

Оглавление

1	Краткие теоретические сведения	4
	<i>1.1 Основные величины, характеризующие синусоидальные колебания</i>	<i>4</i>
	<i>1.2 Действующие и средние значения синусоидальных величин</i> ..	<i>4</i>
	<i>1.3 Представление синусоидально изменяющихся величин в виде комплексных чисел</i>	<i>5</i>
	1.3.1 <i>Пример 1</i>	<i>6</i>
	<i>1.4 Комплексное сопротивление</i>	<i>7</i>
	<i>1.5 Алгебраические операции с комплексными числами, векторная диаграмма</i>	<i>7</i>
	1.5.1 <i>Пример 2</i>	<i>9</i>
	1.5.2 <i>Пример 3</i>	<i>10</i>
	1.5.3 <i>Пример 4</i>	<i>10</i>
	1.5.4 <i>Пример 5</i>	<i>11</i>
	1.5.5 <i>Пример 6</i>	<i>12</i>
	<i>1.6 Резистор в цепи синусоидального тока</i>	<i>12</i>
	<i>1.7 Индуктивность в цепи синусоидального тока</i>	<i>13</i>
	<i>1.8 Конденсатор в цепи синусоидального тока</i>	<i>15</i>
	<i>1.9 Символический (комплексный) метод расчета цепей синусоидального тока</i>	<i>17</i>
	<i>1.10 Законы Кирхгофа для мгновенных значений</i>	<i>17</i>
	<i>1.11 Законы Кирхгофа в комплексной форме</i>	<i>18</i>
	1.11.1 <i>Пример 7</i>	<i>20</i>
	<i>1.12 Мощность в цепи синусоидального тока</i>	<i>26</i>
	<i>1.13 Комплексная мощность</i>	<i>28</i>
	1.13.1 <i>Пример 8</i>	<i>29</i>
	<i>1.14 Баланс мощностей в цепях синусоидального тока</i>	<i>30</i>
	1.14. <i>Пример 9</i>	<i>30</i>
2	Задание	33
3	Библиографический список	51

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Основные величины, характеризующие синусоидальные колебания

Переменные синусоидальные напряжения и токи являются синусоидальными функциями времени:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (\text{В});$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (\text{А});$$

Где U_m, I_m - амплитудные значение напряжения и тока;

$(\omega t + \varphi)$ - фаза колебания;

φ_u, φ_i - начальные фазы колебаний напряжения и тока;

$(\varphi_u - \varphi_i)$ - сдвиг по фазе между напряжением и током;

$\omega = 2\pi f$ - угловая частота колебания;

f - частота колебания;

$T = 1/f$ - период колебания, т.е. время, за которое совершается одно полное колебание.

1.2 Действующие и средние значения синусоидальных величин

Действующим значением периодически изменяющейся величины $i(t)$ называется ее среднеквадратическое значение за период колебания.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt};$$

Для синусоидальной величины соотношение между ее действующим и амплитудным значением

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i) dt};$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}};$$

Под *средним* значением периодически изменяющейся величины $i(t)$ понимают ее среднее значение за полпериода колебания.

$$I_{cp} = \frac{1}{(T/2)} \int_0^{T/2} i(t) dt$$

Для синусоидальной величины соотношение между ее средним и амплитудным значением

$$I_{cp} = \frac{1}{(T/2)} \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t + \varphi_i) dt$$

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m$$

1.3 Представление синусоидально изменяющихся величин в виде комплексных чисел

Любая синусоидально изменяющаяся величина может быть представлена ее изображением в комплексной форме согласно формуле Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi;$$

Где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица;

Помножив, левую часть выражения на $I_m e^{j\omega t}$, получим

$$e^{j\varphi} I_m e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m \cos(\omega t + \varphi) + j I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Очевидно, что мнимая часть комплексного числа $I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$, равная $I_m \sin(\omega t + \varphi)$ представляет собой аналитическую форму записи синусоидального колебания и содержит в себе всю информацию об этом колебании, т.е. амплитуду, угловую частоту, начальную фазу. Полагая $t=0$, получим

$$I_m e^{j(\omega \cdot 0 + \varphi)} = I_m e^{j\varphi} = I_m \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) + j I_m \sin(\omega \cdot 0 + \varphi);$$

$$I_m e^{j\varphi} = I_m \cos \varphi + jI_m \sin \varphi;$$

Таким образом, изображением синусоидально изменяющейся величины $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ в комплексной форме является следующий комплекс действующего значения этой величины (комплексы синусоидально изменяющихся величин записываются прописными буквами с точкой сверху)

$$\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = I e^{j\varphi} = I \cos \varphi + jI \sin \varphi;$$

Где I_m - амплитудное значение синусоидально изменяющейся величины;

I - действующее значение синусоидально изменяющейся величины;

φ - начальная фаза колебания.

Выражение вида $\dot{I} = I e^{j\varphi}$ представляет собой *показательную* форму записи комплексного числа.

Выражение вида $\dot{I} = I \cos \varphi + jI \sin \varphi$ представляет собой *алгебраическую* форму записи комплексного числа.

1.3.1 Пример 1

Известна аналитическая форма записи падения напряжения на элементе цепи:

$$u(t) = 141.42 \cdot \sin(314t + 60^\circ).$$

Решение

Комплекс действующего значения этой величины запишется следующим образом:

$$\dot{U} = \frac{141.42}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} = 100 e^{j60^\circ} = 100 \cos 60^\circ + j100 \sin 60^\circ;$$

$$\dot{U} = 100 e^{j60^\circ} = 50 + j86.603;$$

1.4 Комплексное сопротивление

Согласно закону Ома в комплексной форме, комплексным сопротивлением \underline{z} элемента в цепи синусоидального тока является отношение комплекса напряжения на элементе к комплексу тока, протекающего через элемент, т.е.

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}};$$

Комплексное сопротивление обозначается буквой \underline{z} , с чертой снизу, указывающей на комплексный характер величины. Пусть заданы в общем виде комплекс действующего значения напряжения на элементе и комплекс действующего значения тока, протекающего через элемент:

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u};$$

$$\dot{I} = Ie^{j\varphi_i};$$

Тогда комплексное сопротивление элемента запишется в виде:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi};$$

Где Z – модуль комплексного сопротивления элемента;

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ - сдвиг по фазе, вносимый элементом.

1.5 Алгебраические операции с комплексными числами, векторная диаграмма

Изобразим комплексное число $\underline{a} = b + jc$ как вектор на комплексной плоскости (рис.2.1), где b – это проекция вектора на действительную ось, c - это проекция вектора на мнимую ось.

Очевидно, что алгебраическая форма записи комплексного числа $\underline{a} = b + jc$ определяет вектор в декартовых координатах.

Этот же вектор можно задать, определив его модуль ρ и угол между направлением вектора и положительным направлением действительной оси φ , т.е. определить вектор в полярных координатах (рис.2.1). Для этого воспользуемся показательной формой записи комплексного числа, т.е. $\underline{a} = \rho \cdot e^{j\varphi}$. Угол φ отсчитывается против часовой стрелки от положительного направления действительной оси.

Переход от алгебраической формы $\underline{a} = b + jc$ к показательной $\underline{a} = \rho \cdot e^{j\varphi}$ выполняется по формулам, следующим из рис.1.1:

$$\underline{a} = b + jc = \rho \cdot e^{j\varphi}, \text{ где } \begin{cases} \rho = \sqrt{b^2 + c^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b}\right), (b > 0) \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b}\right) + 180^\circ, (b < 0) \end{cases}$$

Обратный переход от показательной формы $\underline{a} = \rho \cdot e^{j\varphi}$ к алгебраической $\underline{a} = b + jc$ следует из формулы Эйлера:

$$\underline{a} = \rho \cdot e^{j\varphi} = b + jc, \text{ где } \begin{cases} b = \rho \cdot \cos \varphi \\ c = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

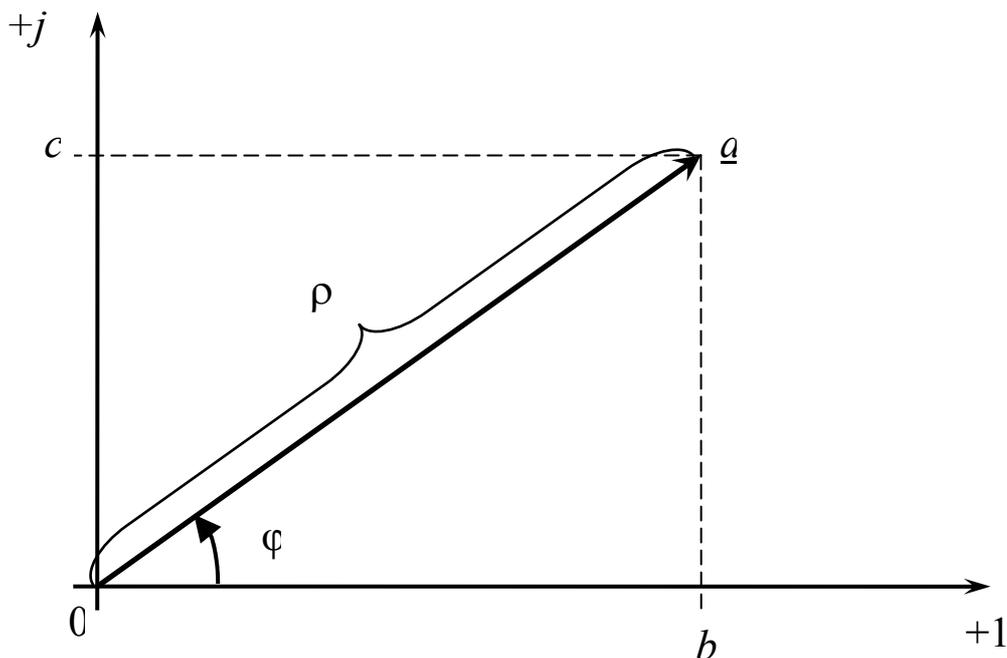


Рисунок 1.1

Векторной диаграммой называется совокупность векторов ЭДС, напряжений и токов, изображенных в одной системе координат. Наиболее распространенным типом векторной диаграммы является диаграмма, которая содержит на комплексной плоскости комплексы действующих значений ЭДС, напряжений и токов.

