5.5.4. Пример выполнения курсового задания Д 4

Рассмотрим пример выполнения задания Д 4.

Условие задания.

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Начальное положение системы показано на рис. 5.30.

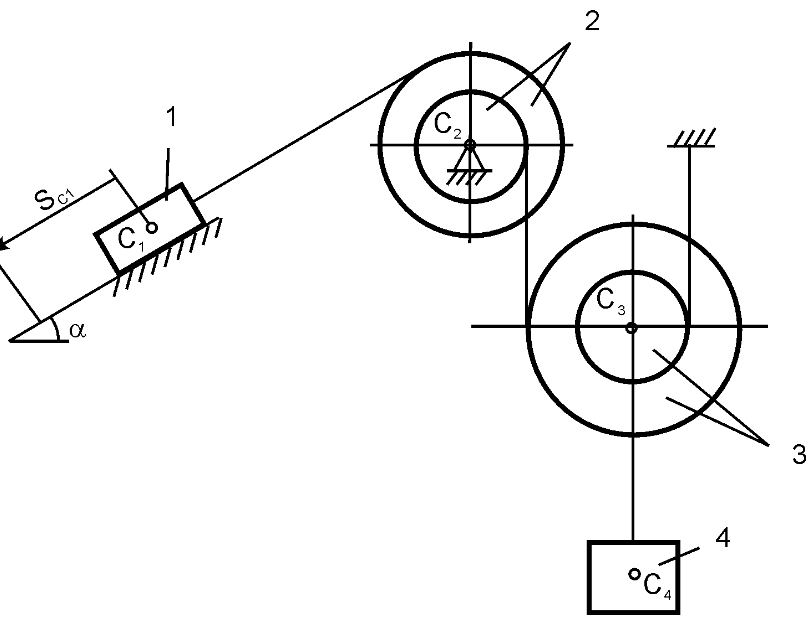

Рис. 5.30

Учитывая трение скольжения тела 1, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить модуль скорости центра масс тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь станет равным S_{C1}.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 – радиусы больших и малых окружностей; i_{C2x2}, i_{C3x3} – радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры масс; α – угол наклона шероховатой поверхности к горизонту; f – коэффициент трения скольжения.

Дано: $m_1 = m$; $m_2 = m/2$; $m_3 = 0{,}3 \cdot m$; $m_4 = 1{,}5 \cdot m$; $R_2 = 26$ см; $r_2 = 0{,}5 \cdot R_2$; $R_3 = 20$ см; $r_3 = 0{,}5 \cdot R_3$; $i_{C2x2} = 20$ см; $i_{C3x3} = 18$ см; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0{,}12$; $S_{C1} = 2$ м.

Курсовое задание рекомендуется выполнять по следующему алгоритму.

1. Записать теорему об изменении кинетической энергии неизменяемой механической системы на конечном перемещении.

$$T_{Sk} - T_{Sn} = \Sigma A_i^E = \Sigma A(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma A(\mathbf{R}_i^E),$$

где T_{Sk} – значение кинетической энергии механической системы в конечный момент времени; T_{Sn} – значение кинетической энергии механической системы в начальный момент времени; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил, приложенных к механической системе на её конечном перемещении; $\Sigma A(\mathbf{F}_i^E)$ – сумма работ активных сил; $\Sigma A(\mathbf{R}_i^E)$ – сумма работ реакций внешних связей.

2. Определить кинетическую энергию T_{Sn} механической системы в начальный момент времени. Поскольку механическая система движется из состояния покоя (см. рис. 5.30), то во всех вариантах заданий имеем $T_{Sn} = 0$.

3. Изобразить на рисунке механическую систему в момент времени, когда центр C_1 масс тела 1 проходит расстояние S (см. рис. 5.31).

