку равенств после интегрирования по x и y:

$$\frac{\partial^3 u(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}=12x^3y^2z \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y\partial z}=12\cdot\frac{x^4}{4}\cdot y^2z+f(y,z)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}=3x^4\cdot\frac{y^3}{3}z+\int f(y,z)dy+g(x,z).$$

Интегрируя последнее равенство по z, находим

$$u(x,y,z)=x^4\cdot y^3\cdot\frac{z^2}{2}+\int\left(\int f(y,z)dy\right)dz+\int g(x,z)dz+r(x,y),$$

здесь f,g,r – произвольные функции своих аргументов. Первообразные от произвольных функций сами являются произвольными функциями. Вводя обозначения

$$F(y,z)=\int\left(\int f(y,z)dy\right)dz,\quad G(x,z)=\int g(x,z)dz,$$

получаем общее решение

$$u(x,y,z)=\frac{x^4\cdot y^3\cdot z^2}{2}+F(y,z)+G(x,z)+r(x,y).$$

Заметим, что общее решение дифференциального уравнения третьего порядка содержит три произвольные функции.

Задания на практическое занятие №1

Найти общее решение следующих уравнений с частными производными

1. $u_{xyz}(x,y,z)=3xy^2z$;
2. $u_{xyz}(x,y,z)=4xy^3z$;
3. $u_{xyz}(x,y,z)=3x^2yz$;
4. $u_{xyz}(x,y,z)=4xyz^3$;
5. $u_{xyz}(x,y,z)=9x^2y^2z$;
6. $u_{xyz}(x,y,z)=9xy^2z^2$;
7. $u_{xyy}(x,y)=6xy^2$;
8. $u_{xxy}(x,y)=6xy^2$;
9. $u_{xyy}(x,y)=4x^3y-1$;
10. $u_{xxy}(x,y)=5xy^4+2$.

Здесь действует обозначение, например,

$$u_{xyz}\equiv\frac{\partial^3 u(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}.$$

Практическое занятие №2
Решение задачи Коши для линейных уравнений первого порядка

Примеры

Пример 1. Рассмотрим уравнение $u_t+\frac{B}{A}u_x=0$, где A и B некоторые постоянные, отличные от нуля. Нетрудно заметить, что это уравнение переноса, в котором обозначим $v=\dfrac{B}{A}$. Пусть переменная t интерпретируется как время, а x – как расстояние. Тогда, решая уравнение, имеем:

$$\frac{dt}{A}=\frac{dx}{B}\Leftrightarrow d(Bt-Ax)=0\Leftrightarrow x-vt=C,$$

где C – произвольная постоянная.

Откуда – общее решение:

$$u(x,t)=F(x-vt).$$

График функции $f(x-a)$, где $a\geq 0$ получается из графика $f(x)$ со сдвигом вправо в направлении оси x на a единиц. В нашем случае $a=vt$ непрерывно изменяется во времени.

Таким образом, найденное нами решение является волной произвольной формы (F – произвольная функция), определяемой конкретным видом функции F, распространяющейся вправо, в направлении оси x со скоростью v. Эта волна представляет собой начальное возмущение $u(x,0)=F(x-v0)=F(x)$, которое перемещается в направлении оси x со скоростью v.

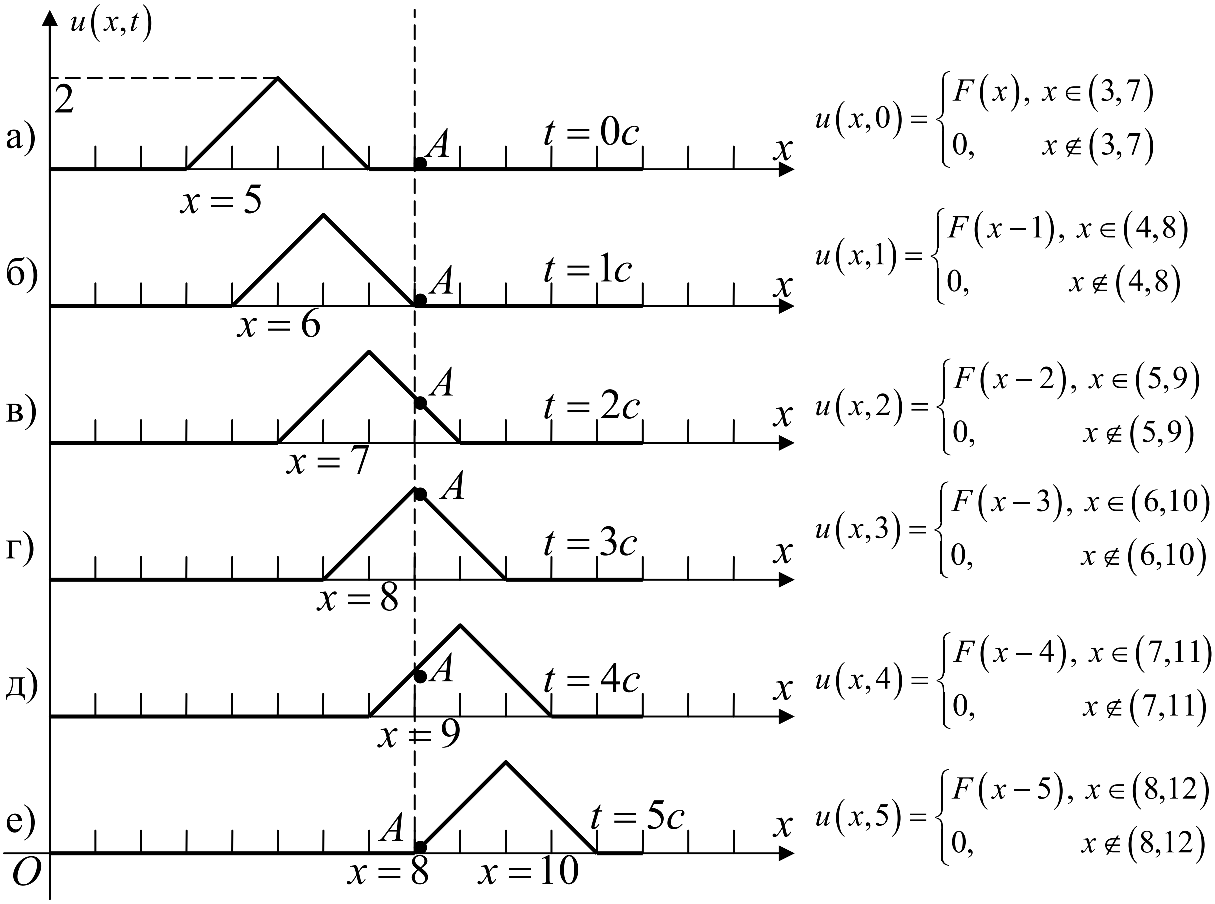


Рис. 18

Например, если в некоторый момент времени в результате подземного удара, вызванного землетрясением, на поверхности океана образовалась выпуклость, при которой его поверхность $u(x,t)$ приняла форму $u(x,0)=F(x)$, то это «возмущение» поверхности порождает волну цунами, перемещающуюся к берегу согласно уравнению $u(x,t) = F(x - vt)$.

Пусть начальное возмущение $u(x,0) = F(x)$ при $x \in (3,7)$ задано и имеет вид ломанной, изображенной на рис. 18, при котором точка $x = 5$ «поверхности моря» поднята на высоту $u(5,0) = 2$, а при $x \notin (3,7)$ $u(x,0) = 0$. Пусть скорость $v = 1$. Будем следить за точкой A поверхности, удаленной от начала координат на расстояние $x = 8$. Волна подъема, распространяющаяся направо со скоростью $v = 1$, достигнет рассматриваемой точки через 1 секунду (рис. 18,б) и поверхность в этой точке начнет подниматься. Еще через 1с. точка A достигнет уровня, изображенного на рис. 18,в. При $t = 3$с. подъем достигнет максимальной величины $u_{\max} = 2$ (точка A оказывается на гребне волны (рис. 18,г)), после чего уровень поверхности в этом месте начнет снижаться (на рис. 18,д изображено значение отклонения $u = 1$), и к моменту времени $t = 5$с. поверхность в рассматриваемой точке вернется в состояние покоя (рис. 18,е).

Нам знакома с такого рода волна. Дважды в сутки *приливная волна*, вызванная равнодействующей сил гравитационного притяжения со стороны Луны и центробежной силой вращения системы «Земля-Луна», пробегает под нами, поднимая нас на высоту $u_{\max} = 0{,}5$м и возвращая назад.

Пример 2. Дано: $xz_y - yz_x = 0;$ $z(0,y) = y^2$. Найти $z(x,y)$ – решение задачи Коши.

Решение. Уравнение линейное. Дифференциал искомой функции $z(x,y)$ не входит в характеристическую систему, поэтому имеем $\dfrac{dx}{(-y)} = \dfrac{dy}{x} \Leftrightarrow xdx + ydy = 0 \Leftrightarrow d\left(x^2 + y^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C_1$. Откуда общее решение $z(x,y) = F\left(x^2 + y^2\right)$. Подставляя сюда $x = 0$, имеем $z(0,y) = F\left(y^2\right)$. Согласно начальному условию $z(0,y) = y^2$. Приравнивая правые части последних равенств, имеем $F\left(y^2\right) = y^2$, то есть F не должно изменять значения аргумента. Решением нашей задачи Коши служит функция $z(x,y) = x^2 + y^2$.

Задания на практическое занятие №2

Найти решения задачи Коши для линейного уравнения первого порядка

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(0,y)=y^2;$

2. $(x+1)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(0,y)=y;$

3. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(1,y)=y;$

4. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-(y+1)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(x,0)=x^2;$

5. $(x+1)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(0,y)=y;$

6. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+1)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(x,0)=x^2;$

7. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-(y+2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(x,-1)=x;$

8. $(x+2)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(-1,y)=y;$

9. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(x,-1)=x^2;$

10. $(x+2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z(-1,y)=y^2.$

Практическое занятие №3
Приведение линейных уравнений с частными производными второго порядка к каноническому виду и их классификация

Примеры

Пример 1. Установить тип и привести уравнение к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Решение. Задано линейное уравнение, в котором $A=1,\ B=2,\ C=5$. Число $D=B^2-AC=4-5=-1<0$, следовательно, данное уравнение – эллиптического типа. Уравнения характеристик $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B\pm\sqrt{D}}{A}$ имеют вид $\dfrac{dy}{dx}=2\pm\sqrt{-1}=2\pm i$ или $\dfrac{dy}{dx}=2+i$ и $\dfrac{dy}{dx}=2-i$. Общими интегралами последних уравнений являются $g(x,y)=y-2x-ix=c$ и $g_1(x,y)=y-2x+ix=c_1$. Чтобы не иметь дело с комплексными переменными, введем новые переменные s и t по формулам $s=\dfrac{g(x,y)+g_1(x,y)}{2}=y-2x,\quad t=\dfrac{g(x,y)-g_1(x,y)}{2i}=x.$ Выражаем частные производные от функции $u(x,y)$ по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$u_x=u_s s_x+u_t t_x=u_s(-2)+u_t;\ \ u_y=u_s s_y+u_t t_y=u_s;$$

$$u_{xx}=(-2u_s+u_t)_x=-2(u_s)_x+(u_t)_x=$$

$$=-2(u_{ss}(-2)+u_{st})+(u_{ts}(-2)+u_{tt})=4u_{ss}-4u_{st}+u_{tt};$$

$$u_{xy}=\left(2u_s+u_t\right)_y=-2\left(u_s\right)_y+\left(u_t\right)_y=-2u_{ss}+u_{ts};$$
$$u_{yy}=\left(u_s\right)_y=u_{ss}.$$