1.5.1 Пример 2

Построить векторную диаграмму напряжений и токов на участке цепи, если известно, что: $\dot{U} = 10e^{j30^\circ}$ (В), $\dot{I} = 5e^{-j45^\circ}$ (А).

Решение

Представим комплексы напряжений и токов в алгебраической форме:

$$\dot{U} = 10e^{j30^\circ} = 10\cos 30^\circ + j10\sin 30^\circ$$

$$\dot{U} = 8.66 + j5$$

$$\dot{I} = 5e^{-j45^\circ} = 5\cos(-45^\circ) + j\sin(-45^\circ)$$

$$\dot{I} = 3.54 - j3.54$$

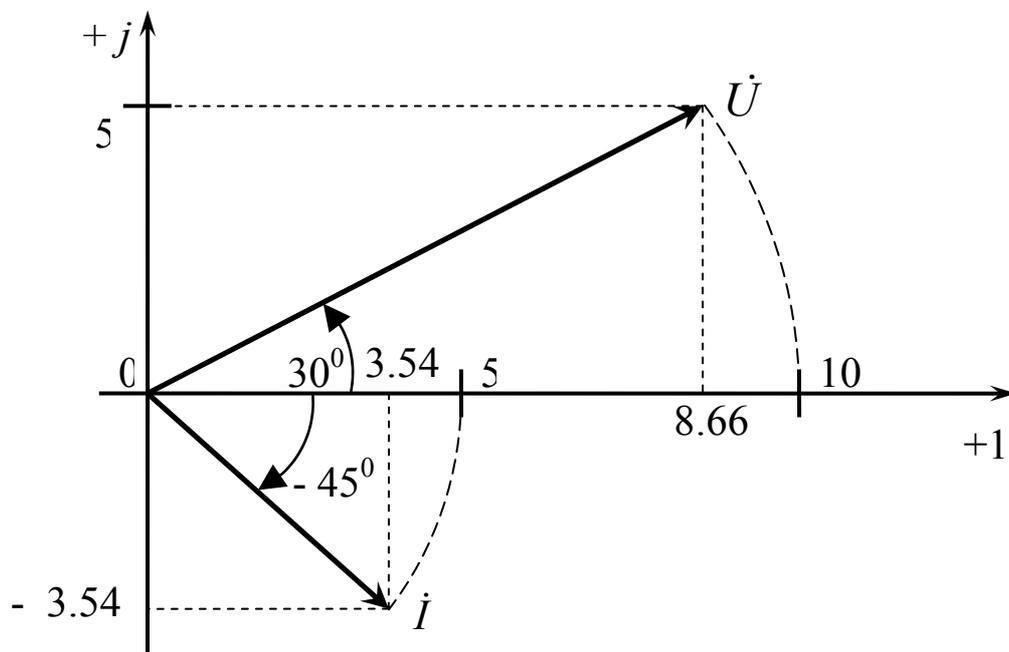


Рисунок 1.2

Изобразим их на комплексной плоскости, задаваясь для каждого вектора значениями его проекций на действительную и мнимую оси, либо модулем вектора и углом между направлением вектора и положительным направлением действительной оси. Векторная диаграмма показана на рис.1.2.

Если заданы два комплексных числа $\dot{I}_1 = I'_1 + jI''_1$ и $\dot{I}_2 = I'_2 + jI''_2$, то их суммой будет следующее комплексное число:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (I'_1 + I'_2) + j(I''_1 + I''_2) = I' + jI'';$$

При сложении комплексных чисел отдельно суммируются их действительные и мнимые части. Очевидно, что удобно суммировать комплексные числа, представленные в алгебраической форме.

1.5.2 Пример 3

Известны комплексные сопротивления ветвей: $\underline{Z}_1 = 2 + j5$ и $\underline{Z}_2 = 4 - j8$. Найти их сумму.

Решение

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 2 + j5 + 4 - j8 = 6 - j3;$$

Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, осуществляется почленным перемножением их действительных и мнимых частей:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2 = I_1' I_2' + j I_1'' I_2' + j I_2'' I_1' + j^2 I_1'' I_2''$$

$$\dot{I} = I_1' I_2' - I_1'' I_2'' + j(I_1'' I_2' + I_2'' I_1'); \text{ т.к. } j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1;$$

1.5.3 Пример 4

Известны комплексные сопротивления ветвей: $\underline{Z}_1 = 2 + j5$ и $\underline{Z}_2 = 4 - j8$. Найти их произведение.

Решение

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (2 + j5) \cdot (4 - j8) = 8 + j20 - j16 + 40 = 48 + j4.$$

В случае если необходимо разделить два комплексных числа $\dot{I}_1 = I_1' + j I_1''$ и $\dot{I}_2 = I_2' + j I_2''$, заданных в алгебраической форме, например:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{I_1' + j I_1''}{I_2' + j I_2''};$$

то для того, чтобы представить искомое комплексное число \dot{I} в алгебраической форме, необходимо умножить и числитель, и знаменатель этого числа на сопряженное комплексное значение знаменателя I_2^* .

Числом I_2^* , комплексно сопряженным с числом \dot{I}_2 , называется число, отличающееся от исходного знаком мнимой части, т.е.
 $I_2^* = I_2' - jI_2''$.

Таким образом

$$j = \frac{\dot{I}_1 \cdot I_2^*}{\dot{I}_2 \cdot I_2^*} = \frac{(I_1' + jI_1'') \cdot (I_2' - jI_2'')}{(I_2' + jI_2'') \cdot (I_2' - jI_2'')} = \frac{I_1'I_2' + I_1''I_2'' + j(I_1''I_2' - I_2''I_1')}{(I_2')^2 - (jI_2'')^2},$$

$$j = \frac{I_1'I_2' + I_1''I_2'' + j(I_1''I_2' - I_2''I_1')}{(I_2')^2 + (I_2'')^2} = \frac{I_1'I_2' + I_1''I_2''}{(I_2')^2 + (I_2'')^2} + j \frac{I_1''I_2' - I_2''I_1'}{(I_2')^2 + (I_2'')^2};$$

где $\frac{I_1'I_2' + I_1''I_2''}{(I_2')^2 + (I_2'')^2}$ - действительная часть комплексного числа \dot{I} ;

$\frac{I_1''I_2' - I_2''I_1'}{(I_2')^2 + (I_2'')^2}$ - мнимая часть комплексного числа \dot{I} .

1.5.4 Пример 5

Известны комплексные сопротивления ветвей: $\underline{Z}_1 = 2 - j6$ и $\underline{Z}_2 = 3 - j4$. Найти их частное.

Решение

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{(2 - j6)}{(3 - j4)} = \frac{(2 - j6)(3 + j4)}{(3 - j4)(3 + j4)} = \frac{6 - j18 + j8 + 24}{3^2 + 4^2};$$

$$\underline{Z} = \frac{30 - j10}{25} = 1.2 - j0.4$$

Очевидно, что операции умножения и деления комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, приводит к достаточно громоздким преобразованиям, поэтому подобные операции удобнее производить с комплексными числами, заданными в показательной форме. Например, если $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_1}$, а $\dot{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}$ то их произведение:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \dot{I}_2 = I_1 e^{j\varphi_1} I_2 e^{j\varphi_2} = I_1 I_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

Частное от деления этих чисел:

$$\dot{i} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{I_1 e^{j\varphi_1}}{I_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{I_1}{I_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

1.5.5 Пример 6

Известны комплексные сопротивления ветвей: $\underline{Z}_1 = 6e^{j30^\circ}$ и $\underline{Z}_2 = 3e^{-j45^\circ}$. Найти их произведение и частное.

Решение

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = 6e^{j30^\circ} \cdot 3e^{-j45^\circ} = 18e^{-j15^\circ};$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{6e^{j30^\circ}}{3e^{-j45^\circ}} = 2e^{j75^\circ}.$$

1.6 Резистор в цепи синусоидального тока

Напряжение на резистивном элементе и ток, протекающий через него, связаны законом Ома. Если $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, то:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi)}{R} = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Очевидно, что напряжение и ток имеют одинаковую начальную фазу, т.е. резистивный элемент не вносит сдвига по фазе между напряжением и током. График мгновенных значений напряжения и тока представлен на рис. 1.3

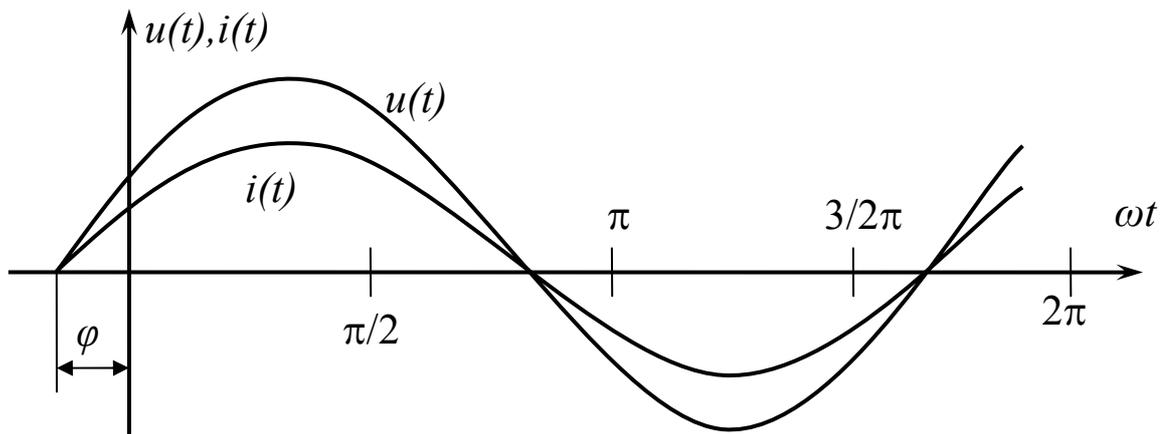


Рисунок 1.3

Комплексы действующих значений напряжения и тока на резистивном элементе (смотри п. 1.3):

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi};$$

$$\dot{I} = \frac{Ue^{j\varphi}}{R} = Ie^{j\varphi}.$$

Комплексное сопротивление резистивного элемента равно его активному сопротивлению:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi}}{\frac{Ue^{j\varphi}}{R}} = R.$$

Векторная диаграмма представлен на рис.1.4.