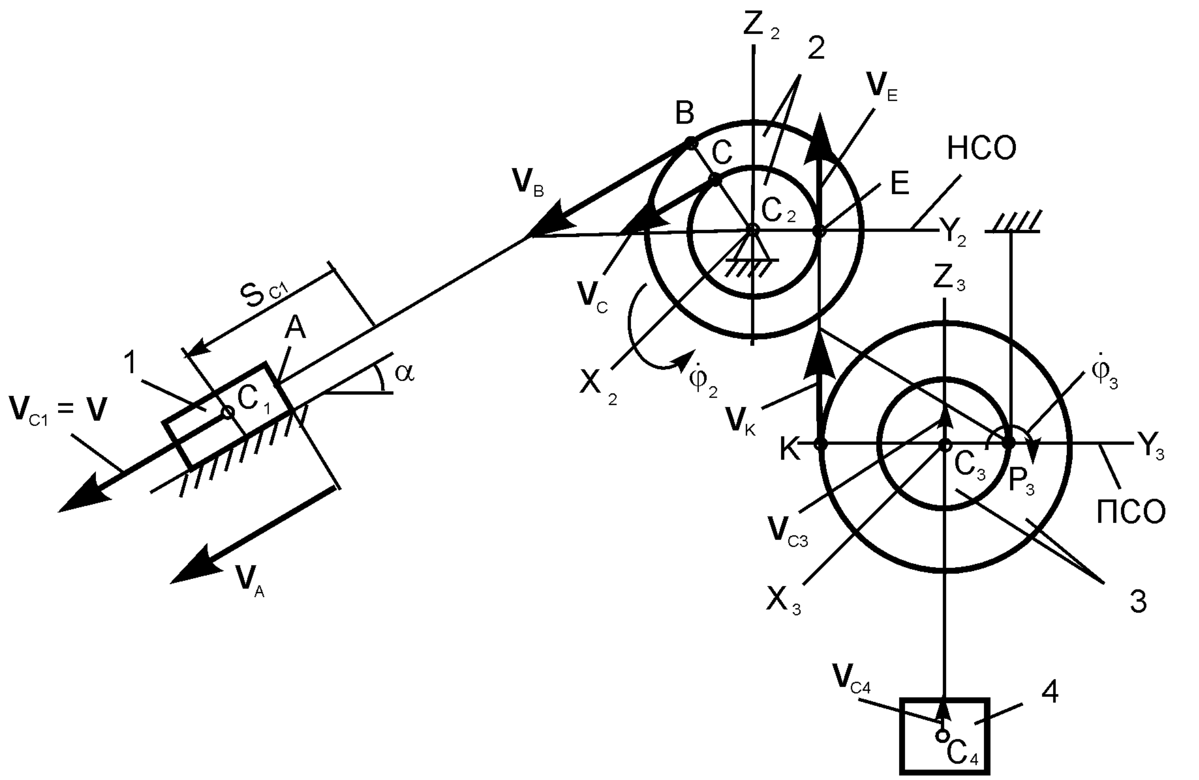

Рис. 5.31

4. Провести кинематический анализ безаварийной работы исследуемой механической системы.

Согласно рис. 5.31 тела механической системы осуществляют следующие виды движений. Тело 1 – поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}_{C1}$ центра C_1 его масс; тело 2 – вращательное движение с угловой скоростью $\dot{\varphi}_2$ относительно оси вращения C_2X_2, проходящей через центр масс C_2; тело 3 – плоскопараллельное движение; тело 4 – поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}_{C4}$ центра C_4 его масс.

5. Выразить модули скоростей центров масс и угловых скоростей тел механической системы в зависимости от V_{C1} модуля скорости центра C_1 масс тела 1.

С целью сокращения формы записи введём обозначение V = V_{C1}. При определении кинематических характеристик тел механической системы учтём, что в точках контакта тел модули скоростей этих точек должны быть одинаковыми из условия их принадлежности соприкасающимся телам.