Подставляя найденные значения вторых производных в исходное уравнение и приводя подобные слагаемые, получаем
$$4u_{ss}-4u_{st}+u_{tt}+4\left(-2u_{ss}+u_{ts}\right)+5u_{ss}=u_{ss}+u_{tt}=0.$$
Таким образом, каноническая форма исходного уравнения эллиптического типа
$$u_{ss}+u_{tt}=0.$$

Пример 2. Установить тип, привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения
$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0.$$

Решение. Задано линейное уравнение, в котором $A=x^2,\ B=xy,\ C=y^2$. $B^2-AC=x^2y^2-x^2y^2=0$, следовательно, данное уравнение – параболического типа. Уравнения характеристик $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}$ превращаются в одно уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B}{A}=\dfrac{y}{x}$. Это *обыкновенное дифференциальное уравнение* первого порядка с разделяющимися переменными. Его общим интегралом служит уравнение $s\left(x,y\right)\equiv\dfrac{y}{x}=C$, и значит, новые переменные s и t можно вводить по формулам $s=\dfrac{y}{x},t=y$. Вторая переменная в случае параболического уравнения *берется произвольно,* лишь бы выполнялось неравенство $s_xt_y-s_yt_s\neq 0$. Естественно взять ее наиболее простой. Выражаем частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:
$$u_x=u_ss_x+u_tt_x=u_s\left(-\frac{y}{x^2}\right);\ \ u_y=u_ss_y+u_tt_y=u_s\frac{1}{x}+u_t;$$
$$u_{xx}=\left(u_s\frac{-y}{x^2}\right)_x=u_s\left(\frac{-y}{x^2}\right)_x+(u_s)_x\frac{-y}{x^2}=$$
$$=\frac{2y}{x^3}u_s+\left(u_{ss}s_x+u_{st}t_x\right)\frac{-y}{x^2}=u_s\frac{2y}{x^3}+u_{ss}\frac{y^2}{x^4};$$
$$u_{yy}=\left(u_s\frac{1}{x}+u_t\right)_y=\frac{1}{x}\left(u_{ss}s_y+u_{st}t_y\right)+u_{ts}s_y+u_{tt}t_y=$$
$$=\frac{1}{x}\left(u_{ss}\frac{1}{x}+u_{st}\right)+u_{ts}\frac{1}{x}+u_{tt}=\frac{u_{ss}}{x^2}+\frac{2u_{st}}{x}+u_{tt};$$
$$u_{xy}=\left(u_s\frac{-y}{x^2}\right)_y=-u_{ss}\frac{y}{x^3}-u_{st}\frac{y}{x^2}-\frac{u_s}{x^2}.$$

Найдем зависимость: $x = x(s,t) = \dfrac{t}{s}; y = y(s,t) = t.$ Подставляя найденные значения вторых производных и эти значения x и y в исходное уравнение, после приведения подобных имеем:

$$t^2 u_{tt} = 0 \quad \text{или} \quad u_{tt} = 0$$

Последнее уравнение – каноническая форма заданного уравнения. Найдем общее решение уравнения. Интегрируя два раза по t, получаем $u_t = F(s) \Leftrightarrow u(s,t) = tF(s) + G(s)$, где F и G – две произвольные функции своих аргументов. Возвращаясь к исходным независимым переменным, приходим к общему решению заданного уравнения:

$$u(x,y) = yF\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right).$$

Задания на практическое занятие № 3

Определить тип и привести уравнения к каноническому виду

1. $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

2. $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

3. $x^4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2 y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0;$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \sin^2 x\right) \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

5. $y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

6. $\mathrm{tg}^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\mathrm{tg} x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{tg}^3 x \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Определить тип и найти общее решение уравнений

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

8. $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

9. $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

Практическое занятие №4
Волновое уравнение. Задача Коши. Метод Даламбера. Физическая интерпретация решения Даламбера

Примеры

Пример 1. Найти решение волнового уравнения
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(-\infty < x < +\infty, t > 0\right)$$
с начальными условиями
$$u\big|_{t=0} = 0{,}06\cos x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0{,}6\sin x.$$

Решение. Подставим начальные условия $f(x) = 0{,}06\cos x$, $g(x) = 0{,}6\sin x$ в формулу Даламбера
$$u\left(x, y\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(x - at\right) + f\left(x + at\right)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(y)dy.$$
Учитывая, что $a = 10$, имеем
$$u\left(x, y\right) = 0{,}03\left(\cos\left(x - 10t\right) + \cos\left(x + 10t\right)\right) + 0{,}03\int\limits_{x-at}^{x+at} \sin y dy =$$
$$= 0{,}03\cos\left(x - 10t\right) + 0{,}03\cos\left(x + 10t\right) + 0{,}03\left(-\cos y\Big|_{x-10t}^{x+10t}\right) =$$
$$= 0{,}03\cos\left(x - 10t\right) + 0{,}03\cos\left(x + 10t\right) - 0{,}03\cos\left(x + 10t\right) + \cos\left(x - 10t\right) =$$
$$= 0{,}06\cos\left(x - 10t\right).$$
Окончательное решение задачи имеет вид
$$u\left(x, y\right) = 0{,}06\cos\left(x - 10t\right).$$

Пример 2. Рассмотрим бесконечную струну, натянутую вдоль оси x. Пусть струне придана форма синусоиды $f(x) = \sin x$ (рис. 19), и в некоторый начальный момент времени каждой точке струны, имеющей координату x, сообщили скорость, направленную перпендикулярно оси x, *величина* которой $g(x) = \cos x$. Кроме того, пусть натяжение T и линейная плотность материала таковы, что $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 1$. Найти закон колебаний

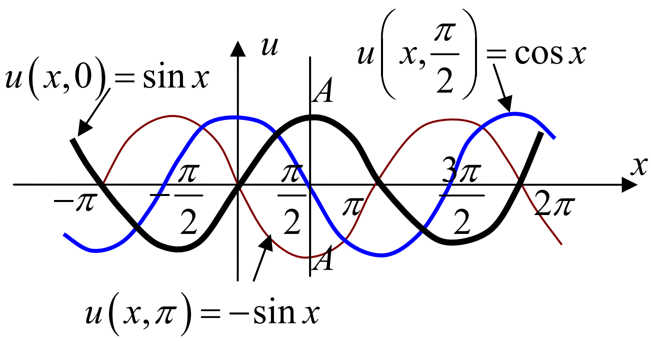


Рис. 19

струны $u(x,t)$; найти положение точек колеблющейся струны в моменты времени $t=\frac{\pi}{2}$ и $t=\pi$.

Решение. Если обозначить $\psi(x)=\int\limits_0^x \frac{g(y)}{a}dy$, то формулу Даламбера можно переписать в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+at)+\psi(x+at)\big)+\frac{1}{2}\big(f(x-at)-\psi(x-at)\big).$$

Подставляя $g(x)=\cos x$ в функцию $\Psi(x)=\int\limits_0^x \frac{g(x)}{a}dx$ и вычисляя интеграл, получим $\Psi(x)=\sin x$. Таким образом, имеем

$$u_1(x,t)=0{,}5\big(\sin(x+t)+\sin(x+t)\big); \quad u_2(x,t)=0{,}5\big(\sin(x-t)-\sin(x-t)\big).$$

Откуда

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)=\sin(x+t).$$

Подставляя в найденное значение $u(x,t)$ заданные значения времени $\frac{\pi}{2}$ и π, получим

$$u\left(x,\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x; \;\; u(x,\pi)=-\sin x.$$

Графики положения колеблющейся струны в три момента времени: $t=0,\quad t=\frac{\pi}{2},\quad t=\pi$ (мгновенные фотографии) – изображены на рисунке 19.

Видно, что точка A, в начальный момент находившаяся на гребне, в течение рассматриваемого промежутка времени $(0,\pi)$ перемещается по перпендикуляру к оси x вниз и в момент $t=\pi$ оказывается на дне впадины.

Задания на практическое занятие № 4

Найти решение задачи Коши для волнового уравнения методом Даламбера. Найти положение точек колеблющейся струны и сделать чертеж в моменты времени t_0 и t_1

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\;\; u\big|_{t=0}=0{,}5\cos x,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=2{,}5\sin x,\quad t_0=\pi,\quad t_1=\frac{3\pi}{2}.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\;\; u\big|_{t=0}=0{,}2\cos(4x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0{,}8\sin(4x),\quad t_0=\frac{\pi}{8},\quad t_1=\frac{\pi}{4}.$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\;\; u\big|_{t=0}=\cos\left(\frac{x}{6}\right),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0{,}5\sin\left(\frac{x}{6}\right),\quad t_0=0,\quad t_1=\pi.$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=0{,}6\cos\left(\dfrac{x}{2}\right),\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0{,}6\sin\left(\dfrac{x}{2}\right),\quad t_0=0,\quad t_1=\dfrac{\pi}{2}.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=0{,}2\sin(5x),\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0{,}2\cos(5x),\quad t_0=\dfrac{\pi}{2},\quad t_1=\pi.$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=\sin\left(\dfrac{x}{6}\right),\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\cos\left(\dfrac{x}{6}\right),\quad t_0=0,\quad t_1=\dfrac{\pi}{2}.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=0{,}5\sin(2x),\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0{,}5\cos(2x),\quad t_0=\dfrac{\pi}{2},\quad t_1=\pi.$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=\sin\left(\dfrac{x}{4}\right),\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\cos\left(\dfrac{x}{4}\right),\quad t_0=0,\quad t_1=\pi.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=100\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=0{,}8\sin\left(\dfrac{x}{2}\right),\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=4\cos\left(\dfrac{x}{2}\right),\quad t_0=0,\quad t_1=\dfrac{\pi}{2}.$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=0{,}3\cos(3x),\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0{,}3\sin(3x),\quad t_0=\dfrac{\pi}{2},\quad t_1=\pi.$

Практическое занятие №5
Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны конечных размеров. Физическая интерпретация решения в форме Фурье

Примеры

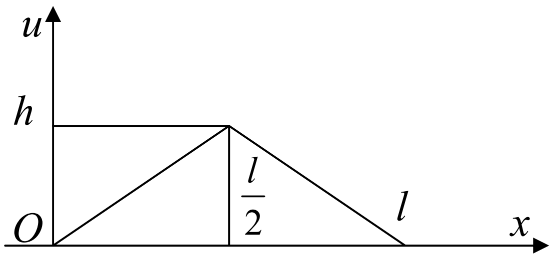


Рис. 20

Пример 1. Найти колебания струны с закрепленными концами $x=0$ и $x=l$, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму треугольника с вершиной в точке $\left(\dfrac{l}{2},h\right)$ (рис. 20). Линейная плотность материала струны ρ, сила натяжения – T_0.

Решение. Отклонение струны от положения равновесия в процессе колебаний имеет вид (формула (5.11))

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $A_k=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad B_k=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$

Из условия задачи

$$g(x) = u_t(x,0) = 0;$$

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{l}, & \text{åñëè} \quad 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{2h(l-x)}{l}, & \text{åñëè} \quad \dfrac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$$

Так как $g(x) = 0$, все $B_k = 0$. Найдем

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\left[\frac{h}{c}\int_0^c x\sin\frac{k\pi x}{l}dx + \frac{h}{l-c}\int_c^l (l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right],$$

где $c = \dfrac{l}{2}$.

Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int_0^c x\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{lx}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^c + \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^c =$$

$$= -\frac{lc}{k\pi}\cos\frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi c}{l}.$$

И аналогично

$$\int_c^l (l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{l(l-c)}{k\pi}\cos\frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi c}{l}.$$

Следовательно,

$$A_k = \frac{2hl^2}{(k\pi)^2 c(l-c)}\sin\frac{k\pi c}{l}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (5.11) и заменяя $c = \dfrac{l}{2}$, получаем искомое решение

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi at}{l} =$$

$$= \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l}.$$

При написании последнего равенства мы использовали свойство синуса:

$$\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ (-1)^{n-1}, & k = 2n-1. \end{cases}$$

В теме 5.2 было сказано, что коэффициенты ряда (5.11) быстро убывают с ростом k. Из полученного решения видим, что эти коэффициенты, а с ними и амплитуда соответствующего тона, убывают со скоростью $\dfrac{1}{k^2}$. Это значит, что гармоники с достаточно большими номерами на результирующее колебание, а значит, на звучание струны практически никакого влияния оказывать не будут.

На рис. 21 построен график полученного решения для различных моментов времени с временным шагом равным $\frac{1}{8}$ полупериода колебаний, начиная от начала $t = 0$ до значения $t = \frac{l}{a}$.

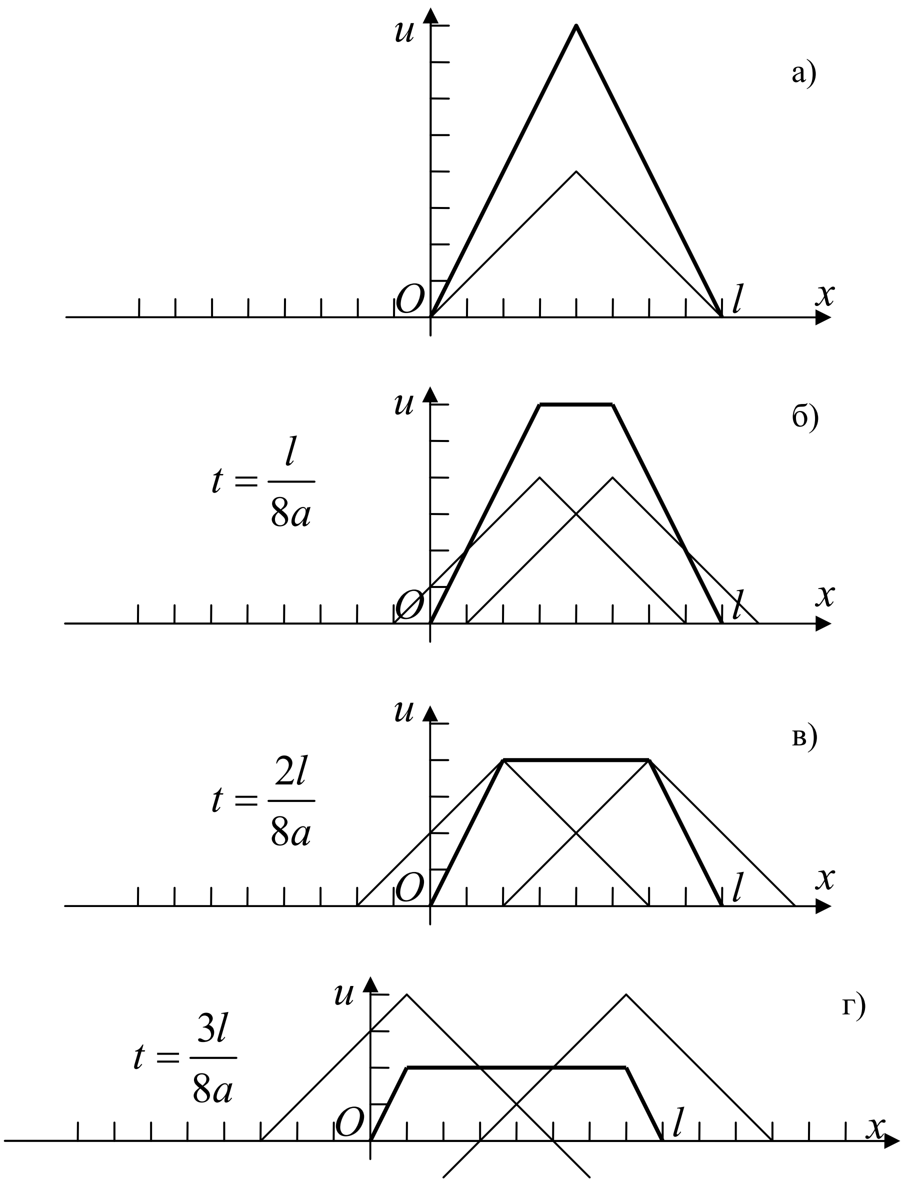


Рис. 21

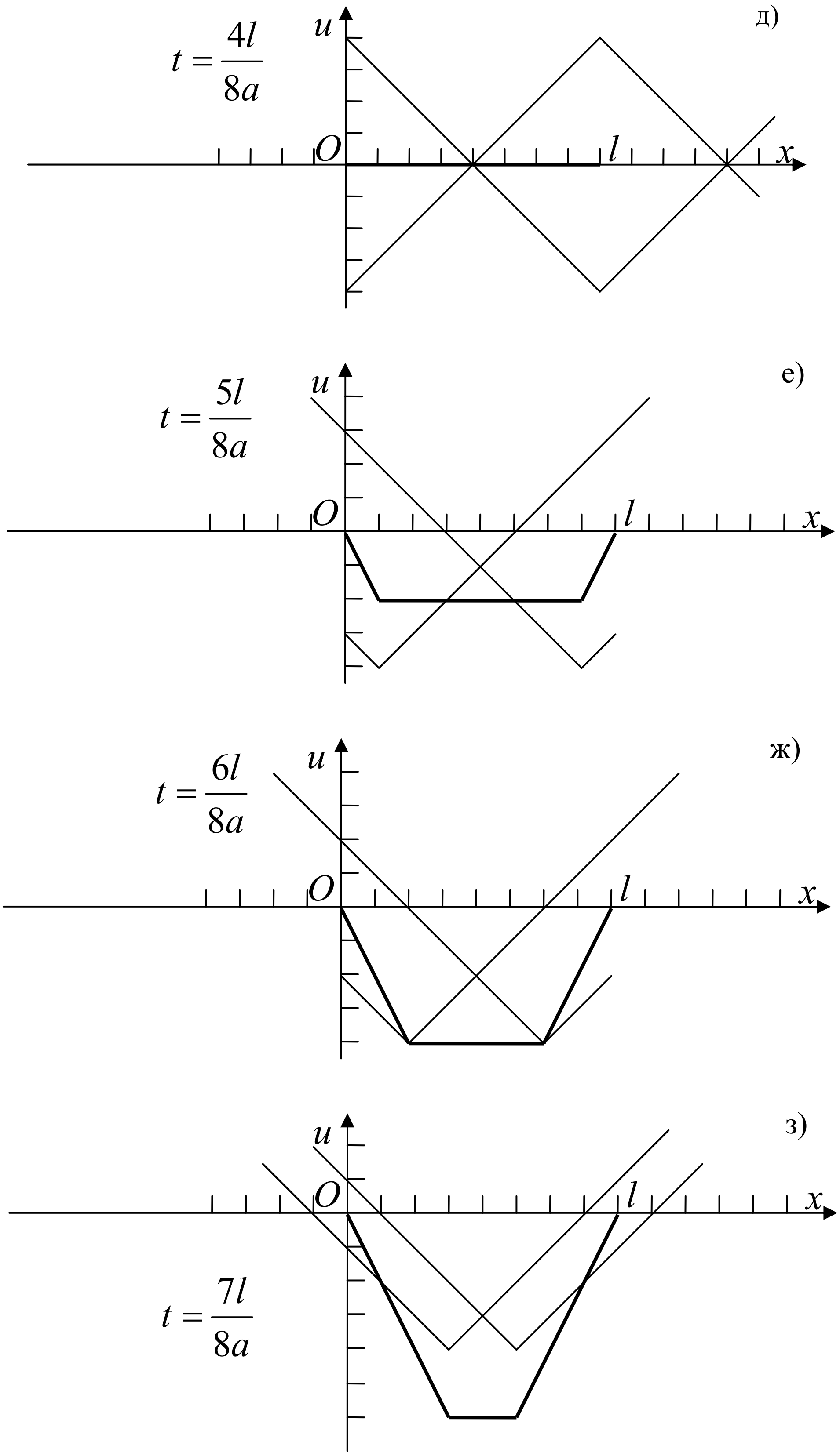


Рис. 21 (продолжение)

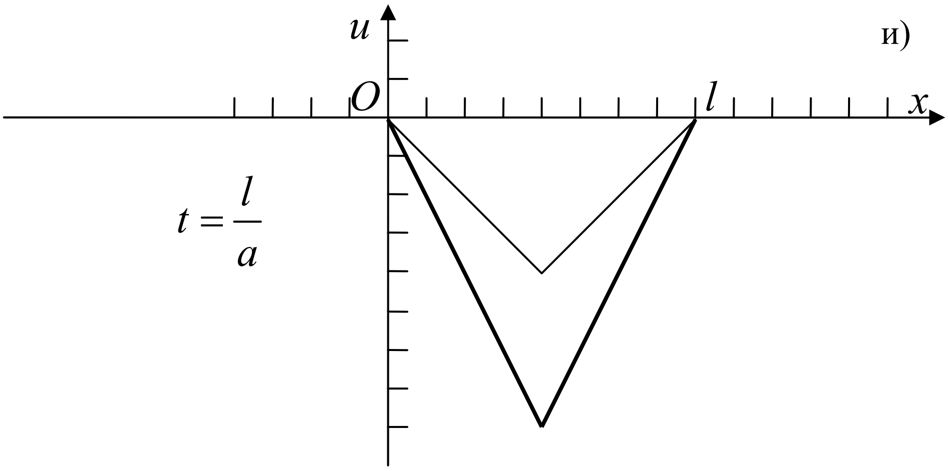


Рис. 21 (продолжение)

Можно показать, что полученное решение представляет собой функцию, дифференцируемую не всюду, поэтому его нельзя рассматривать как решение задачи в точном смысле, то есть в смысле определения решения дифференциального уравнения. Тем не менее, функции такого рода оказываются полезными и называются *обобщенными решениями.* Конечно, в нашем конкретном случае все эти вопросы связаны с искусственностью «треугольного» начального условия.

Однако если угол треугольника немного «закруглить», для такой функции $f(x)$ формула (5.11) становиться точным решением. С другой стороны, естественно ожидать, что малое изменение начальных данных должно приводить к малому же изменению решения. Таким образом, чем меньше мы закругляем угол, тем ближе мы к реальной ситуации, и тем ближе решение реальной задачи к формуле (5.11).

Пример 2. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=8$, в начальный момент совпадает с отрезком $[0,8]$ оси Ox, т.е. $u(x,0)=f(x)=0$. Начальная скорость

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{160}, & 0\le x\le 4,\\ \dfrac{8-x}{160}, & 4\le x\le 8.\end{cases}$$

Уравнение колебаний струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Найти с помощью метода Фурье $u(x,t)$ – смещение точек струны от оси Ox.

Решение. Будем искать решение в виде суммы частных решений, каждое из которых представляется в виде произведения $\mathrm{X}(x)\cdot\mathrm{T}(t)$, где $\mathrm{X}(x)$ зависит только от x, а $\mathrm{T}(t)$ зависит только от t. С учетом начальных и граничных условий решение уравнения принимает вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где A_n и B_n вычисляются по формулам

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Из начального условия $f(x)=0$ следует, что $A_n = 0$. Из условий задачи – $a^2 = 36$, т.е. $a = 6$ и $l = 8$.