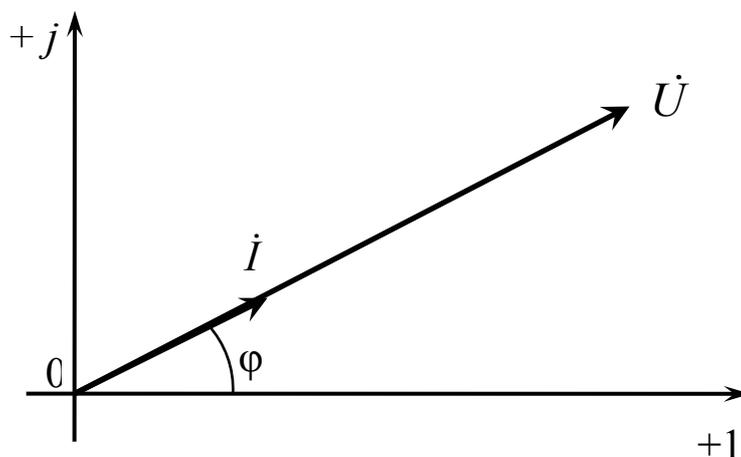


Рисунок 1.4

1.7 Индуктивность в цепи синусоидального тока

Напряжение на индуктивности и ток, протекающий через него, связаны следующим соотношением:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Если $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, то:

$$u(t) = I_m \cdot L\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) = I_m x_L \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

где $x_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление переменному синусоидальному току катушки индуктивности.

Очевидно, что напряжение на катушке индуктивности опережает ток через нее по фазе на угол $\pi/2$. График мгновенных значений напряжения и тока представлен на рис.1.5.

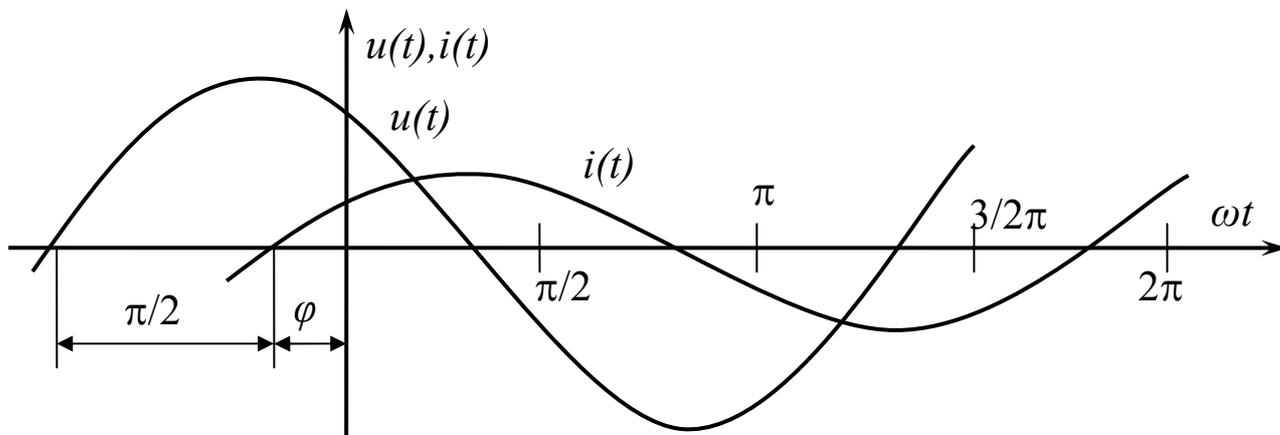


Рисунок 1.5

Комплексы действующих значений напряжения и тока на индуктивности:

$$\dot{I} = I e^{j\varphi};$$

$$\dot{U} = I \cdot x_L \cdot e^{j(\varphi + \pi/2)}.$$

Комплексное сопротивление катушки индуктивности:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{I \cdot x_L \cdot e^{j(\varphi + \pi/2)}}{I e^{j\varphi}} = x_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jx_L;$$

Выражение $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ следует непосредственно из формулы Эйлера:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j.$$

Векторная диаграмма представлен на рис.1.6.

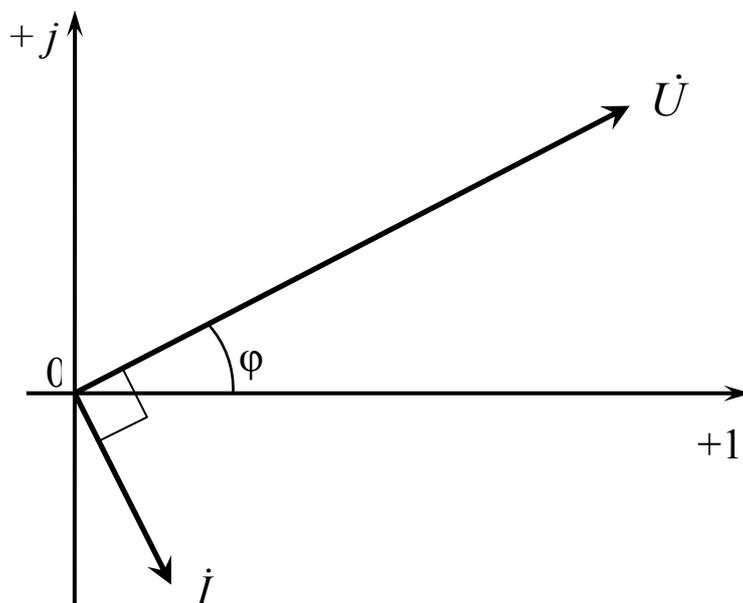


Рисунок 1.6

1.8 Конденсатор в цепи синусоидального тока

Напряжение на конденсаторе и ток, протекающий через него, связаны между собой следующим соотношением:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

Если $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, то:

$$i(t) = U_m \cdot \omega C \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_m}{x_C} \sin(\omega t + \varphi + \pi/2);$$

где $x_C = \frac{1}{C\omega}$ - емкостное сопротивление конденсатора переменному синусоидальному току.

Очевидно, что напряжение на конденсаторе отстает от тока через него по фазе на угол $\pi/2$. График мгновенных значений напряжения и тока представлен на рис.1.7.

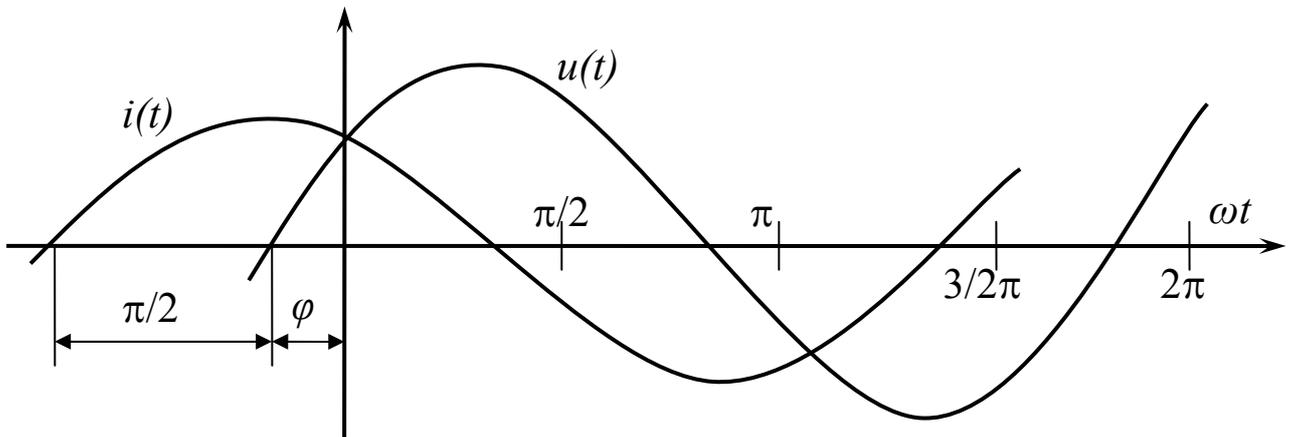


Рисунок 1.7

Комплексы действующих значений напряжения и тока на конденсаторе:

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi};$$

$$\dot{I} = \frac{U}{x_C \cdot e^{j(\varphi + \pi/2)}}.$$

Комплексное сопротивление конденсатора:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi}}{U \cdot x_C \cdot e^{j(\varphi + \pi/2)}} = x_C e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jx_C;$$

Векторная диаграмма представлен на рис.1.8.

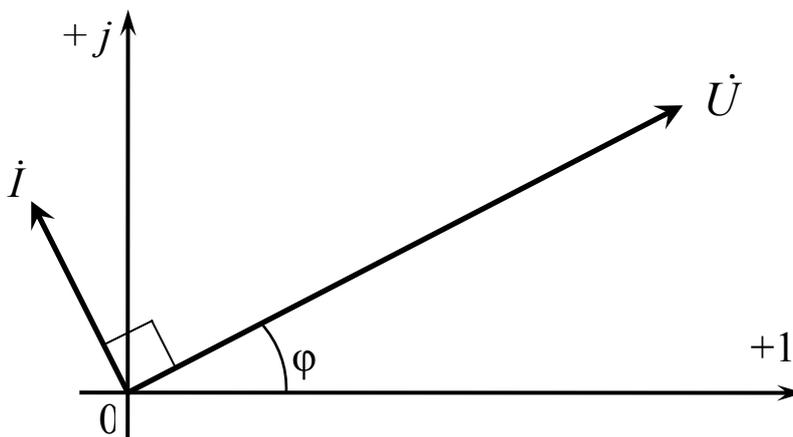


Рисунок 1.8

1.9 Символический (комплексный) метод расчета цепей синусоидального тока

Сущность символического (комплексного) метода расчета цепей синусоидального тока состоит в том, что все известные напряжения и токи, а также элементы цепи заменяются их изображениями в комплексной форме, т.е. напряжения и токи заменяются комплексами их действующих значений, элементы цепи – их комплексными сопротивлениями.

Для расчета применимы все методы, используемые в цепях постоянного тока: метод эквивалентных преобразований, метод непосредственного применения законов Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного генератора и др., но только в комплексной форме.

1.10 Законы Кирхгофа для мгновенных значений

Первый закон Кирхгофа для мгновенных значений: алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле равна нулю.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0,$$

где k – число ветвей, соединенных в узле.