Итак, необходимо определить зависимости: $|\dot{\varphi}_2| = \omega_2 = f_1(V)$, $V_{C3} = f_2(V)$, $|\dot{\varphi}_3| = \omega_3 = f_3(V)$, $V_{C4} = f_4(V)$, где ω_2, ω_3 – модули угловых скоростей $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$ тел 2 и 3 .

Так как тело 1 совершает поступательное движение, а нить нерастяжима, то справедливо равенство

$$V_{C1} = V = V_A = V_B,$$

где V_A – модуль скорости точки A контакта тела 1 с нитью; V_B – модуль скорости точки B контакта нити с телом 2.

Из условия принадлежности точки B телу 2, совершающему вращательное движение с угловой скоростью $\dot{\varphi}_2$ относительно оси вращения C_2X_2, проходящей через центр масс C_2, имеем

$$V_B = V = \omega_2 \cdot BC_2 = \omega_2 \cdot R_2.$$

Отсюда получим

$$\omega_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{V}{0{,}26} = 3{,}846 \cdot V.$$

Зная модуль ω_2 угловой скорости $\dot{\varphi}_2$, несложно определить модуль V_E скорости точки E соприкосновения тела 2 с участком EK нерастяжимой нити.

$$V_E = \omega_2 \cdot EC_2 = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{V}{R_2} \cdot r_2 = \frac{V}{R_2} \cdot 0{,}5 \cdot R_2 = 0{,}5 \cdot V.$$

Зависимости, связывающие модули скоростей точек B, C, E, несложно получить и из рассмотрения подобия треугольников на рис. 5.31.

Модуль V_K скорости точки К контакта нити с телом 3 равен модулю V_E скорости точки Е нити.

$$V_K = V_E = 0{,}5 \cdot V.$$

Из условия принадлежности точки К телу 3, совершающему плоскопараллельное движение, справедливо равенство

$$V_K = 0{,}5 \cdot V = \omega_3 \cdot KP_3,$$

где ω_3 – модуль угловой скорости $\dot{\varphi}_3$ тела 3; KP_3 – расстояние от точки К до мгновенного центра скоростей – точки P_3.

Согласно рис. 5.31 имеем $KP_3 = R_3 + r_3$. Тогда

$$\omega_3 = \frac{V_K}{KP_3} = \frac{V_K}{(R_3 + r_3)} = \frac{0{,}5 \cdot V}{0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}2} = 1{,}666 \cdot V.$$

Модуль V_{C3} скорости центра C_3 масс тела 3 равен

$$V_{C3} = \omega_3 \cdot C_3P_3 = \omega_3 \cdot r_3 = 1{,}666 \cdot V \cdot (0{,}5 \cdot 0{,}2) = 0{,}166 \cdot V.$$

Так как по условию задания нити нерастяжимы, то легко видеть, что модуль V_{C3} скорости центра масс тела 3 равна модулю V_{C4} скорости центра C_4 масс тела 4.

$$V_{C4} = V_{C3} = 0{,}166 \cdot V.$$

Таким образом, зависимости $\omega_2 = f_1(V)$, $V_{C3} = f_2(V)$, $\omega_3 = f_3(V)$, $V_{C4} = f_4(V)$ получены.

6. Определить кинетическую энергию T_{Sk} неизменяемой механической системы в её конечном положении по формуле

$$T_{Sk} = \Sigma T_{Ski},$$

где T_{Ski} – кинетическая энергия i-го тела системы в конечном положении.