Находим

$$B_n = \frac{2}{n\pi 6}\left(\int_0^4 \frac{x}{160}\sin\frac{n\pi x}{8}dx + \int_4^8 \frac{8-x}{160}\sin\frac{n\pi x}{8}dx\right).$$

Применяем формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$. Для первого интеграла

$$u = \frac{x}{160},\ dv = \sin\frac{n\pi x}{8}dx,\ du = \frac{dx}{160},\ v = -\frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{8};$$

для второго интеграла

$$u = \frac{8-x}{160},\ dv = \sin\frac{n\pi x}{8}dx,\ du = -\frac{dx}{160},\ v = -\frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{8}.$$

В итоге получаем

$$B_n = \frac{1}{3n\pi}\left[\frac{x}{160}\left(-\frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{8}\right)\Bigg|_0^4 + \frac{1}{20n\pi}\int_0^4\cos\frac{n\pi x}{8}dx + \frac{8-x}{160}\left(-\frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{8}\right)\Bigg|_4^8 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{20n\pi}\int_4^8\cos\frac{n\pi x}{8}dx\right] = \frac{1}{3n\pi}\left[-\frac{1}{5n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{20n\pi}\cdot\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{8}\Bigg|_0^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{20n\pi}\cdot\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{8}\Bigg|_4^8 = \right.$$

$$= \frac{1}{3n\pi}\left(\frac{2}{5n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{5n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4}{15n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi}{2},$$

так как $\sin n\pi = 0$.

Если n четно, т.е. $n = 2k$, где $k = 1,2,3,...,$ то $B_n = B_{2k} = \dfrac{4}{15(2k)^3\pi^3}\cdot\sin k\pi = 0.$

Если n нечетно, т.е. $n = 2k+1$, где $k = 0,1,2,3,...,$ то

$$B_n = B_{2k+1} = \frac{4}{15(2k+1)^3\pi^3}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{4\cdot(-1)^k}{15(2k+1)^3\pi^3}.$$

Искомое решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^k}{15(2k+1)^3\pi^3}\sin\frac{3(2k+1)}{4}\pi t\cdot\sin\frac{(2k+1)}{4}\pi x.$$

Задания на практическое занятие №5

Решить методом Фурье волновые уравнения на данном отрезке с граничными условиями $u(0,t)=u(l,t)=0$ и заданными начальными условиями.

1. $u''_{tt}=9u''_{xx};\quad u(x,0)=0;\quad u'_t(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{300}, & 0\le x<30,\\ \dfrac{60-x}{300}, & 30\le x\le 60.\end{cases}$

2. $u''_{tt}=16u''_{xx};\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{40}, & 0\le x<4,\\ \dfrac{8-x}{40}, & 4\le x\le 8,\end{cases}\quad u'_t(x,0)=0.$

3. $u''_{tt}=4u''_{xx};\quad u(x,0)=0;\quad u'_t(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{200}, & 0\le x<10,\\ \dfrac{20-x}{200}, & 10\le x\le 20.\end{cases}$

4. $u''_{tt}=u''_{xx};\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{100}, & 0\le x<20,\\ \dfrac{40-x}{100}, & 20\le x\le 40,\end{cases}\quad u'_t(x,0)=0.$

5. $u''_{tt}=25u''_{xx};\quad u(x,0)=0;\quad u'_t(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{50}, & 0\le x<5,\\ \dfrac{10-x}{50}, & 5\le x\le 10.\end{cases}$

6. $u''_{tt}=100u''_{xx};\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{250}, & 0\le x<25,\\ \dfrac{50-x}{250}, & 25\le x\le 50,\end{cases}\quad u'_t(x,0)=0.$

7. $u''_{tt}=81u''_{xx};\quad u(x,0)=0;\quad u'_t(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{450}, & 0\le x<45,\\ \dfrac{90-x}{450}, & 45\le x\le 90.\end{cases}$

8. $u''_{tt}=36u''_{xx};\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{150}, & 0\le x<15,\\ \dfrac{30-x}{150}, & 15\le x\le 30,\end{cases}\quad u'_t(x,0)=0.$

9. $u''_{tt} = 64u''_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u'_t(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{120}, & 0 \le x < 6, \\ \dfrac{12-x}{120}, & 6 \le x \le 12. \end{cases}$

10. $u''_{tt} = 49u''_{xx}; \quad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{700}, & 0 \le x < 35, \\ \dfrac{70-x}{700}, & 35 \le x \le 70, \end{cases} \quad u'_t(x,0) = 0.$

Практическое занятие №6
Одномерная задача о распространении тепла в ограниченном стержне

Пример

Решить методом Фурье задачу о распространении тепла в ограниченном стержне

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le l, \quad t > 0$$

при начальном условии

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{L}, & \text{ï ðè} \quad 0 \le x < \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{l-x}{L}, & \text{ï ðè} \quad \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

и граничных условиях $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Решение. Будем искать решение в виде суммы частных решений, каждое из которых представляется в виде произведения $X(x) \cdot T(t)$, где функция $X(x)$ зависит только от x, а функция $T(t)$ зависит только от t. Подставляя $X(x) \cdot T(t)$ в уравнение теплопроводности, имеем $X(x) \cdot T(t) = a^2 X''(x) T(t)$ или, после деления на $a^2 X(x) T(t)$: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{1}{a^2} \cdot \dfrac{T'(t)}{T(t)}$. Полученное равенство должно удовлетворяться при любых значениях x и t. Это возможно только при условии, что $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ и $\dfrac{1}{a^2} \cdot \dfrac{T'(t)}{T(t)}$ равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\lambda$. Последнее равенство при этом распадается на два уравнения

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1}$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{2}$$

Из граничных условий следует, что $u(0,t)=X(0)T(t)=0$, $u(l,t)=X(l)T(t)=0$. Отсюда функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям $X(0)=X(l)=0$, так как иначе имели бы $T(t)\equiv 0$.

При $\lambda=0$ общее решение уравнения (1) имеет вид $X(x)=C_1+C_2x$. Граничные условия дают $C_1+C_2\cdot 0=0$, $C_1+C_2l=0$. Отсюда $C_1=0$, $C_2=0$ и $X(x)\equiv 0$.

При $\lambda<0$ общим решением уравнения (1) будет $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=-C_1, \\ C_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}l}-e^{-\sqrt{-\lambda}l}\right)=0. \end{cases}$$

Значит, решением системы будут только $C_1=C_2=0$ и им соответствует $X(x)\equiv 0$.

Наконец при $\lambda>0$ общее решение уравнения (1) можно записать в виде $X(x)=C_1\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$, а граничные условия дают $X(0)=C_1=0$, $X(l)=C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$. Если $X(x)\neq 0$, то $C_2\neq 0$, поэтому $\sin\sqrt{\lambda}l=0$ или

$$\sqrt{\lambda}l=\pi n \Leftrightarrow \lambda=\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n=1,2,...$$

Частные решения, соответствующие найденным λ_n, с точностью до постоянного множителя, который можно считать равным единице, задаются как $X_n=\sin\frac{n\pi x}{l}, n=1,2,...$

Подставляя $\lambda=\lambda_n$ в уравнение (2), найдем общее решение уравнения с разделяющимися переменными

$$T'(t)=\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T(t).$$

Им будет $T_n(t)=C_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}, n=1,2,...,$ где C_n – произвольные постоянные.

В результате, получим семейство ненулевых частных решений исходного уравнения теплопроводности, удовлетворяющих граничным условиям

$$U_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=C_ne^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}, n=1,2,...$$

Решение исходной задачи будем искать в виде

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Постоянные C_n подберем так, чтобы удовлетворить начальному условию

$$U(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x).$$

Последнее выражение представляет собой разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам на промежутке $(0,l)$. Следовательно,

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Чтобы вычислить C_n, интеграл в последнем выражении представим в виде суммы двух интегралов по промежуткам $\left(0,\frac{l}{2}\right)$ и $\left(\frac{l}{2},l\right)$.

$$C_n=\frac{2}{l}\frac{1}{L}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right).$$

Применяем к каждому интегралу формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu.$ Для первого интеграла $u=x,$ $du=dx,$ $dv=\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$ $v=-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}$, для второго интеграла $u=(l-x)$, $du=-dx,$ $dv=\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$ $v=-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}$.

Интегрируя по частям каждый из интегралов, найдем

$$C_n=\frac{2}{lL}\left(\left(-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{l}{n\pi}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\left(-\frac{l(l-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{l}{n\pi}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{lL}\left(-\frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}\right)=$$

$$=\frac{2}{lL}\left(\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin n\pi+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{4l}{Ln^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

так как $\sin n\pi=0$.

При n четном $C_n=C_{2k}=\frac{l}{Lk^2\pi^2}\sin k\pi=0$, при n нечетном, т.е. $n=2k+1$

$$C_n=C_{2k+1}=\frac{4l}{L(2k+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}=\frac{4l}{L(2k+1)^2\pi^2}(-1)^k, k=0,1,2,...$$

Окончательно, подставляя полученное выражение в формулу для искомого решения $u(x,t)$, получаем

$$u(x,t)=\frac{4l}{L\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\left(\frac{a(2k+1)\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

Задания на практическое занятие №6

Решить методом Фурье уравнения теплопроводности на данном отрезке с граничными условиями $u(0,t)=u(l,t)=0$ и с заданными начальными условиями

1. $u'_t=16u''_{xx},\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{40}, & 0\le x<4,\\ \dfrac{8-x}{40}, & 4\le x\le 8.\end{cases}$

2. $u'_t=64u''_{xx},\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{120}, & 0\le x<6,\\ \dfrac{12-x}{120}, & 6\le x\le 12.\end{cases}$

3. $u'_t=36u''_{xx},\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{60}, & 0\le x<3,\\ \dfrac{6-x}{60}, & 3\le x\le 6.\end{cases}$

4. $u'_t=49u''_{xx},\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{700}, & 0\le x<35,\\ \dfrac{70-x}{700}, & 35\le x\le 70.\end{cases}$

5. $u'_t=100u''_{xx},\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{400}, & 0\le x<10,\\ \dfrac{20-x}{400}, & 10\le x\le 20.\end{cases}$

6. $u'_t=9u''_{xx},\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{150}, & 0\le x<15,\\ \dfrac{30-x}{150}, & 15\le x\le 30.\end{cases}$

7. $u'_t=81u''_{xx},\quad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{180}, & 0\le x<9,\\ \dfrac{18-x}{180}, & 9\le x\le 18.\end{cases}$

8. $u'_t = u''_{xx}, \quad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{200}, & 0 \le x < 8, \\ \dfrac{16-x}{200}, & 8 \le x \le 16. \end{cases}$

9. $u'_t = 25u''_{xx}, \quad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{50}, & 0 \le x < 5, \\ \dfrac{10-x}{50}, & 5 \le x \le 10. \end{cases}$

10. $u'_t = 4u''_{xx}, \quad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{80}, & 0 \le x < 2, \\ \dfrac{4-x}{80}, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$

Практическое занятие №7
Уравнения Лапласа и Пуассона. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа

Пример

Найти собственные функции и собственные значения задачи Дирихле $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \lambda u(x,y), \quad u\big|_s = 0$ в области, являющейся прямоугольником на плоскости $\Omega = \left\{(x,y) : 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le 2\right\}$ с границей s.