Второй закон Кирхгофа для мгновенных значений: алгебраическая сумма напряжений на элементах контура в заданный момент времени равна алгебраической сумме ЭДС в том же контуре в тот же момент времени:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{p=1}^m e_p,$$

где k – порядковый номер напряжения;

p – порядковый номер ЭДС;

n – суммарное число элементов в контуре;

m – число ЭДС в контуре.

1.11 Законы Кирхгофа в комплексной форме

Как показано в п. 1.3, синусоидальные функции времени можно представить в комплексной форме. Осуществив подобный переход, можно записать законы Кирхгофа для цепи синусоидального тока в комплексной форме.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексов токов в узле электрической цепи равна нулю.

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0,$$

где k – число ветвей, соединенных в узле.

Например, для цепи, изображенной на рис.1.9, уравнение, составленное по первому закону Кирхгофа в комплексной форме, имеет вид:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0$$

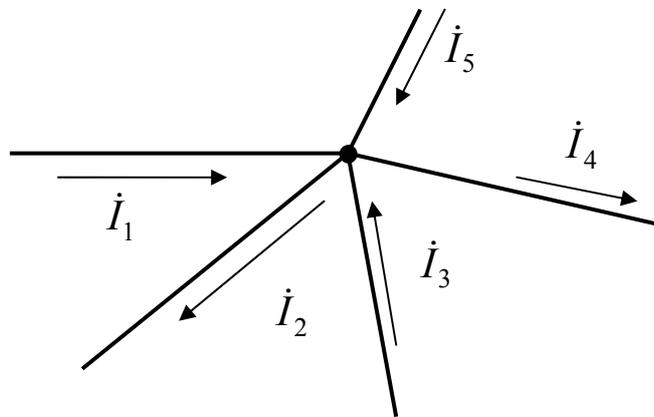


Рисунок 1.9

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексов напряжений в контуре равна алгебраической сумме комплексов ЭДС в этом же контуре.

$$\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{p=1}^m \dot{E}_p,$$

Для контура, изображенного на рис.1.10, уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа в комплексной форме, можно записать следующим образом:

$$\dot{U}_{R_1} - \dot{U}_L - \dot{U}_{R_3} - \dot{U}_C = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_3,$$

где $\dot{U}_{R_1} = \dot{I}_1 R_1$ - комплекс падения напряжения на резисторе R_1 ;

$\dot{U}_L = \dot{I}_2 \cdot j\omega L = \dot{I}_2 \cdot jx_L$ - комплекс падения напряжения на катушке индуктивности L ;

$\dot{U}_{R_3} = \dot{I}_3 R_3$ - комплекс падения напряжения на резисторе R_3 ;

$\dot{U}_C = \dot{I}_4 \cdot \frac{1}{j\omega C} = \dot{I}_4 \cdot \frac{(-j)}{\omega C} = \dot{I}_2 \cdot (-jx_C)$ - комплекс падения напряжения на конденсаторе C ;

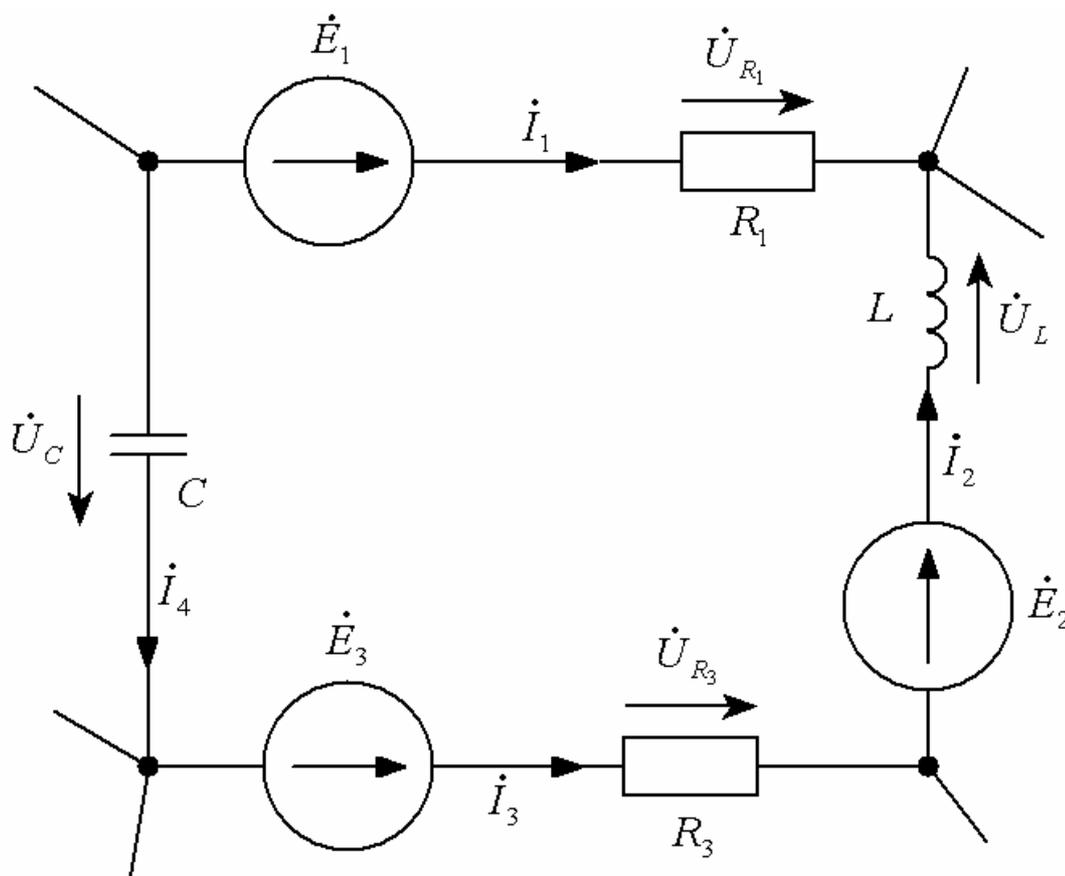


Рисунок 1.10

1.11.1 Пример 7

Определить комплексы токов в ветвях, показания приборов сложной цепи рис.1.11, построить векторную диаграмму токов и напряжений и осциллограмму напряжения на резисторе R_1 .

Дано:

$$u(t) = 141.42 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ (В);}$$

$$R_1 = 5 \text{ (Ом);}$$

$$R_2 = 3 \text{ (Ом);}$$

$$R_3 = 4 \text{ (Ом);}$$

$$L = 12.73 \text{ (мГн);}$$

$$C = 1061.03 \text{ (мкФ);}$$

$$f = 50 \text{ (Гц).}$$

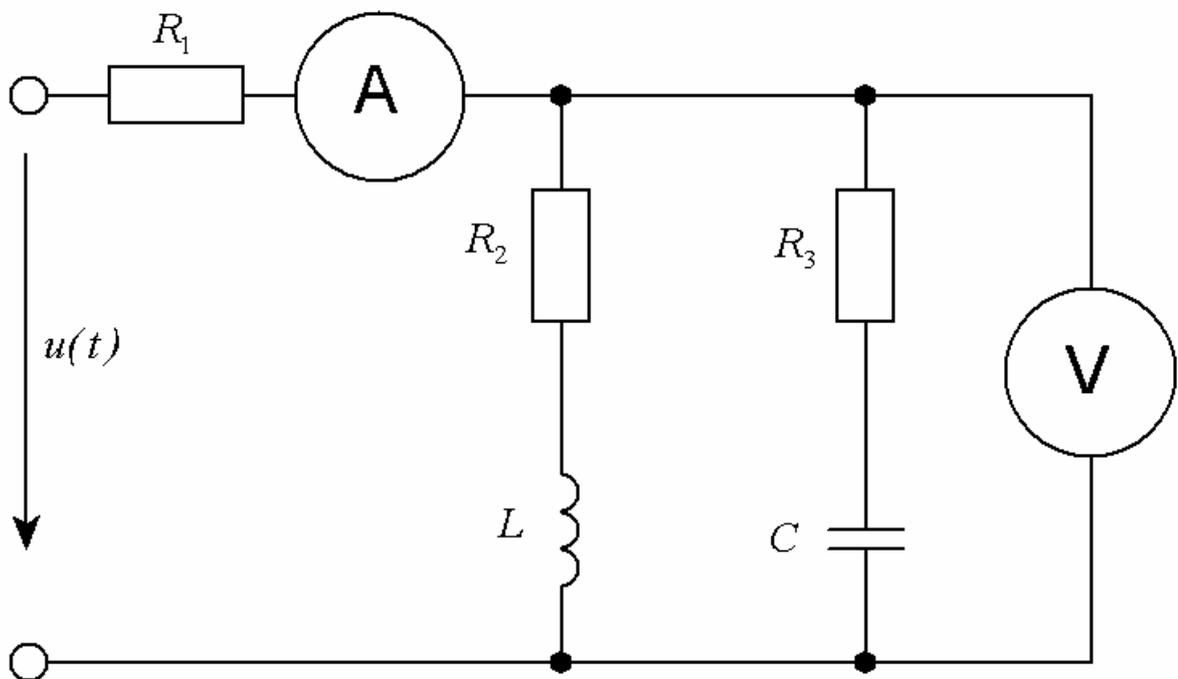


Рисунок 1.11

Решение

Угловая частота колебаний в цепи:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314.16 \text{ (сек}^{-1}\text{)}$$

Определим комплексные сопротивления всех элементов цепи, при этом будем считать, что измерительные приборы идеальные, т.е. сопротивление амперметра равно нулю, а сопротивление вольтметра – бесконечности.

Комплексное сопротивление резистора R_1 :

$$\underline{Z}_1 = R_1 = 5;$$

Комплексное сопротивление резистора R_2 :

$$\underline{Z}_2 = R_2 = 3;$$

Комплексное сопротивление катушки индуктивности L :

$$\underline{Z}_3 = j\omega L = j \cdot 12.73 \cdot 10^{-3} \cdot 314.16 = j4 = 4e^{j90^\circ};$$

Комплексное сопротивление резистора R_3 :

$$\underline{Z}_4 = R_3 = 4;$$

Комплексное сопротивление конденсатора C :

$$\underline{Z}_5 = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{314.16 \cdot 1061.03 \cdot 10^{-6}} = -j3 = 3e^{-j90^\circ};$$

Комплекс действующего значения напряжения $u(t)$:

$$\dot{U} = \frac{141.42}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 100e^{j30^\circ} = 100 \cos 30^\circ + j100 \sin 30^\circ = 86.6 + j50.$$

Изобразим схему замещения цепи, на которой все элементы цепи и напряжение $u(t)$ заменены их изображениями в комплексной форме (рис.1.12).