Кинетическая T_{Sk1} энергия тела 1, совершающего поступательное движение,

$$T_{Sk1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (V_{C1})^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = 0{,}5 \cdot m \cdot V^2.$$

Кинетическая T_{Sk2} энергия тела 2 при его вращательном движении находится по формуле

$$T_{Sk2} = \frac{1}{2} \cdot J_{C2X2} \cdot (\omega_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_2 \cdot (i_{C2X2})^2) \cdot (\omega_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ((m/2) \cdot (i_{C2X2})^2) \cdot (V/R_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ((m/2) \cdot (0{,}2)^2) \cdot (V/0{,}26)^2 = 0{,}147 \cdot m \cdot V^2.$$

Кинетическая энергия тела 3 при его плоскопараллельном движении равна

$$T_{Sk3} = \frac{1}{2}\cdot m_3\cdot(V_{C3})^2 + \frac{1}{2}\cdot J_{C3X3}\cdot(\omega_3)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(0{,}3\cdot m)\cdot(0{,}166\cdot V)^2 + \frac{1}{2}\cdot(m_3\cdot(i_{3X})^2)\cdot(1{,}666\cdot V)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(0{,}3\cdot m)\cdot(0{,}166\cdot V)^2 + \frac{1}{2}\cdot((0{,}3\cdot m)\cdot(0{,}18)^2)\cdot(1{,}666\cdot V)^2 = 0{,}03\cdot m\cdot V^2.$$

Кинетическая энергия тела 4

$$T_{Sk4} = \frac{1}{2}\cdot m_4\cdot(V_{C4})^2 = \frac{1}{2}\cdot(1{,}5\cdot m)\cdot(0{,}166\cdot V)^2 = 0{,}02\cdot m\cdot V^2.$$

Определим кинетическую энергию T_{Sk} механической системы:

$$T_{Sk} = 0{,}5\cdot m\cdot V^2 + 0{,}147\cdot m\cdot V^2 + 0{,}03\cdot m\cdot V^2 + 0{,}02\cdot m\cdot V^2 = 0{,}697\ m\cdot V^2.$$

Таким образом, имеем $T_{Sk} = 0{,}697\ m\cdot V^2$.

7. Показать внешние силы, действующие на точки механической системы при её движении (рис. 5.32).