Решение. Решим задачу методом разделения переменных. Решение будем искать в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$, где $X(x)$ – функция только переменной x, а $Y(y)$ – функция только переменной y. Из граничных условий $u(0,y) = u\left(\dfrac{\pi}{2}, y\right) = u(x,0) = u(x,2) = 0$ получаем

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X\left(\frac{\pi}{2}\right)Y(y) = 0,$$

$$X(x)Y(0) = 0, \quad X(x)Y(2) = 0.$$

Подставляя $X(x)Y(y)$ в уравнение Лапласа, имеем

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y).$$

Разделим левую и правую части уравнения на $X(x)Y(y)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \text{ или } \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda.$$

Последнее равенство выполняется при всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $y \in (0,2)$, только если левая и правая часть равны одной и той же постоянной, которую обозначим $-\mu$.

Таким образом, имеем два уравнения

$$X''(x) + \mu X(x) = 0,$$

$$-Y''(y) + (\lambda + \mu)Y(y) = 0.$$

Рассмотрим случаи $\mu > 0,\ \mu = 0,\ \mu < 0.$

При $\mu < 0$ общее решение первого уравнения имеет вид $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}x}$.

Вспоминаем граничные условия $X(0)Y(y) = 0, X\left(\frac{\pi}{2}\right)Y(y) = 0$. Так как $Y(y) \neq 0$, то выполняются условия $X(0) = 0, X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Отсюда получаем

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 e^{\sqrt{-\mu}\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\sqrt{-\mu}\frac{\pi}{2}} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ C_1\left(e^{\sqrt{-\mu}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{-\mu}\frac{\pi}{2}}\right) = 0, \end{cases}$$

а следовательно, $c_1 = c_2 = 0$.

При $\mu = 0$ решением уравнения $X''(x) = 0$ является $X(x) = c_1 x + c_2$. Так как $X(0) = X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то $c_2 = c_1 = 0$.

При $\mu > 0$ общее решение уравнения $X''(x) + \mu X(x) = 0$ имеет вид $X(x) = c_1 \cos\sqrt{\mu}x + c_2 \sin\sqrt{\mu}x$, а из граничных условий следует, что $X(0) = c_1 = 0$ и $X\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 \sin\sqrt{\mu}\frac{\pi}{2} = 0$. Если $X(x) = c_2 \sin\sqrt{\mu}x \neq 0$, то $c_2 \neq 0$ и поэтому $\sin\sqrt{\mu}\frac{\pi}{2} = 0$ или $\sqrt{\mu}\frac{\pi}{2} = \pi n$, $\sqrt{\mu} = 2n, \mu = 4n^2, n = 1,2,3,...$

Подставим $\mu = 4n^2$ во второе уравнение $Y''(y) - (\lambda + 4n^2)Y(y) = 0$. Вспоминая граничные условия $X(x)Y(0) = 0,\ X(x)Y(2) = 0$ или $Y(0) = 0, Y(2) = 0$ $(X(x) \neq 0)$, получаем решение $Y(y) \neq 0$ только в случае, если $-(\lambda + 4n^2) > 0$ и $Y(y) = c_1 \cos\sqrt{-(\lambda + 4n^2)}y + c_2 \sin\sqrt{-(\lambda + 4n^2)}y.$ Так как $Y(0) = 0$, то $c_1 = 0$ и

$$Y(y) = c_2 \sin\sqrt{-(\lambda + 4n^2)}y.$$

Из условия $Y(2)=0$ имеем $Y(2)=c_2\sin\sqrt{-\left(\lambda+4n^2\right)}2=0$ или $\sqrt{-\left(\lambda+4n^2\right)}2=m\pi$, $-\left(\lambda+4n^2\right)=\dfrac{m^2\pi^2}{4}, m=1,2,...$

В результате, собственные числа имеют вид $\lambda_{nm}=-\left(4n^2+\dfrac{m^2\pi^2}{4}\right)$, а соответствующие собственные функции

$$u_{nm}(x,y)=X_n(x)Y_m(y)=c_{nm}\sin 2nx\sin\frac{m\pi}{2}y.$$

Используя свойство ортонормированности собственных функций

$$\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}u_{nm}^2(x,y)\,dxdy=1, \text{ вычисляем } \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}c_{nm}^2\sin^2 2nx\sin^2\frac{m\pi}{2}y\,dxdy=1\Leftrightarrow$$

$$c_{nm}^2\int_0^2\sin^2\frac{m\pi y}{2}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2nx\,dx=1\Leftrightarrow c_{nm}^2\int_0^2\frac{1-\cos m\pi y}{2}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4nx}{2}dx=1\Leftrightarrow$$

$$c_{nm}^2\left(\frac{1}{2}y-\frac{\sin m\pi y}{2m\pi}\right)\Bigg|_0^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sin 4nx}{8n}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1\Leftrightarrow c_{nm}^2\left(1-\frac{\sin 2m\pi}{2m\pi}\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin 2n\pi}{8n}\right)=1.$$

Учитывая, что $\sin n\pi=0,\ n=0,1,2,3,...,$ окончательно получаем коэффициенты $c_{nm}=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ и $u_{nm}(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sin 2nx\sin\dfrac{m\pi y}{2}, m=1,2,...,n=1,2,3,...$

Задания на практическое занятие №7

Найти собственные функции и собственные значения задачи Дирихле $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u,\ u\big|_s=0$ в области Ω с границей s.

1. Область $\Omega=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 8\right\}$.
2. Область $\Omega=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
3. Область $\Omega=\left\{(x,y):\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{3},\ 0\le y\le 3\pi\right\}$.
4. Область $\Omega=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le\dfrac{3}{4}\right\}$.
5. Область $\Omega=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 9\right\}$.
6. Область $\Omega=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 8\pi\right\}$.
7. Область $\Omega=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 3\pi,\ 0\le y\le\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

8. Область $\Omega = \left\{ (x, y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{1}{2} \right\}$.

9. Область $\Omega = \left\{ (x, y):\ 0 \le x \le \frac{1}{3},\ 0 \le y \le 3 \right\}$.

10. Область $\Omega = \left\{ (x, y):\ 0 \le x \le 9\pi,\ 0 \le y \le 4\pi \right\}$.

4. Блок контроля освоения дисциплины

4.1. Общие указания

Блок контроля освоения дисциплины включает:

1. Методические указания к выполнению контрольной работы

Указан порядок оформления контрольной работы и методические указания к их выполнению. Приведены примеры решения типовых задач.

2. Задания на контрольную работу

Предлагается 50 заданий, из которых студент должен выполнить 5 в соответствии с приведенной таблицей.

3. Блок тестов текущего контроля

Приводятся 9 тестов текущего контроля по каждому из разделов дисциплины. Они предлагаются студентам в качестве тренировочных (репетиционных). После работы с этими тестами можно проверить ответы – они приведены на с.125. Завершив работу с тренировочным тестом по разделу, студент получает аналогичный контрольный тест. Время ответа и число попыток ограничено.

4. Блок итогового контроля

Изучение дисциплины завершается сдачей экзамена.

Вопросы для подготовки к экзамену приведены в подразделе 4.5.

4.2. Задание на контрольную работу и методические указания к ее выполнению

Методические указания к выполнению контрольной работы

Прежде чем выполнять контрольную работу, следует изучить теоретический материал по литературе, указанной в п. 3.1, разобрать материал практических занятий и решения типовых задач, приведенных в данном комплексе, выработать навыки решения примеров и задач по соответствующей теме, проверив себя по тренировочным тестам, приведенным в п.4.3. При выполнении контрольной работы студентам необходимо придерживаться следующих правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в тетради в клетку, с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя. Студенты, занимающиеся с элементами ДОТ, могут выполнить работу письменно (для отправ-

ки на проверку письменные работы необходимо отсканировать) или в любом текстовом редакторе (в формате .doc или .rtf).

2. На титульном листе работы указываются фамилия, имя, отчество студента, шифр (номер студенческого билета), курс, факультет и специальность, по которой студент обучается.

3. Условия задачи переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится подробное решение со ссылками на использованные при решении определения, формулы; в конце решения записывается ответ; чертежи можно выполнять аккуратно от руки.

4. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по варианту. Контрольная работа, содержащая не все задачи, а также задачи не своего варианта не засчитывается.

5. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

6. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся исправления и дополнения.

Основной целью контрольной работы является освоение методов математической физики и выработка навыков решения задач по изучаемым темам.

Линейные уравнения с частными производными первого порядка

Теоретический материал по данной теме изложен на С. 24 – 25, практическое занятие – на С. 82 – 84 данного издания.

Пример. Найти решение задачи Коши для линейного уравнения первого порядка $\sin x\frac{\partial z}{\partial y}-\cos y\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ z(x,0)=\cos^2 x$.

Решение. Уравнение линейное. Дифференциал искомой функции $z(x,y)$ не входит в характеристическую систему, поэтому имеем $\frac{dx}{\cos y}=\frac{dy}{\sin x}$. Решаем уравнение с разделяющимися переменными $\sin x dx=\cos y dy$ и получаем $\int\sin x dx=\int\cos y dy\ \Leftrightarrow\ -\cos x=\sin y+C\ \Leftrightarrow\ \sin y+\cos x=C_1$. Откуда общее решение – $z(x,y)=F(\cos x+\sin y)$, согласно начальному условию $z(x,0)=\cos^2 x$.

Подставим $y=0$ в полученное общее решение $z(x,0)=F(\cos x+\sin 0)=F(\cos x)$. Таким образом, $F(\cos x)=\cos^2 x$, то есть функция F значения аргумента $\cos x$ возводит в квадрат $\cos^2 x$. Решением нашей задачи Коши является функция $z(x,y)=F(\cos x+\sin y)=(\cos x+\sin y)^2$.

Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду

Теоретический материал по данной теме изложен на С. 26–28, практическое занятие – на С. 84–86 данного издания.

Пример. Установить тип, привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Решение. Задано линейное уравнение, в котором $A=1, B=3, C=5$. Число $D=B^2-AC=9-5=4>0$, следовательно, данное уравнение гиперболического типа. Уравнения характеристик $\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{D}}{A}$ имеют вид $\frac{dy}{dx}=3\pm 2$ или $\frac{dy}{dx}=5$ и $\frac{dy}{dx}=1$. Общими интегралами последних уравнений являются $y=5x+C$ и $y=x+C_1$. Таким образом, новые переменные s и t можно вводить по формулам $s=y-5x, t=y-x$. Выражаем частные производные от функции $u(x,y)$ по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$u_x=u_s s_x+u_t t_x=u_s(-5)+u_t(-1);\quad u_y=u_s s_y+u_t t_y=u_s+u_t;$$

$$u_{xx}=(-5u_s-u_t)_x=-5(u_s)_x-(u_t)_x=-5\left(u_{ss}(-5)+u_{st}(-1)\right)-$$

$$-\left(u_{ts}(-5)+u_{tt}(-1)\right)=25u_{ss}+10u_{st}+u_{tt};$$

$$u_{yy}=(u_s+u_t)_y=(u_s)_y+(u_t)_y=(u_{ss}+u_{st})+(u_{ts}+u_{tt})=u_{ss}+2u_{st}+u_{tt};$$

$$u_{xy}=(-5u_s-u_t)_y=-5(u_s)_y-(u_t)_y=-5(u_{ss}+u_{st})-(u_{ts}+u_{tt})=-5u_{ss}-6u_{st}-u_{tt}.$$

Подставляя найденные значения вторых производных в исходное уравнение и приводя подобные слагаемые, получаем

$$25u_{ss}+10u_{st}+u_{tt}+6(-5u_{ss}-6u_{st}-u_{tt})+5(u_{ss}+2u_{st}+u_{tt})=-16u_{st}=0$$

или $u_{st}=0$.

Последнее уравнение – каноническая форма заданного уравнения.