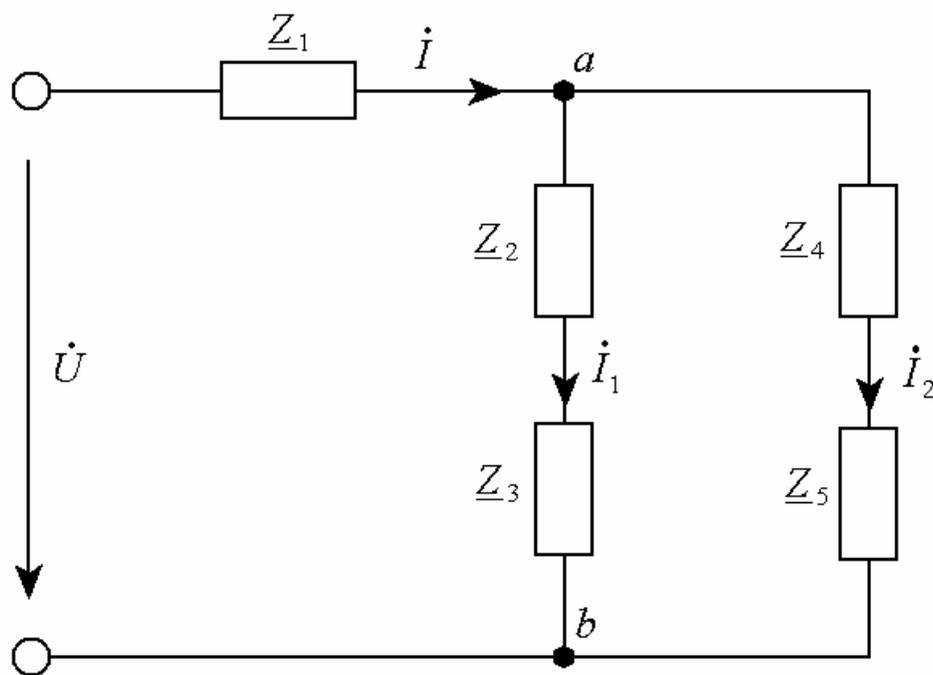


Рисунок 1.12

Комплексные сопротивления \underline{Z}_2 и \underline{Z}_3 соединены последовательно, значит их эквивалентное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 3 + j4 = 5e^{j53.13^\circ};$$

Комплексные сопротивления \underline{Z}_4 и \underline{Z}_5 также соединены последовательно, значит их эквивалентное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z}_{45} = \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 = 4 - j3 = 5e^{-j36.87^\circ};$$

Цепь приобретет вид, показанный на рис.1.13.

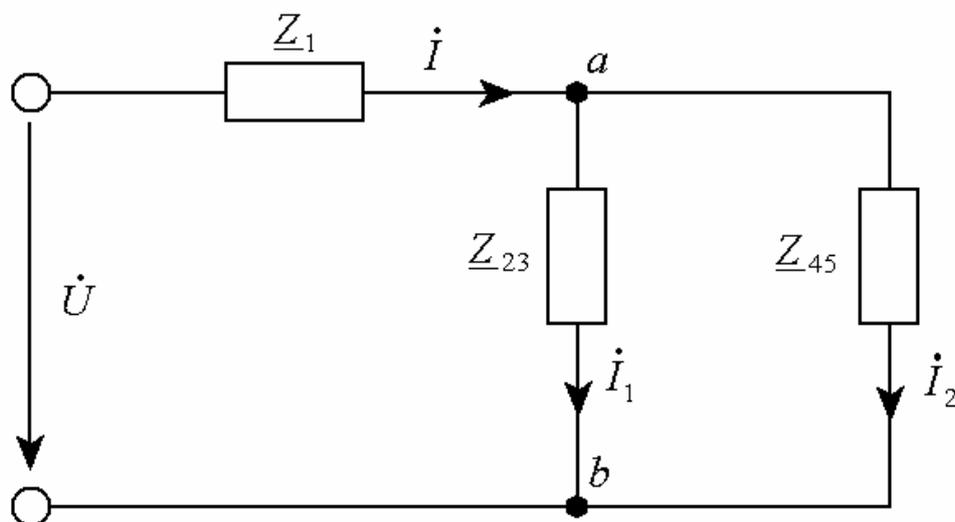


Рисунок 1.13

Ветви цепи, содержащие комплексные сопротивления \underline{Z}_{23} и \underline{Z}_{45} соединены параллельно, следовательно, эквивалентное комплексное сопротивление участка цепи между узлами a и b :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{1}{\underline{Z}_{23}} + \frac{1}{\underline{Z}_{45}} \quad \text{или} \quad \underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{45}}{\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{45}};$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{5e^{j53.13^\circ} \cdot 5e^{-j36.87^\circ}}{3 + j4 + 4 - j3} = \frac{25e^{j16.26^\circ}}{7 + j1} = \frac{25e^{j16.26^\circ}}{7.07e^{j8.13^\circ}} = 3.536e^{j8.13^\circ}$$

$$\underline{Z}_{ab} = 3.536e^{j8.13^\circ} = 3.5 + j0.5;$$

После преобразований цепь приобретет вид, показанный на рис.1.14.

Полное эквивалентное комплексное сопротивление цепи рассчитывается как сумма комплексных сопротивлений \underline{Z}_1 и \underline{Z}_{ab} :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab} = 5 + 3.5 + j0.5 = 8.5 + j0.5 = 8.515e^{j3.37^\circ}.$$

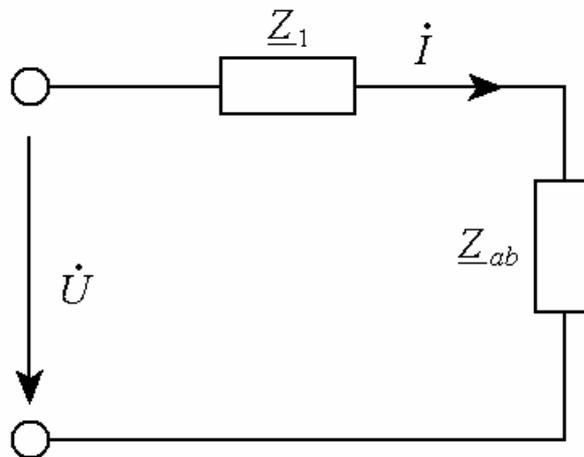


Рисунок 1.14

Определим комплекс действующего значения тока в неразветвленной части цепи:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{100e^{j30^\circ}}{8.515e^{j3.37^\circ}} = 11.74e^{j26.63^\circ} = 10.5 + j5.26.$$

Для того, чтобы определить токи в ветвях, содержащих комплексные сопротивления \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 и \underline{Z}_4 , \underline{Z}_5 , определим комплекс напряжения между узлами a и b .

$$\dot{U}_{ab} = \dot{i}\underline{Z}_{ab} = 11.74e^{j26.63^\circ} \cdot 3.536e^{j8.13^\circ} = 41.52e^{j34.76^\circ} = 34.12 + j23.66$$

Определим комплексы токов в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{41.52e^{j34.76^\circ}}{5e^{j53.13^\circ}} = 8.3e^{-j18.37^\circ} = 7.88 - j2.62;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{45}} = \frac{41.52e^{j34.76^\circ}}{5e^{-j36.87^\circ}} = 8.3e^{j71.63^\circ} = 2.62 + j7.88;$$

Ток \dot{I}_2 можно было получить, используя первый закон Кирхгофа:

$$\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 = 10.5 + j5.26 - (7.88 - j2.62) = 2.62 + j7.88.$$

Определим показания приборов. Показания приборов представляют собой действующие значения измеряемых величин.

Амперметр показывает действующее значение тока, комплекс которого: $\dot{I} = 11.74e^{j26.63^\circ} = 10.5 + j5.26$. Действующее значение – это модуль комплекса тока, т.е. 11.74 (А).

Вольтметр показывает действующее значение напряжения между узлами a и b , комплекс которого: $\dot{U}_{ab} = 41.52e^{34.76^\circ} = 34.12 + j23.66$. Действующее значение – это модуль комплекса напряжения, т.е. 41.52 (В).

Векторная диаграмма токов представлена на рис.1.15.

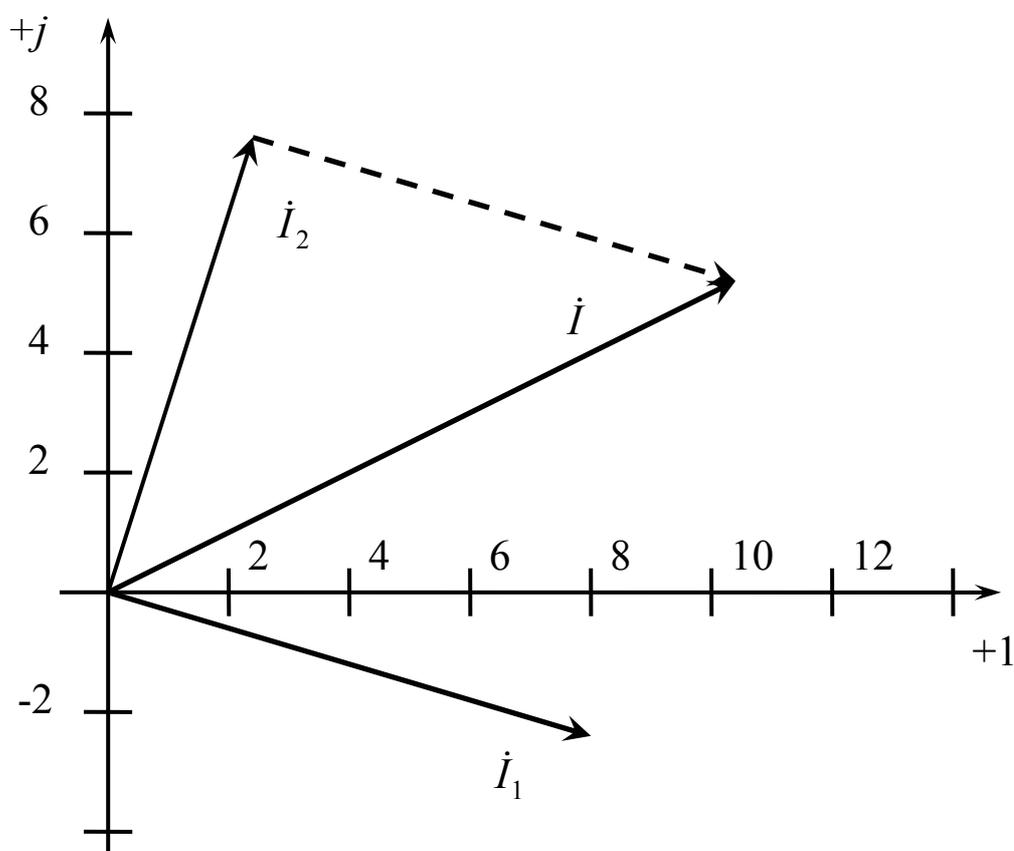


Рисунок 1.15

Для построения векторной диаграммы напряжений определим комплексы напряжений на всех элементах цепи.