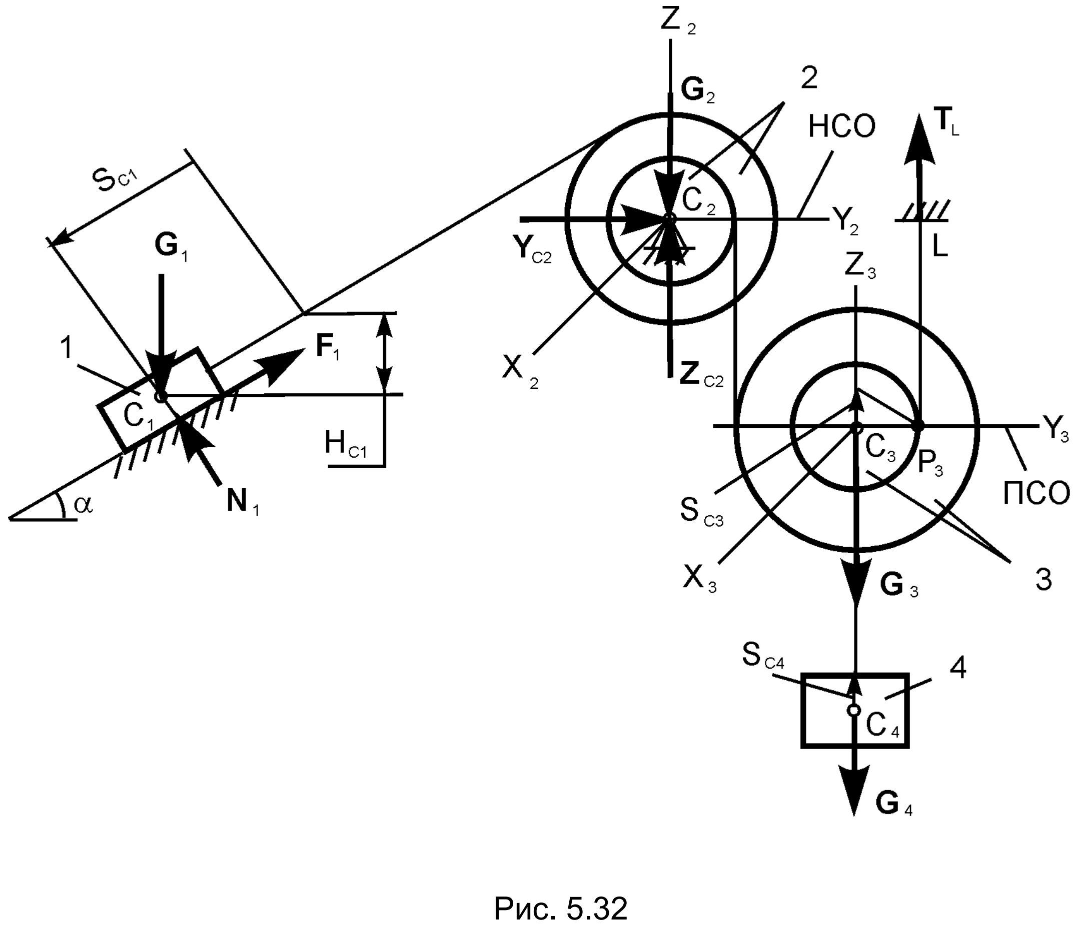

Рис. 5.32

Согласно рис. 5.32 на механическую систему действуют активные силы (**G**$_1$, **G**$_2$, **G**$_3$, **G**$_4$) и реакции (**N**$_1$, **F**$_1$, **Z**$_{C2}$, **Y**$_{C2}$, **T**$_L$) внешних связей, которые наложены на эту систему.

По условию задания сила **F**$_1$ трения скольжения тела 1 при его движении по шероховатой поверхности связана с нормальной реакцией **N**$_1$ соотношением $F_1 = f \cdot N_1$, где f – коэффициент трения скольжения, N_1 – модуль нормальной реакции **N**$_1$.

Для определения модуля N_1 реакции **N**$_1$ рассмотрим поступательное движение тела 1, приняв его за материальную точку, в системе отсчёта $O_1X_1Y_1$, происходящее под действием силы тяжести **G**$_1$, нормальной реакции **N**$_1$, силы трения **F**$_1$ и реакции **T**$_A$ растянутой нити (рис. 5.33).

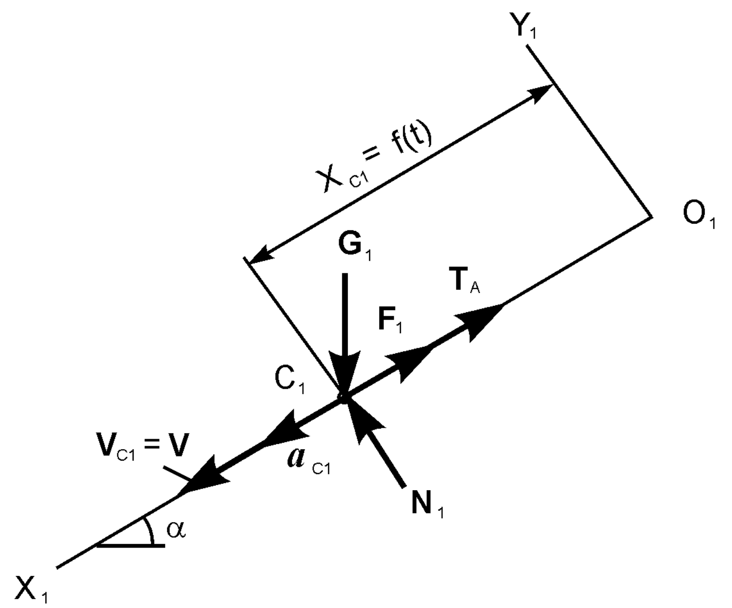

Рис. 5.33

Основное уравнение динамики для поступательно движущегося груза 1 имеет вид

$$m \cdot \boldsymbol{a}_{C1} = \Sigma\, \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E = \mathbf{G}_1 + \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{T}_A,$$

где $\boldsymbol{a}_{C1}$ – ускорение центра масс тела 1; **T**$_A$ – натяжение нити в точке А тела 1 (см. рис. 5.33).