Найдем общее решение данного уравнения. Интегрируя сначала по переменной t, а затем по s, имеем $u_s=F(t)\Leftrightarrow u(s,t)=sF(t)+G(t)$, где F и G – две произвольные функции своих аргументов. Наконец возвращаясь к исходным независимым переменным, приходим к общему решению заданного уравнения

$$u(x,y)=(y-5x)F(y-x)+G(y-x).$$

Волновое уравнение. Метод Даламбера

Теоретический материал по данной теме изложен на С.29 – 39, практическое занятие – на С.87 – 88 данного издания.

Пример. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\Big|_{t=0} = \cos\left(\frac{2}{3}x\right),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2\sin\left(\frac{2}{3}x\right).$$

Найти положения колеблющихся точек струны и сделать чертеж в моменты времени $t_0 = 0,\ t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Подставим начальные условия $f(x) = \cos\left(\frac{2}{3}x\right)$, $g(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ в формулу Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x-at) + f(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(y)dy.$$

Учитывая, что $a = 3$, имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2}{3}(x-3t)\right) + \cos\left(\frac{2}{3}(x+3t)\right)\right) + \frac{2}{6}\int\limits_{x-3t}^{x+3t}\sin\left(\frac{2}{3}y\right)dy =$$

$$= 0,5\cos\left(\frac{2}{3}x - 2t\right) + 0,5\cos\left(\frac{2}{3}x + 2t\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}y\right)\Bigg|_{x-3t}^{x+3t}\right) =$$

$$= 0,5\cos\left(\frac{2}{3}x - 2t\right) + 0,5\cos\left(\frac{2}{3}x + 2t\right) - 0,5\cos\left(\frac{2}{3}(x+3t)\right) +$$

$$+0,5\cos\left(\frac{2}{3}(x-3t)\right) = \cos\left(\frac{2}{3}x - 2t\right).$$

Окончательное решение задачи имеет вид

$$u(x,t) = \cos\left(\frac{2}{3}x - 2t\right).$$

Подставляя в найденное значение $u(x,t)$ заданные значения времени $t_0 = 0$ и $t_1 = \frac{\pi}{4}$, получим

$$u(x,0) = \cos\frac{2}{3}x,\ u\left(x,\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{2}{3}x.$$

Графики колеблющейся струны в моменты времени $t_0 = 0$ и $t_1 = \frac{\pi}{4}$ изображены на рис. 22.

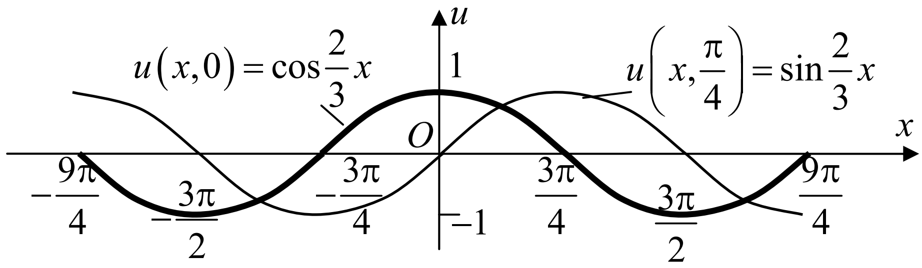


Рис. 22

Уравнение теплопроводности. Одномерная задача о распространении тепла в ограниченном стержне

Теоретический материал по данной теме изложен на С. 46 – 57, практическое занятие – на С. 96 – 99 данного издания.

Пример. Решить методом Фурье задачу о распространении тепла в ограниченном стержне $[0,30]$. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

начальное условие

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{900}, 0\le x<15,\\ \dfrac{30-x}{900}, 15\le x\le 30,\end{cases}$$

граничные условия $u(0,t)=u(30,t)=0$.

Решение. Будем искать решение в виде суммы частных решений, каждое из которых представляется в виде произведения $X(x)T(t)$, где $X(x)$ зависит только от x, а $T(t)$ зависит только от t. С учетом начальных и однородных граничных условий искомое решение имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $C_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$. Из условий задачи $a^2=81,\quad l=30$.

Вычислим коэффициент C_n, учитывая начальное условие

$$C_n=\frac{2}{30}\int\limits_0^{30}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{30}dx=\frac{1}{15}\left(\int\limits_0^{15}\frac{x}{900}\sin\frac{n\pi x}{30}dx+\int\limits_{15}^{30}\frac{30-x}{900}\sin\frac{n\pi x}{30}dx\right).$$

Применяем формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$.

Для первого интеграла

$$u=\frac{x}{900},\ dv=\sin\frac{n\pi x}{30}dx,\ du=\frac{1}{900}dx,\ v=-\frac{30}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{30};$$

Для второго интеграла

$$u=\frac{30-x}{900},\ dv=\sin\frac{n\pi x}{30}dx,\ du=-\frac{dx}{900},\ v=-\frac{30}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{30}.$$

Интегрируя по частям каждый из интегралов, найдем

$$\int_0^{15}\frac{x}{900}\sin\frac{n\pi x}{30}dx=\frac{x}{900}\left(-\frac{30}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{30}\right)\Bigg|_0^{15}+\frac{1}{30n\pi}\int_0^{15}\cos\frac{n\pi x}{30}dx=$$

$$=\frac{-1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{30n\pi}\frac{30}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{30}\Bigg|_0^{15}=-\frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$\int_{15}^{30}\frac{30-x}{900}\sin\frac{n\pi x}{30}dx=\frac{30-x}{900}\left(-\frac{30}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{30}\right)\Bigg|_{15}^{30}-\frac{1}{30n\pi}\int_{15}^{30}\cos\frac{n\pi x}{30}dx=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{30n\pi}\frac{30}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{30}\Bigg|_{15}^{30}=\frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

так как $\sin n\pi=0$.

Следовательно,

$$C_n=\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{2}{15n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

при n четном $C_n=C_{2k}=\dfrac{2}{15(2k)^2\pi^2}\sin k\pi=0\ \ (k=0,1,2,3,...)$,

при n нечетном $C_n=C_{2k+1}=\dfrac{2}{15(2k+1)^2\pi^2}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\dfrac{2(-1)^k}{15(2k+1)^2\pi^2}$

$(k=0,1,2,3,...)$.

Подставляя полученное выражение C_n в формулу для решения $u(x,t)$, получаем

$$u(x,t)=\frac{2}{15\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\frac{9(2k+1)^2\pi^2}{100}t}\sin\frac{(2k+1)}{30}\pi x.$$

Уравнения Лапласа и Пуассона. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа

Теоретический материал по данной теме изложен на С.58 – 62, практическое занятие – на С.100 – 102 данного издания.

Пример. Найти собственные функции и собственные значения задачи Дирихле

$$\Delta u = \lambda u, \ \ u\big|_s = 0$$

в области, являющейся квадратом на плоскости $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \pi\}$ с границей s.

Решение. Решим задачу с помощью метода разделения переменных. Решение будем искать в виде $u(x, y) = X(x)Y(y),$ где $X(x)$ – функция только переменной x, а $Y(y)$ – функция только переменной *y*. Подставляя $X(x)\cdot Y(y)$ в уравнение Лапласа, имеем

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y),$$

а из граничных условий следует

$$X(0)Y(y) = 0, \ \ X(\pi)Y(y) = 0,$$

$$X(x)Y(0) = 0, \ \ X(x)Y(\pi) = 0.$$

Разделим левую и правую части уравнения на $X(x)\cdot Y(y)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(Y)} = \lambda \ \text{ или } \ \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(Y)} + \lambda.$$

Последнее равенство выполняется при всех $x \in (0, \pi)$ и $y \in (0, \pi)$, только если левая и правая части равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим $-\mu$. Таким образом, имеем

$$X''(x) + \mu X(x) = 0$$

$$-Y''(y) + (\lambda + \mu)Y(y) = 0.$$

Рассмотрим случаи $\mu > 0, \ \mu = 0$ и $\mu < 0.$

При $\mu < 0$ общее решение уравнения $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}x}$. Вспоминая граничные условия $X(0) = 0, \ X(\pi) = 0,$ получаем

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{-\mu}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}\pi} = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_2 = -c_1, \\ c_1\left(e^{\sqrt{-\mu}\pi} - e^{-\sqrt{-\mu}\pi}\right) = 0, \end{cases}$$

а следовательно, $c_1 = c_2 = 0.$

При $\mu = 0$ решением уравнения $X''(x) = 0$ является $X(x) = c_1 x + c_2$. Так как $X(0) = X(\pi) = 0,$ то $c_2 = c_1 = 0.$

При $\mu > 0$ общее решение уравнения $X''(x) + \mu X(x) = 0$ имеет вид $X(x) = c_1 \cos\sqrt{\mu}x + c_2 \sin\sqrt{\mu}x,$ а из граничных условий следует $X(0) = c_1 = 0$ и $X(x) = c_2 \sin\sqrt{\mu}x, \ X(\pi) = c_2 \sin\sqrt{\mu}\pi = 0.$ Если $X(x) \ne 0,$

то $c_2 \neq 0$, и поэтому $\sin\sqrt{\mu}\pi = 0$ или $\sqrt{\mu} = n,\ \mu = n^2,\ n = 1,2,3,\ldots$ Подставим $\mu = n^2$ в уравнение для $Y(y)$ $Y''(y) - \left(\lambda + n^2\right)Y(y) = 0$. Вспоминая граничные условия $Y(0) = 0,\ Y(\pi) = 0,$ решение $Y(y) \neq 0$ только в случае, если $-\left(\lambda + n^2\right) > 0$ и

$$Y(y) = C_1 \cos\sqrt{-\left(\lambda + n^2\right)}\, y + C_2 \sin\sqrt{-\left(\lambda + n^2\right)}\, y.$$

Так как $Y(0) = 0,$ то $c_1 = 0$ и $Y(y) = c_2 \sin\sqrt{-\left(\lambda + n^2\right)}\, y.$

Из условия $Y(\pi) = 0$ имеем $Y(\pi) = c_2 \sin\sqrt{-\left(\lambda + n^2\right)}\, \pi = 0$ или $\sqrt{-\left(\lambda + n^2\right)}\pi = m\pi,\ \sqrt{-\left(\lambda + n^2\right)} = m,\quad -\left(\lambda + n^2\right) = m^2,\ m = 1,2,\ldots$

В результате собственные числа имеют вид: $\lambda_{nm} = -\left(m^2 + n^2\right)$, а соответствующие собственные функции выглядят так:

$$u_{nm}(x,y) = X_n(x)Y_m(y) = c_{nm} \sin nx \sin my.$$

Вспоминая свойство ортанормированности собственных функций $\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi u_{nm}^2(x,y)dxdy = 1,$ вычисляем

$$\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi C_{nm}^2 \sin^2 nx \sin^2 my dxdy = 1 \Leftrightarrow C_{nm}^2 \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2nx}{2}dx \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2my}{2}dy = 1 \Leftrightarrow$$

$$C_{nm}^2 \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Bigg|_0^\pi \left(\frac{1}{2}y - \frac{\sin 2my}{4m}\right)\Bigg|_0^\pi = 1 \Leftrightarrow C_{nm}^2 \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{\sin 2n\pi}{4n}\right)\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{\sin 2m\pi}{4m}\right) = 1.$$

Учитывая $\sin n\pi = 0, n = 1,2,3,\ldots,$ получим коэффициенты $c_{nm} = \frac{2}{\pi}$ и $u_{nm}(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin nx \sin my\quad m = 1,2,\ldots,\ n = 1,2,3,\ldots$

Задания на контрольную работу

Номера задач выбираются по таблице в соответствии с последними двумя цифрами шифра и первой буквой фамилии. Например, студент Сидоров, шифр 1-74-3106 решает в контрольной работе задачи 6, 20, 30, 36, 47.