Комплекс напряжения на резисторе R_1 :

$$\dot{U}_{R_1} = \dot{I} \cdot \underline{Z}_1 = 11.74e^{j26.63^\circ} \cdot 5 = 58.7e^{j26.63^\circ} = 52.5 + j26.3(\text{В});$$

Комплекс напряжения на резисторе R_2 :

$$\dot{U}_{R_2} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_2 = 8.3e^{-j18.37^\circ} \cdot 3 = 24.9e^{-j18.37^\circ} = 23.64 - j7.86 \text{ (В)};$$

Комплекс напряжения на катушке индуктивности L :

$$\dot{U}_L = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_3 = 8.3e^{-j18.37^\circ} \cdot 4e^{j90^\circ} = 33.2e^{j71.63^\circ} = 10.48 + j31.52 \text{ (В)};$$

Комплекс напряжения на резисторе R_3 :

$$\dot{U}_{R_3} = \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_4 = 8.3e^{j71.63^\circ} \cdot 4 = 33.2e^{j71.63^\circ} = 10.48 + j31.52 \text{ (В)};$$

Комплекс напряжения на конденсаторе C :

$$\dot{U}_C = \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_5 = 8.3e^{j71.63^\circ} \cdot 3e^{-j90^\circ} = 24.9e^{-j18.37^\circ} = 23.64 - j7.86 \text{ (В)};$$

Векторная диаграмма напряжений представлена на рис.1.16.

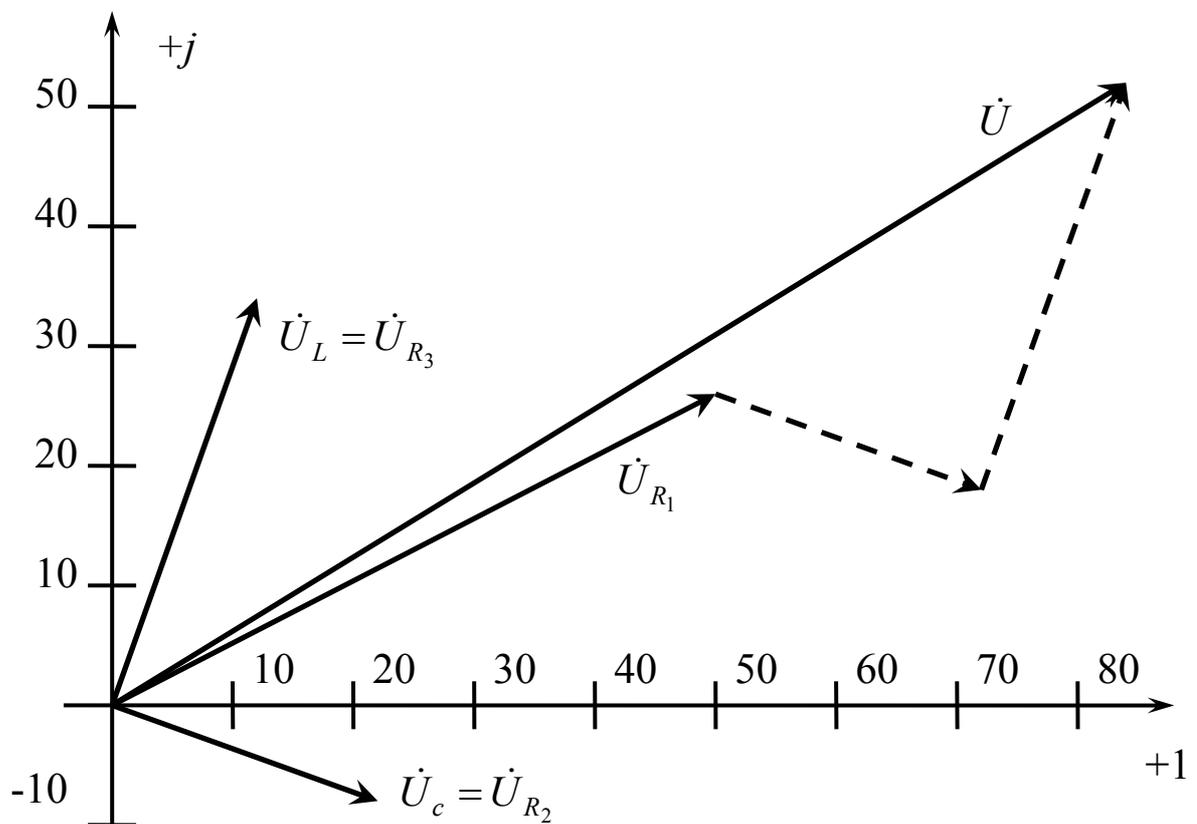


Рисунок 1.16

Для построения осциллограммы напряжения на резисторе R_1 необходимо от найденного нами ранее изображения этого

напряжения в комплексной форме $\dot{U}_{R_1} = 58.7e^{j26.63^\circ}$ перейти к ее аналитической форме записи.

Найдем амплитуду этого напряжения:

$$U_m = 58.7 \cdot \sqrt{2} = 83.01(\text{В}),$$

Аналитическая зависимость напряжения на резисторе R_1 от времени будет иметь вид (с учетом того, что $\omega = 314.16 \text{ сек}^{-1}$):

$$u(t) = 83.01 \cdot \sin(314.16 \cdot t + 26.63^\circ).$$

Согласно этой формуле осциллограмма будет иметь вид, представленный на рис.1.17.

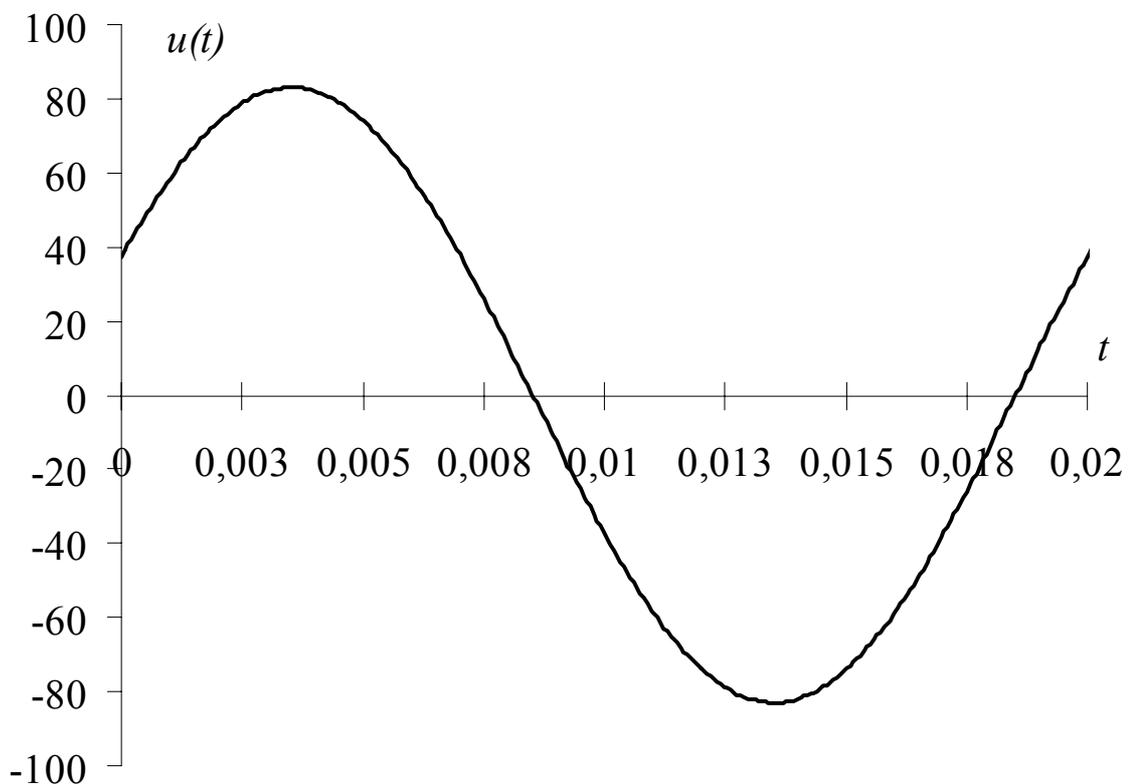


Рисунок 1.17

1.12 Мощность в цепи синусоидального тока

В цепях синусоидального тока рассматривают понятия мгновенной, активной, реактивной и полной мощности.

Мгновенной мощностью называют произведение мгновенных значений напряжения и тока.

$$p = u(t) \cdot i(t);$$

Активной мощностью называют среднее значение мгновенной мощности за период колебания. Для цепей синусоидального тока:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi;$$

где φ - сдвиг по фазе между напряжением и током,

U, I – действующие значения напряжения и тока.

Активная мощность характеризует необратимые преобразования электрической энергии в другие виды энергии, например, в тепловую. Активная мощность измеряется в ваттах (Вт).