Составим дифференциальное уравнение движения центра C_1 масс груза 1, спроецировав последнее векторное равенство на координатную ось O_1Y_1.

$$m \cdot \ddot{Y}_{C1} = \Sigma F_{iO1Y1}^E + \Sigma R_{iO1Y1}^E = -G_1 \cdot \cos(\alpha) + N_1.$$

Поскольку проекция $\ddot{Y}_{C1}$ ускорения $\boldsymbol{a}_{C1}$ центра масс тела 1 на координатную ось O_1Y_1 равна нулю, то имеем

$$N_1 = G_1 \cdot \cos(\alpha) = m_1 \cdot g \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \cos(\alpha).$$

Тогда модуль силы трения находится по формуле

$$F_1 = f \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha).$$

8. Определить перемещения S_{Ci} центров C_i масс тел механической системы в зависимости от перемещения S_{C1} центра C_1 масс тела 1.

При решении рассматриваемого варианта курсового задания были определены зависимости, связывающие модуль скорости $V_{C1} = V$ центра C_1 масс тела 1 с модулями скоростей V_{C3}, V_{C4} центров C_3, C_4 масс тел 3, 4.

$$V_{C3} = V_{C4} = 0{,}166 \cdot V.$$

Интегрируя эти выражения, получим

$$S_{C3} = S_{C4} = 0{,}166 \cdot S_{C1}.$$

9. Определить сумму работ (ΣA_i^E) внешних сил, приложенных к механической системе, при перемещении центра C_1 масс тела 1 на расстояние S_{C1}.

$$\Sigma A_i^E = \Sigma A(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma A(\mathbf{R}_i^E),$$

где $\Sigma A(\mathbf{F}_i^E)$ – сумма работ активных сил $\mathbf{F}_i^E$ на конечном перемещении механической системы; $\Sigma A(\mathbf{R}_i^E)$ – сумма работ реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей, наложенных на механичекую систему.

Сумму работ активных сил определим по формуле

$$\Sigma A(\mathbf{F}_i^E) = A(\mathbf{G}_1) + A(\mathbf{G}_2) + A(\mathbf{G}_3) + A(\mathbf{G}_4),$$

где $A(\mathbf{G}_i)$ – работа силы тяжести i-го тела механической системы.

Согласно теоретическому материалу, изложенному в подразделе 5.5.1 данного учебно-методического пособия, справедливы следующие равенства:

$$A(\mathbf{G}_1) = G_1 \cdot H_{C1} = m_1 \cdot g \cdot (S_{C1}) \cdot \sin(\alpha) =$$
$$= m \cdot g \cdot (S_{C1}) \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot 2 \cdot 0{,}5 = m \cdot g,$$

где H_{C1} – перемещение центра C_1 масс тела 1 по высоте.

Работа $A(\mathbf{G}_2)$ силы тяжести тела 2 равна нулю ($A(\mathbf{G}_2) = 0$), так как при движении механической системы центр масс C_2 не изменяет своего положения.

Работу $A(\mathbf{G}_3)$ силы тяжести $\mathbf{G}_3$ тела 3 определим по формуле

$$A(\mathbf{G}_3) = -\,G_3 \cdot H_{C3} = -\,m_3 \cdot g \cdot S_{C3} = -\,0{,}3 \cdot m \cdot g \cdot 0{,}166 \cdot S_{C1} =$$
$$= -\,0{,}3 \cdot m \cdot g \cdot 0{,}166 \cdot 2 = -\,0{,}099\ m \cdot g,$$

где H_{C3} – перемещение центра C_3 масс тела 3 по высоте.