Последняя цифра шифра	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номера задач	1 31	2 32	3 33	4 34	5 35	6 36	7 37	8 38	9 39	10 40
Предпоследняя цифра шифра	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номера задач	11 21	12 22	13 23	14 24	15 25	16 26	17 27	18 28	19 29	20 30
Первая буква фамилии	**А,И Т**	**Б,О Ц**	**В,Н Х**	**Г,Ф Я**	**Д,З Л**	**Е,М Р**	**Ж,С Ч**	**К Э**	**П Щ**	**У,Ш Ю**
Номера задач	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Контрольная работа

Задачи 1–10

Найти решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка.

1. $\cos^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cos^2 y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(0,y)=\mathrm{tg}\,y.$

2. $\sin y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\cos x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(x,\dfrac{\pi}{2})=\sin^3 x.$

3. $\sin^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sin^2 y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(\dfrac{\pi}{2},y)=\mathrm{ctg}^3 y.$

4. $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\cos x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(x,0)=\sin x.$

5. $\cos^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin^2 y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(x,\dfrac{\pi}{2})=\mathrm{tg}^2 x.$

6. $\sin y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(0,y)=\cos^2 y.$

7. $\sin^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cos^2 y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(x,0)=\mathrm{ctg}^2 x.$

8. $\sin y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cos x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(\pi,y)=\cos^3 y.$

9. $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cos x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(0,y)=\sin^2 y.$

10. $\sin y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sin x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(x,\dfrac{\pi}{2})=\cos x.$

Задачи 11–14

Определить тип и привести уравнение к каноническому виду.

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-12\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}-5\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+20\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Задачи 15–20

Определить тип, привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения.

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ 18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ 19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ 20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Задачи 21–30

Найти решения задачи Коши для волнового уравнения методом Даламбера. Найти положения точек колеблющейся струны и сделать чертеж в моменты времени t_0 и t_1.

21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=\cos\dfrac{x}{4},\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\sin\dfrac{x}{4},\ t_0=0,\ t_1=\dfrac{\pi}{2}.$

22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=0,2\cos 5x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=2\sin 5x,\ t_0=\dfrac{\pi}{20},\ t_1=\pi.$

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=0,6\sin\dfrac{3x}{2},\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,3\cos\dfrac{3x}{2},\ t_0=0,\ t_1=\pi.$

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{36}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=0,4\sin 3x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,2\cos 3x,\ t_0=\pi,\ t_1=2\pi.$

25. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=0,8\cos 2x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,4\sin 2x,\ t_0=\pi,\ t_1=2\pi.$

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=\sin\dfrac{x}{3},\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=3\cos\dfrac{x}{3},\ t_0=0,\ t_1=\dfrac{3\pi}{2}.$

27. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=0,4\cos\dfrac{3x}{2},\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,6\sin\dfrac{3x}{2},\ t_0=\dfrac{\pi}{3},\ t_1=\pi.$

28. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=0,2\sin 4x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,4\cos 4x,\ t_0=\dfrac{\pi}{4},\ t_1=\dfrac{\pi}{2}.$

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=\cos\dfrac{x}{3},\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=2\sin\dfrac{x}{3},\ t_0=0,\ t_1=\dfrac{\pi}{4}.$

30. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u\big|_{t=0}=0,9\sin\dfrac{2x}{3},\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=3\cos\dfrac{2x}{3},\ t_0=0,\ t_1=\dfrac{\pi}{10}.$

Задачи 31–40

Решите методом Фурье уравнение теплопроводности на данном отрезке с граничными условиями $u(0,t)=u(l,t)=0$ и с заданным начальным условием.

31. $u'_t = 49u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{140}, & 0 \le x < 7, \\ \dfrac{14-x}{140}, & 7 \le x \le 14. \end{cases}$

32. $u'_t = 4u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{80}, & 0 \le x < 4, \\ \dfrac{8-x}{80}, & 4 \le x \le 8. \end{cases}$

33. $u'_t = 25u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{400}, & 0 \le x < 10, \\ \dfrac{20-x}{400}, & 10 \le x \le 20. \end{cases}$

34. $u'_t = u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{20}, & 0 \le x < 2, \\ \dfrac{4-x}{20}, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$

35. $u'_t = 9u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{90}, & 0 \le x < 3, \\ \dfrac{6-x}{90}, & 3 \le x \le 6. \end{cases}$

36. $u'_t = 64u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{120}, & 0 \le x < 6, \\ \dfrac{12-x}{120}, & 6 \le x \le 12. \end{cases}$

37. $u'_t = 144u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{300}, & 0 \le x < 12, \\ \dfrac{24-x}{300}, & 12 \le x \le 24. \end{cases}$

38. $u'_t = 16u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{160}, & 0 \le x < 8, \\ \dfrac{16-x}{160}, & 8 \le x \le 16. \end{cases}$

39. $u'_t = 36u''_{xx}, \quad u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{x}{200}, & 0 \le x < 9, \\ \dfrac{18-x}{200}, & 9 \le x \le 18. \end{cases}$

40. $u'_t = 100u''_{xx}, \qquad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{500}, & 0 \le x < 20, \\ \dfrac{40-x}{500}, & 20 \le x \le 40. \end{cases}$

Задачи 41–50

Найти собственные функции и собственные значения задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u, \ u\big|_s = 0$$

в области Ω с границей S.

41. Область $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 2\pi, \ 0 \le y \le 2\pi\}$.
42. Область $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$.
43. Область $\Omega = \left\{(x,y): 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
44. Область $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 2\}$.
45. Область $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 3\pi, \ 0 \le y \le 3\pi\}$.
46. Область $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 4, \ 0 \le y \le 4\}$.
47. Область $\Omega = \left\{(x,y): 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, \ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}\right\}$.
48. Область $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 3, \ 0 \le y \le 3\}$.
49. Область $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 4\pi, \ 0 \le y \le 4\pi\}$.
50. Область $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 5, \ 0 \le y \le 5\}$.

4.3. Текущий контроль
Тренировочные тесты

Тест №1

1. Укажите порядок дифференциального уравнения с частными производными
$\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + 3\dfrac{\partial^4 u(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z} = 10x^2$

a) первый
b) второй
c) третий
d) четвертый

2. Общим решением уравнения с частными производными $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 2x$ является…

a) $x^2 y + f(x) + g(y)$

b) $x^2 y + f(x)$

c) $2xy + f(x) + g(y)$

d) $x^2 y + g(y)$

3. Условия, которые задают поведение искомой функции в заданный момент времени во всех точках области изменения пространственных переменных называются условиями…

a) граничными

b) начальными

c) первого рода

d) Коши-Римана

4. Уравнение с частными производными вида $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + fu = 0$ моделирует физический процесс…

a) молекулярной диффузии

b) колебаний воздуха

c) конвективного переноса вещества

d) плавления твердого тела

5. Уравнением переноса в математической физике называется уравнение с частными производными …

a) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

b) $u \frac{\partial u}{\partial t} + v(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

c) $u^2 + v(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t) u = 0$

d) $\frac{\partial u}{\partial t} + v(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t) u = 0$

6. Уравнением Максвелла является уравнение …

a) $\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 \frac{\partial u}{\partial x}$

b) $\frac{\mu}{c_0} \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$

c) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

d) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + fu = 0$

Тест №2

1. Укажите название дифференциального уравнения с частными производными, которое является линейным относительно старших производных…
a) каноническое
b) характеристическое
c) квазилинейное
d) однородное

2. Дифференциальное уравнение вида $a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u)$ является…
a) квазилинейным уравнением первого порядка
b) линейным уравнением первого порядка
c) неквазилинейным уравнением первого порядка
d) нелинейным уравнением второго порядка

3. Укажите вид дифференциального уравнения с частными производными $a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0$
a) линейное неоднородное
b) квазилинейное неоднородное
c) нелинейное однородное
d) линейное однородное

4. Укажите название системы уравнений $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}$ для получения общего решения дифференциального уравнения $a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u)$
a) каноническая
b) характеристическая
c) фундаментальная
d) обобщенная

5. Решением задачи Коши для линейного уравнения первого порядка $3\frac{\partial z}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z(x,0) = \cos(4x)$ является…
a) $\cos(4x+3y)$

b) $\sin(4x-3y)$
c) $\cos(4x-3y)$
d) $4x-3y+C$

6. Задачей Коши называется задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям…
a) граничным
b) однородным
c) начальным и граничным
d) начальным

Тест №3

1. Если число $D = B^2 - AC > 0$ для уравнения $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} =$ $= F\left(x, y, u, u_x, u_y\right)$, то уравнение называется…
a) эллиптическим
b) параболическим
c) гиперболическим
d) каноническим

2. Укажите тип уравнения $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F\left(x, y, u, u_x, u_y\right)$, если $D = B^2 - AC = 0$
a) канонический
b) эллиптический
c) гиперболический
d) параболический

3. Определите знак числа $D = B^2 - AC$, если уравнение $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} =$ $= F\left(x, y, u, u_x, u_y\right)$ является эллиптическим
a) $D > 0$
b) $D < 0$
c) $D = 0$
d) неизвестно

4. Определите тип дифференциального уравнения с частными производными $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 10\frac{\partial u}{\partial y} - 7xu = 0$
a) эллиптический
b) канонический
c) гиперболический
d) параболический

5. Укажите название формы записи уравнения с частными производными второго порядка параболического типа $u_{tt} = R(s,t,u,u_s,u_t)$

a) каноническая
b) характеристическая
c) обобщенная
d) форма Коши

6. Уравнение с частными производными второго порядка гиперболического типа в канонической форме имеет вид…

a) $u_{st} - u_{tt} = R(s,t,u,u_s,u_t)$
b) $u_{ss} + u_{tt} = R(s,t,u,u_s,u_t)$
c) $u_{st} = R(s,t,u,u_s,u_t)$
d) $u_{tt} = R(s,t,u,u_s,u_t)$

Тест №4

1. При выводе волнового уравнения используется закон…

a) сохранения массы
b) сохранения энергии
c) сохранения заряда
d) второй закон Ньютона

2. Физический процесс колебаний струны моделируется уравнением …

a) $u'_t = a^2 u''_{xx}$
b) $u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = f(x,t)$
c) $u''_{tt} + u''_{xx} = f(x,t)$
d) $u'_t = a^2 u'_x$

3. Плавность колебаний струны означает…

a) непрерывность графика кривой
b) начальные скорости отсутствуют
c) маленький угол между касательной к графику кривой и осью Ox
d) периодичность графика кривой

4. Решением Даламбера задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} = 49u_{xx}$, $u(x,0) = 4\sin x$, $u_t(x,0) = 0$ является…

a) $u(x,t) = 2(\cos(x-7t) + \cos(x+7t))$
b) $u(x,t) = 2(\sin(x-7t) + \sin(x+7t))$
c) $u(x,t) = 2(\sin(x-7t) - \sin(x+7t))$
d) $u(x,t) = 4(\cos(x-7t) - \sin(x+7t))$

5. Слагаемое $\frac{1}{2}\left(f\left(x+at\right)+\int\limits_{0}^{x+at}\frac{g\left(y\right)}{a}dy\right)$ в формуле Даламбера моделирует волну…
a) обратную
b) стоячую
c) прямую
d) начальную

6. Математические условия на концах границы $\frac{\partial u\left(0,t\right)}{\partial x}=\frac{\partial u\left(l,t\right)}{\partial x}=0$ означают…
a) концы струны свободны
b) отсутствует начальная скорость
c) поперечность колебаний струны
d) концы струны закреплены