Реактивная мощность, это мощность, характеризующая взаимный энергообмен между реактивными элементами цепи и источником энергии, т.е. обратимые преобразования энергии, например, в энергию магнитного поля и представляет собой амплитуду мгновенной мощности реактивных элементов. Реактивная мощность измеряется вольт-амперах реактивных (вар) и определяется по формуле:

$$Q = UI \sin \varphi;$$

В зависимости от знака угла φ реактивная мощность будет либо положительной, т.е. носить индуктивный характер ($\varphi > 0$), либо отрицательной и носить емкостной характер ($\varphi < 0$).

Полной мощностью называется максимальное значение мощности, которое может отдать или получить участок электрической цепи, при заданных значениях напряжения и тока U, I . Понятие полной мощности часто употребляется для характеристики эксплуатационных возможностей электротехнических устройств (трансформаторов, генераторов, электрических машин и др.). Номинальное значение полной мощности является их паспортной величиной.

Определяется полная мощность по формуле:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} ; \text{ т.к.}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(UI \cos \varphi)^2 + (UI \sin \varphi)^2} = UI \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = UI$$

Полная мощность измеряется в вольт-амперах (ВА).

1.13 Комплексная мощность

При анализе цепей синусоидального тока символическим методом используют понятие *комплексной мощности*. Комплексной мощностью называется произведение комплекса напряжения на комплексно сопряженный ток.

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot I^* ;$$

где \dot{U} - комплекс напряжения на участке цепи,

I^* - сопряженное комплексное значение тока на участке цепи.

Пусть заданы комплексы напряжения и тока на участке цепи:

$$\dot{U} = U e^{j\varphi_u} = U_a + jU_p ,$$

$$\dot{I} = I e^{j\varphi_i} = I_a + jI_p .$$

где U, I - действующие значения напряжения и тока,

φ_u, φ_i - начальные фазы напряжения и тока соответственно,

U_a, I_a - активные составляющие напряжения и тока,

U_p, I_p - реактивные составляющие напряжения и тока.

Величина, сопряженная комплексу тока \dot{I} равна:

$$I^* = I_a - jI_p = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} \cdot e^{j \arctg \left(\frac{-I_p}{I_a} \right)} = I e^{-j\varphi_i} ;$$

Тогда, комплексная мощность \tilde{S} , представляющая собой произведение комплексных чисел запишется следующим образом:

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot I^* = Ue^{j\varphi_u} \cdot Ie^{-j\varphi_i} = UIe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi;$$

$$\tilde{S} = Se^{j\varphi} = \dot{U} \cdot I^* = I^2 \underline{Z} = \frac{U^2}{\underline{Z}} = P + jQ.$$

где $P = UI \cos \varphi$ - активная мощность,

$Q = UI \sin \varphi$ - реактивная мощность.

Таким образом, действительная часть комплексной мощности \tilde{S} представляет собой активную мощность, мнимая часть – реактивную мощность, а модуль комплексной мощности S – полную мощность.

1.13.1 Пример 8

Определить по условиям примера 7 полную, активную и реактивную мощности, отдаваемые источником энергии в цепь. Известно, что:

$$\dot{U} = 100e^{j30^\circ} = 86.6 + j50(\text{В}),$$

$$\dot{I} = 11.74e^{j26.63^\circ} = 10.5 + j5.26(\text{А}).$$

Решение

Определим величину комплексно сопряженного тока

$$I^* = 11.74e^{-j26.63^\circ} = 10.5 - j5.26.$$

Найдем комплексную мощность

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot I^* = 100e^{j30^\circ} \cdot 11.74e^{-j26.63^\circ} = 1174e^{j3.37^\circ}$$

$$\tilde{S} = 1174 \cdot \cos(3.37^\circ) + j1174 \cdot \sin(3.37^\circ) = 1172 + j69.$$

Активная мощность, отдаваемая источником энергии равна 1172(Вт).

Реактивная мощность, отдаваемая источником энергии положительна, равна 69(вар) и носит индуктивный характер.

Полная мощность, отдаваемая источником энергии равна 1174(ВА).

1.14 Баланс мощностей в цепях синусоидального тока

Уравнение баланса мощностей в цепях синусоидального тока очевидно должно учитывать как мощность, необратимо преобразующуюся в другие виды энергии (активную мощность), так и мощность обратимых преобразований энергии (реактивную мощность). Поэтому уравнения баланса мощностей в цепях синусоидального тока выглядят следующим образом:

$$\sum P_{ист} = \sum P_{пр}$$

Сумма активных мощностей источников энергии равна сумме активных мощностей приемников энергии.

$$\sum Q_{ст} = \sum Q_{пр}$$

Алгебраическая сумма реактивных мощностей источников энергии равна алгебраической сумме реактивных мощностей приемников энергии. Реактивная мощность может быть положительной (индуктивный элемент) и отрицательной (емкостной элемент).

1.14.1 Пример 9

Составить уравнения баланса мощностей для цепи согласно условию примера 7 (рис.1.18).

Решение

Активная и реактивная мощности, отдаваемые источником энергии, нами найдены (см. пример 8) и так как источник энергии всего один, то:

$$\sum P_{ист} = 1172(\text{Вт});$$

$$\sum Q_{ист} = 69(\text{вар});$$

Напряжения и токи на всех участках цепи нами также найдены ранее (см. пример 7).

$$\dot{I} = 11.74e^{j26.63^\circ} = 10.5 + j5.26(\text{А});$$

$$\dot{I}_1 = 8.3e^{-j18.37^\circ} = 7.88 - j2.62(\text{А}),$$

$$\dot{I}_2 = 8.3e^{j71.63^\circ} = 2.62 + j7.88(\text{А}),$$

$$\dot{U}_{R_1} = 58.7e^{j26.63^\circ} = 52.5 + j26.3(\text{В}),$$

$$\dot{U}_{R_2} = 24.9e^{-j18.37^\circ} = 23.64 - j7.86(\text{В}),$$

$$\dot{U}_L = 33.2e^{j71.63^\circ} = 10.48 + j31.52(\text{В}),$$

$$\dot{U}_{R_3} = 33.2e^{j71.63^\circ} = 10.48 + j31.52(\text{В}),$$

$$\dot{U}_C = 24.9e^{-j18.37^\circ} = 23.64 - j7.86(\text{В}).$$

Найдем комплексно сопряженные токи

$$I^* = 11.74e^{-j26.63^\circ} = 10.5 - j5.26(\text{А});$$

$$I_1^* = 8.3e^{j18.37^\circ} = 7.88 + j2.62(\text{А});$$

$$I_2^* = 8.3e^{-j71.63^\circ} = 2.62 - j7.88(\text{А}).$$

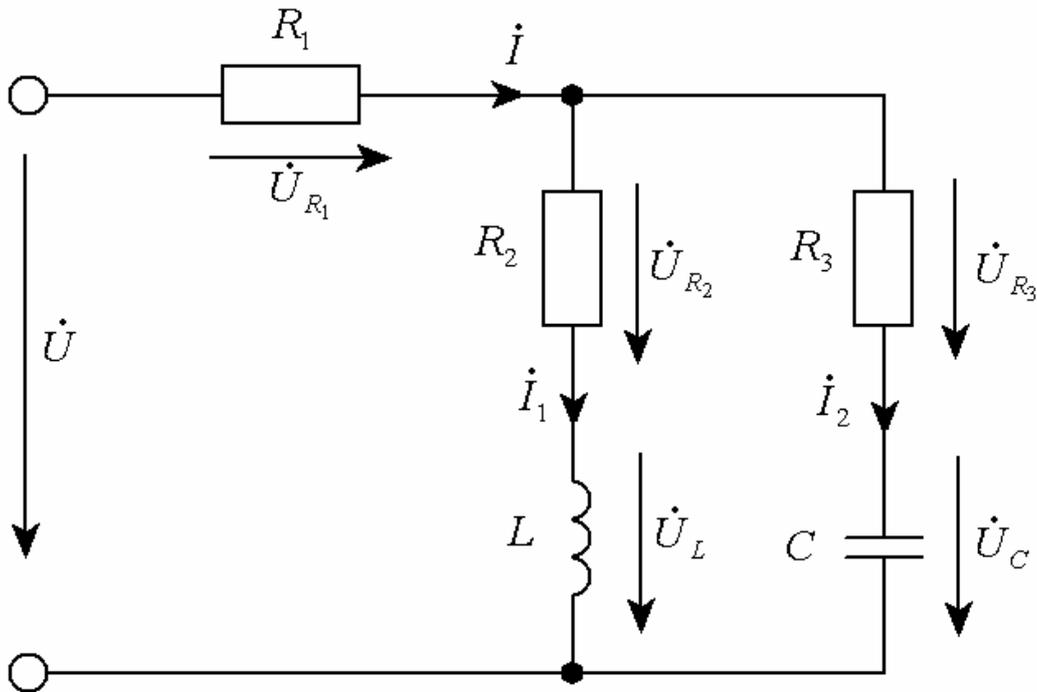


Рисунок 1.18

Определим комплексные мощности на каждом из элементов заданной по условию цепи.