Работа $A(\mathbf{G}_4)$ силы тяжести $\mathbf{G}_4$ равна

$$A(\mathbf{G}_4) = -G_4 \cdot H_{C4} = -m_4 \cdot g \cdot S_{C4} = -1{,}5 \cdot m \cdot g \cdot 0{,}166 \cdot S_{C1} =$$
$$= -1{,}5 \cdot m \cdot g \cdot 0{,}166 \cdot 2 = -0{,}5 \cdot m \cdot g,$$

где H_{C4} – изменение положения центра C_4 масс тела 4 по высоте.

Сумму работ $\Sigma A(\mathbf{R}_i^E)$ реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей определим по формуле

$$\Sigma A(\mathbf{R}_i^E) = A(\mathbf{N}_1) + A(\mathbf{F}_1) + A(\mathbf{Y}_{C2}) + A(\mathbf{Z}_{C2}) + A(\mathbf{T}_L),$$

где $A(\mathbf{N}_1)$, $A(\mathbf{F}_1)$, $A(\mathbf{Y}_{C2})$, $A(\mathbf{Z}_{C2})$, $A(\mathbf{T}_L)$ – работа соответствующей реакции внешней связи.

Работа $A(\mathbf{N}_1)$ нормальной реакции $\mathbf{N}_1$ равна нулю ($A(\mathbf{N}_1)=0$), так как направление реакции $\mathbf{N}_1$ перпендикулярно направлению вектора $\mathbf{S}_{C1}$ перемещения точки её приложения.

Работа $A(\mathbf{F}_1)$ силы трения $\mathbf{F}_1$ определяется по формуле

$$A(\mathbf{F}_1) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{S}_{C1} = -F_1 \cdot S = -(f \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)) \cdot S_{C1} =$$
$$= -0{,}12 \cdot m \cdot g \cdot 0{,}866 \cdot 2 \cdot = -0{,}207 \cdot m \cdot g.$$

Работы $A(\mathbf{Y}_{C2})$, $A(\mathbf{Z}_{C2})$ реакций $\mathbf{Y}_{C2}$, $\mathbf{Z}_{C2}$ шарнирно-неподвижной опоры в точке C_2 соответственно равны нулю: ($A(\mathbf{Y}_{C2}) = 0$; $A(\mathbf{Z}_{C2}) = 0$), так как при вращении тела 2 точки приложения реакций $\mathbf{Y}_{C2}$, $\mathbf{Z}_{C2}$ не изменяют своего положения ($S_{C2} = 0$).

Работа $A(\mathbf{T}_L)$ реакции $\mathbf{T}_L$ растянутой нити равна нулю ($A(\mathbf{T}_L)= 0$), так как точка L приложения этой реакции не изменяет своего положения при движении механической системы.

Вычислим сумму работ ΣA_i^E внешних сил, приложенных к механической системе, при перемещении центра C_1 масс тела 1 на расстояние S_{C1}.

$$\Sigma A_i^E = \Sigma A(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma A(\mathbf{R}_i^E) =$$
$$= m \cdot g - 0{,}099 \cdot m \cdot g - 0{,}5 \cdot m \cdot g - 0{,}207 \cdot m \cdot g = 0{,}194 \cdot m \cdot g.$$

10. Определим скорость центра масс тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь станет равным S_{C1}.

$$T_{Sk} = 0{,}697 \cdot m \cdot V^2 = \Sigma A_i^E = 0{,}194 \cdot m \cdot g.$$

Решая последнее выражение, получим

$$V = \sqrt{(0{,}194 \cdot g)/0{,}697} = \sqrt{(0{,}193 \cdot 9{,}81)/0{,}697} = 1{,}652 \text{ м/с}.$$

Таким образом, ответ на вопрос, поставленный в курсовом задании, получен:

$$V_{C1} = V = 1{,}652 \text{ м/с}.$$