Тест №5

1. Решение волнового уравнения вида $u\left(x,t\right)=X(x)\cdot T(t)$ ищется методом…
a) Даламбера
b) разделения переменных
c) Эйлера
d) характеристик

2. Задача о поиске значений параметра λ и функций $X(x)$, при которых задача $X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad X(0)=0, \quad X(l)=0$ имеет ненулевые решения, называется задачей…
a) Дирихле
b) Неймана
c) краевой задачей второго рода
d) Штурма-Лиувилля

3. Значения параметра λ, при которых краевая задача $X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad X(0)=0, \quad X(l)=0$ имеет ненулевые решения, называются…
a) собственными числами
b) коэффициентами Фурье
c) специальными числами
d) коэффициентами Штурма-Лиувилля

4. Собственные функции задач Штурма-Лиувилля, полученные методом разделения переменных решения линейных краевых задач математической физики, являются функциями…
a) гармоническими
b) однородными
c) фундаментальными
d) специальными

5. Решение уравнения колебаний струны конечных размеров методом Фурье имеет вид…

a) $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+at)+f(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)dy$

b) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}$

c) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$

d) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

6. Все точки струны в стоячей воде колеблются с частотой…
a) убывающей
b) одинаковой
c) возрастающей
d) периодической

Тест №6

1. Закон сохранения массы используется при выводе уравнения…
a) теплопроводности
b) волнового
c) телеграфного
d) диффузии

2. Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ моделирует физический процесс…
a) молекулярной диффузии
b) конвективный перенос вещества
c) распространения волн
d) стационарный процесс

3. Функция $u(x,t)$ в уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ является…
a) концентрацией примеси в газе
b) напряжением в электрической сети
c) температурой
d) отклонением от положения равновесия

4. Начальным условием для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ является...

a) $u(0,t)=\varphi(t)$

b) $u(x,0)=\varphi(x)$

c) $u(l,t)=0$

d) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=0$

5. При решении краевой задачи $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=u(h,t)=0$ используется метод…

a) Даламбера
b) характеристик
c) Эйлера
d) Фурье

6. Решением задачи о распространении тепла в стенке толщины h является формула…

a) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{h}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{h}t\right)\sin\frac{n\pi x}{h}$

b) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi a}{h}t\cdot\sin\frac{n\pi x}{h}$

c) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\lambda_n^2a^2t}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2h}$

d) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\lambda_n^2a^2t}\cdot\sin\frac{n\pi t}{h}$

Тест №7

1. Стационарный процесс или процесс, не зависящий от времени, моделируется уравнением…

a) волновым
b) теплопроводности
c) Лапласа
d) переноса

2. Краевая задача первого рода для уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad u\big|_s=0$ называется задачей…

a) Неймана
b) Дирихле
c) Штурма-Лиувилля
d) Коши

3. Ньютоновский потенциал или потенциал сил тяготения $u = \frac{\gamma M}{r}$ является решением уравнения…

a) волнового
b) теплопроводности
c) колебаний
d) Лапласа

4. Решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ вида $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n y}{b} e^{-\frac{\pi n x}{b}}$ находится методом…

a) Даламбера
b) Эйлера
c) разделения переменных
d) характеристик

5. Собственными числами оператора Лапласа называются числовые значения λ, для которых имеет нулевые решения уравнение…

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u$

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

c) $\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0$

d) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda u$

6. Краевая задача $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u(0, y) = V$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} u(x, y) < \infty$ является математической моделью…

a) изменения электрического напряжения в длинной линии
b) распространения тепла в полубесконечной пластине
c) конвективного переноса вещества
d) распределения электрического потенциала в полубесконечной пластине

Тест №8

1. Если протяженность электрической цепи сравнима с длиной электромагнитной волны, то используется физическая модель…

a) линии с распределенными параметрами
b) линии с сосредоточенными параметрами
c) уравнения Максвелла
d) линии без параметров

2. Закон Ома используется при выводе уравнения…

a) $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

b) $\frac{\partial i}{\partial x}+Gu+C\frac{\partial u}{\partial t}=0$

c) $\frac{\partial u}{\partial x}+Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}=0$

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\left(x,t\right)$

3. Уравнение $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{RG}{LC}i-\frac{RG}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=0$ называется уравнением…

a) Лапласа
b) теплопроводности
c) переноса
d) телеграфным

4. Одним из основных параметров цепи – коэффициент G – в телеграфном уравнении $\frac{\partial i}{\partial x}+Gu+C\frac{\partial u}{\partial t}=0$ является…

a) индуктивность
b) проводимость утечки
c) емкость
d) сопротивление

5. Если параметры электрической цепи связаны соотношением $RC=LG$, то физическая модель длинной линии называется линия…

a) без потерь
b) без искажений
c) конечной длины
d) стационарная

6. В линиях конечной длины граничное условие вида $\frac{\partial u\left(0,t\right)}{\partial x}=0$, моделирует ситуацию: конец линии $\left(x=0\right)$…

a) изолирован
b) под действием электродвижущей силы
c) замкнут
d) заземлен

Тест №9

1. Узлами сетки в методе сеток для краевой задачи в прямоугольнике $\left[0,a\right]\times\left[0,b\right]$ называются…

a) множество точек $x_i = ih_1; \quad i = 0,1,2,...,N$

b) точки $x_i = ih_1,\ y_j = jh_2,\ i = 0,1,2,...,N,\ j = 0,1,2,...,M$

c) точки $y_j = jh_2,\ j = 0,1,2,...,M$

d) множество значений $u\left(x_i, y_j\right),\ i = 0,1,2,...,N,\ j = 0,1,2,...,M$

2. Функция, рассматриваемая в узлах сетки $u\left(x_i, y_j\right) = u_{ij}, i = 0,1,2,..., j = 0,1,2,...,$ называется функцией…

a) сеточной
b) узловой
c) аппроксимирующей
d) приближенной

3. В методе сеток дробь вида $\dfrac{u\left(x+h,y\right)-u\left(x-h,y\right)}{2h}$ называется…

a) правым разностным отношением
b) левой разностной производной
c) правой разностной производной
d) центральным разностным отношением

4. В методе сеток значение $\dfrac{\partial^2 u\left(x,y\right)}{\partial y^2}$ можно аппроксимировать разностным отношением…

a) $\dfrac{u\left(x+h,y\right)-2u\left(x,y\right)+u\left(x-h,y\right)}{h^2}$

b) $\dfrac{u^2\left(x,y+h\right)-u^2\left(x,y-h\right)}{h^2}$

c) $\dfrac{u\left(x,y+h\right)-2u\left(x,y\right)+u\left(x,y-h\right)}{h^2}$

d) $\dfrac{u\left(x,y+h\right)-u\left(x,y-h\right)}{2h}$

5. В методе сеток укажите порядок точности по h (шаг сетки) аппроксимации второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением $\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}$

a) $O(h)$
b) $O(h^2)$
c) $O(h^3)$
d) C – постоянная

6. В методе простой итерации итерационный процесс сходится, если решения u_{ij}^{v} и u_{ij}^{v+1} аппроксимационных формул задачи Дирихле…

a) отличаются
b) возрастают по абсолютной величине
c) отличаются, но не возрастают по абсолютной величине
d) перестают отличаться

4.4. Таблица правильных ответов на вопросы тренировочного теста

№ теста	раздел	номер вопроса/номера правильных ответов						
1	раздел 1	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	d	a	b	c	d	b
2	раздел 2	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	c	a	d	b	c	d
3	раздел 3	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	c	d	b	d	a	c
4	раздел 4	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	d	b	c	b	a	a
5	раздел 5	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	b	d	a	d	c	b
6	раздел 6	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	d	a	c	b	d	c

7	раздел 7	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	c	b	d	c	a	d
8	раздел 8	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	a	c	d	b	b	a
9	раздел 9	номер вопроса	1	2	3	4	5	6
		правильный ответ	b	a	d	c	b	d

4.5. Итоговый контроль

Вопросы для подготовки к экзамену

Итоговым видом контроля является экзамен. Ниже приводятся вопросы для подготовки к экзамену.

1. Определение дифференциального уравнения с частными производными. Порядок уравнения с частными производными. Общее решение. Начальные и граничные условия.
2. Вывод уравнения переноса, моделирующего процесс переноса вещества.
3. Уравнения Максвелла для плоских электромагнитных волн и их преобразования к уравнениям переноса.
4. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка, квазилинейное уравнение. Линейное дифференциальное уравнение с частными производными, общее решение. Характеристическая система для получения общего решения.
5. Задача Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка. Пример решения задачи Коши для уравнения переноса.
6. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными.
7. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка (уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типа).
8. Вывод уравнения колебаний струны.
9. Первая, вторая краевые задачи для волнового уравнения. Виды начальных и граничных условий.

10. Метод Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера.
11. Физическая интерпретация формулы Даламбера. Прямая, обратная волна.
12. Краевая задача, моделирующая колебания полубесконечной струны. Решение задачи Коши для полубесконечной струны как решение для бесконечной струны при положительных x.
13. Физическая интерпретация влияния границы при решении задачи Коши для полубесконечной струны.
14. Метод разделения переменных, метод Фурье для решения уравнения колебаний струны. Вывод формулы для решения.
15. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные функции, собственные значения задачи Штурма-Лиувилля. Специальные функции.
16. Физическая интерпретация решения в форме Фурье. Стоячая волна. Основной тон, обертон струны.
17. Сравнение методов Даламбера и Фурье для струны конечных размеров. Доказательство равносильности методов.
18. Вывод уравнения диффузии.
19. Вывод уравнения теплопроводности.
20. Классификация краевых задач. Краевые задачи первого, второго рода, смешанная краевая задача.
21. Задача Коши, моделирующая распространение тепла в бесконечном стержне. Интеграл Пуассона, фундаментальное решение уравнения теплопроводности.
22. Метод Фурье, метод разделения переменных для решения одномерной задачи о распространении тепла в стенке (или тонком стержне).
23. Решение задачи о распределении температуры в двух полубесконечных стержнях, соединенных торцами. Функция Лапласа.
24. Метод разделения переменных для решения первой краевой задачи, моделирующей процесс распространения тепла в пластине. Физическая интерпретация решения.
25. Вывод уравнения Лапласа. Решение уравнения Лапласа. Ньютоновский потенциал.
26. Собственные функции, собственные значения оператора Лапласа. Задача Дирихле, задача Неймана.
27. Вывод и решение краевой задачи, моделирующей распределение электрического потенциала в полубесконечной пластине.
28. Основные требования к передающей сигнал электрической цепи. Физическая модель длинных линий с распределенными и сосредоточенными параметрами.
29. Вывод телеграфного уравнения. Начальные и граничные условия.
30. Решение телеграфного уравнения, когда процесс не зависит от времени (установившийся процесс).
31. Частный случай телеграфного уравнения. Линия без потерь.
32. Частный случай телеграфного уравнения. Линия без искажений.

33. Решение краевой задачи для определения колебаний напряжения в линии конечной длины.
34. Сетки, узлы сетки, сеточные функции.
35. Разностное отношение. Правая, левая и центральная разностные производные первого порядка. Погрешность аппроксимации производных.
36. Разностная аппроксимация вторых производных. Погрешность аппроксимации.
37. Применение метода сеток для аппроксимации задачи Дирихле в прямоугольнике.
38. Метод простой итерации для решения задачи Дирихле в прямоугольнике.
39. Метод Зейделя для решения задачи Дирихле в прямоугольнике.
40. Условия прекращения счета в методе итераций и Зейделя.

ОГЛАВЛЕНИЕ