Комплексная мощность на резисторе R_1 :

$$\tilde{S}_1 = I \cdot \dot{U}_{R_1}^* = 11.74e^{-j26.63^\circ} \cdot 58.7e^{j26.63^\circ} = 689.6e^{j0^\circ} = 689.6;$$

$$P_1 = 689.6(\text{Вт}); Q_1 = 0(\text{вар});$$

Комплексная мощность на резисторе R_2 :

$$\tilde{S}_2 = I_1^* \cdot \dot{U}_{R_2} = 8.3e^{j18.37^\circ} \cdot 24.9e^{-j18.37^\circ} = 206.7e^{j0^\circ} = 206.7;$$

$$P_2 = 206.7 \text{ (Вт)}; Q_2 = 0 \text{ (вар)};$$

Комплексная мощность на катушке индуктивности L :

$$\tilde{S}_3 = I_1^* \cdot \dot{U}_L = 8.3e^{j18.37^\circ} \cdot 33.2e^{j71.63^\circ} = 275.8e^{j90^\circ} = j275.8;$$

$$P_3 = 0 \text{ (Вт)}; Q_3 = 275.8 \text{ (вар)};$$

Комплексная мощность на резисторе R_3 :

$$\tilde{S}_4 = I_2^* \cdot \dot{U}_{R_3} = 8.3e^{-j71.63^\circ} \cdot 33.2e^{j71.63^\circ} = 275.6e^{j0^\circ} = 275.6;$$

$$P_4 = 275.6 \text{ (Вт)}; Q_3 = 0 \text{ (вар)};$$

Комплексная мощность на конденсаторе C :

$$\tilde{S}_5 = I_2^* \cdot \dot{U}_C = 8.3e^{-j71.63^\circ} \cdot 24.9e^{-j18.37^\circ} = 206.7e^{-j90^\circ} = -j275.6$$

$$P_4 = 0 \text{ (Вт)}; Q_3 = -275.6 \text{ (вар)};$$

Определим сумму активных мощностей приемников.

$$\sum P_{np} = 689.6 + 206.7 + 0 + 275.6 + 0 = 1172 \text{ (Вт)};$$

Определим сумму реактивных мощностей приемников.

$$\sum Q_{np} = 0 + 0 + 275.8 + 0 - 206.7 = 69 \text{ (вар)}.$$

Очевидно, что баланс активных и реактивных мощностей выполняется т.е.

$$\sum P_{ист} = \sum P_{np} = 1172 \text{ (Вт)};$$

$$\sum Q_{ст} = \sum Q_{np} = 69 \text{ (вар)}.$$

2 Задание

- 2.1 Начертить схему замещения электрической цепи с обозначением характера сопротивлений всех ветвей.
- 2.2 Указать на схеме условные положительные направления токов в ветвях. Определить токи всех ветвей в комплексной форме.
- 2.3 Определить показания приборов.
- 2.4 Построить векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости.
- 2.5 Построить осциллограмму тока в ветви или напряжения на участке, определенном в задании.
- 2.6 Составить баланс активных и реактивных мощностей.

Исходные данные приведены в таблице 1. Номер схемы для расчётов выбирается из таблицы 1 исходных данных. Номер варианта выбирается согласно номеру по списку в журнале преподавателя.

Значения индуктивностей заданы в микрофарадах (мкФ), емкостей – в милигенри (мГн). Частота тока $f = 50$ (Гц).

Значения индуктивных и емкостных сопротивлений элементов округлять до целого числа.

При составлении баланса активных и реактивных мощностей погрешность вычислений оценить согласно формулам:

$$\gamma_P = \frac{\sum P_{уст} - \sum P_{нр}}{\sum P_{уст}} \cdot 100\%;$$

$$\gamma_Q = \frac{\sum Q_{уст} - \sum Q_{нр}}{\sum Q_{уст}} \cdot 100\%.$$

Относительная погрешность не должна превышать 5%.

Окончание таблицы 1

№ вар.	№ группы	№ рисунка	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	$u(t), i(t)$	U
21	1	2.5	$R=0; C=398$	$5+j5$	$10e^{j45}$	$-j3$	$R=3; L=9,6$	u_3	$100e^{45}$
	2	2.6	$6e^{j90}$	$R=0; C=318$	$10+j10$	$5+j3$	$8e^{j45}$	i_4	$u=282\sin(\omega t+\pi/3)$
	3	2.7	$4+j3$	$3+j4$	$-j5$	$8e^{j90}$	$10e^{-j45}$	u_2	180
22	1	2.8	$8e^{j53}$	$10-j10$	$j6$	$R=0; L=25,2$	$-j3$	u_2	60
	2	2.9	$10e^{j37}$	$-j8$	$3+j2$	$5-j5$	5	u_3	$150e^{90}$
	3	2.10	$j5$	$10e^{j45}$	$-j5$	$8e^{j30}$	10	i_3	$u=141\sin(\omega t-\pi/3)$
23	1	2.11	$3-j4$	$10e^{j37}$	$6+j8$	$R=0; C=796$	$R=10; C=318$	u_4	100
	2	2.12	$8e^{j45}$	5	$R=0; L=25,2$	$-j5$	8	i_2	$212\sin(\omega t)$
	3	2.13	$3-j5$	$j6$	$10+j10$	5	$5e^{j53}$	i_4	$120e^{j30}$
24	1	2.14	$R=0; C=796$	8	$R=3; C=1062$	$10e^{j90}$	$5+j5$	u_2	$50e^{j45}$
	2	2.15	$10-j10$	$5e^{j53}$	$-j5$	$5e^{j60}$	10	u_5	120
	3	2.16	$3-j4$	8	10	$6+j8$	$-j5$	i_1	$u=71\sin(\omega t+\pi/4)$
25	1	2.17	$10e^{j45}$	$j8$	$6+j6$	$R=0; C=318$	$j3$	u_3	$u=85\sin(\omega t+30^\circ)$
	2	2.18	$j3$	$10e^{j45}$	$-j5$	$8+j6$	$R=0; C=318$	u_5	200
	3	2.19	$-j8$	$5+j5$	$R=2; L=25,2$	$-j10$	$3e^{j45}$	u_4	$100e^{j90}$

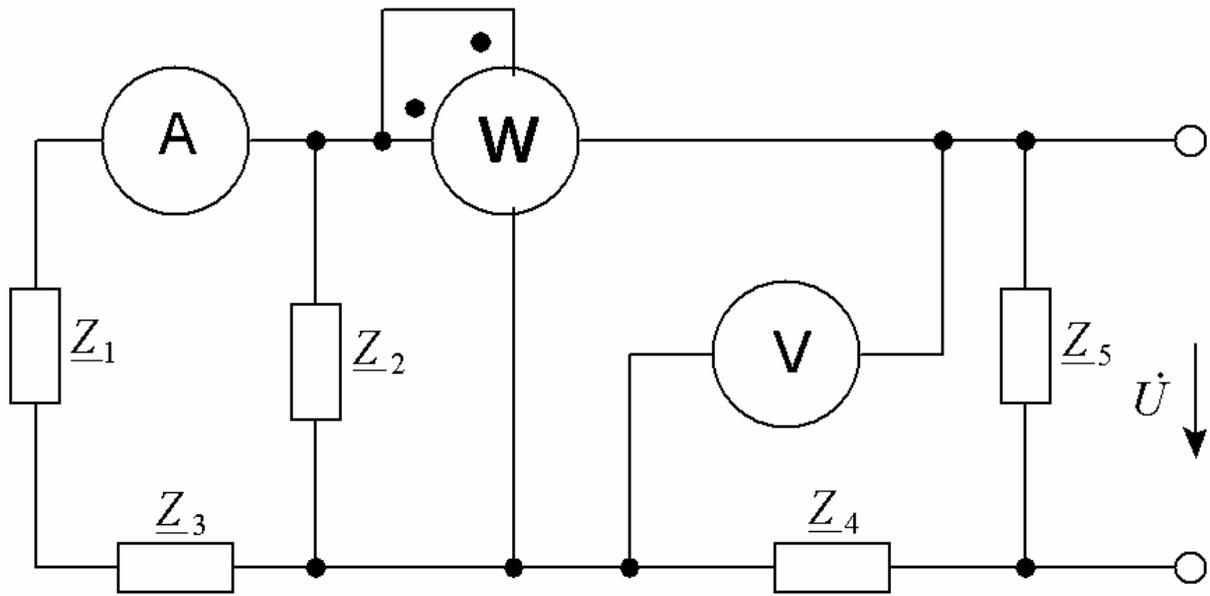


Рисунок 2.7

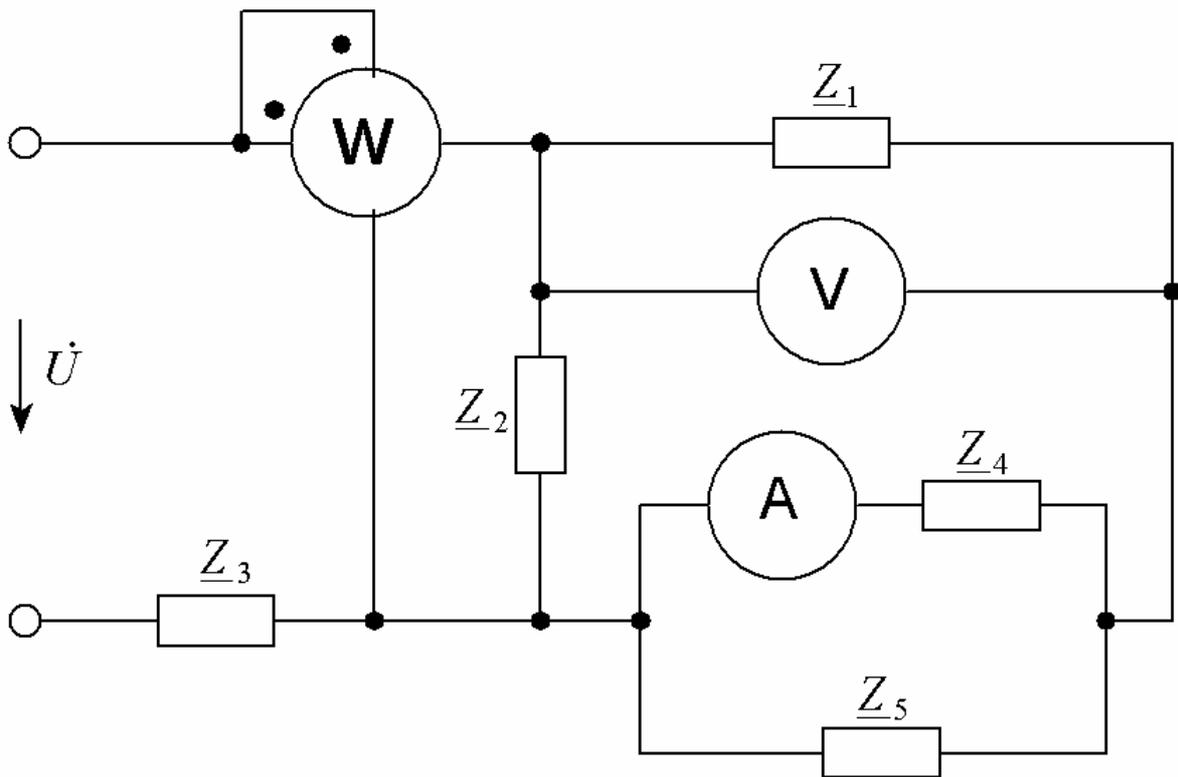


Рисунок 2.8