5.6.5. Пример выполнения курсового задания Д 5

В курсовом задании Д 5 требуется определить реакции внешних связей, наложенных на механическую систему в следующих случаях: в произвольный момент времени; в фиксированный момент времени t_1; в тот момент времени, когда угол поворота тела равен значению φ_1.

Рассмотрим последовательно эти случаи.

Случай 1.

Однородный стержень 1 длиной l и точечный груз 2, закрепленный на конце стержня, совершают вращательное движение относительно оси OZ с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_1$ (рис. 5.43).

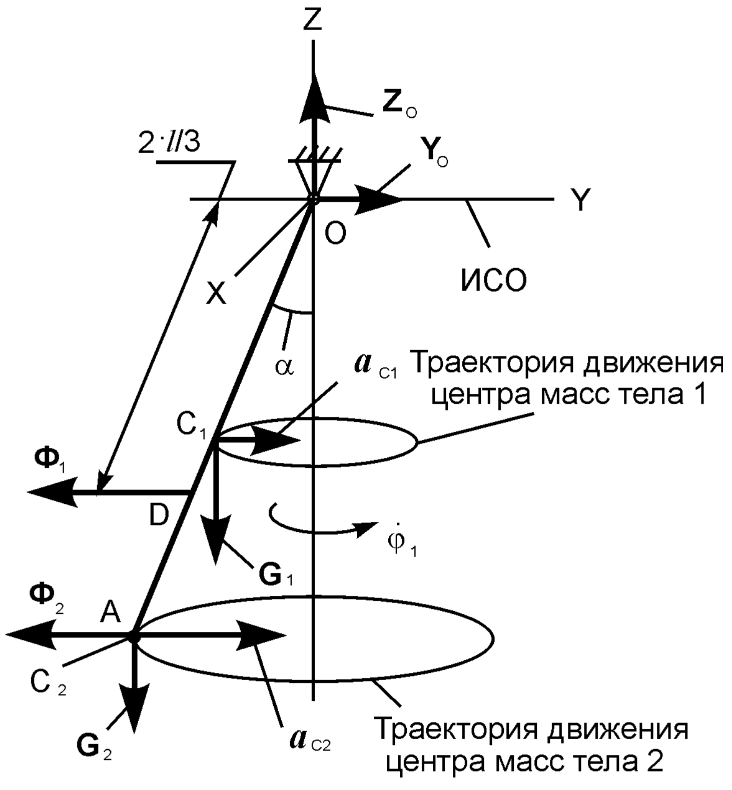

Рис. 5.43

Дано: m_1 = 20 кг; m_2 = 10 кг; OA = l = 1 м; α = 30°. Определить реакции связи в точке O.

Решение.

Запишем формулу, выражающую принцип Даламбера для механической системы в векторном виде:

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \Sigma \mathbf{\Phi}_i = 0,$$

где $\Sigma\mathbf{F}_i^E$ – геометрическая сумма активных сил; $\Sigma\mathbf{R}_i^E$ – геометрическая сумма реакций внешних связей, наложенных на механическую систему; $\Sigma\mathbf{\Phi}_i$ – геометрическая сумма сил инерции.

Согласно этому принципу на механическую систему действуют активные силы $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, реакции $\mathbf{Y}_O$, $\mathbf{Z}_O$ внешней связи и силы инерции $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$. Применительно к рассматриваемой задаче принцип Даламбера выражается формулой

$$\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{Y}_O + \mathbf{Z}_O + \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 = 0.$$

Покажем эти силы на рис. 5.41. Силы $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ поместим в центрах C_1, C_2 масс тел 1 и 2.

Используя исходные данные задачи, запишем формулы для определения модулей активных сил и сил инерции:

$$G_1 = m_1 \cdot g; \quad G_2 = m_2 \cdot g.$$

Так как механическая система вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_1$, то угловое ускорение $\ddot{\varphi}_1 = 0$ и, следовательно, модули a_{C1}, a_{C2} ускорений центров C_1, C_2 масс тел 1 и 2 соответственно равны:

$$a_{C1} = a_{C1}^{\omega} = (\dot{\varphi}_1)^2 \cdot 0{,}5 \cdot l \sin(\alpha);$$

$$a_{C2} = a_{C2}^{\omega} = (\dot{\varphi}_1)^2 \cdot l \sin(\alpha),$$

где a_{C1}^{ω}, a_{C2}^{ω} – модули центростремительных ускорений центров масс тел рассматриваемой механической системы.

Тогда имеем:

$$\Phi_1 = m_1 \cdot a_{C1} = m_1 \cdot a_{C1}^{\omega} = m_1 \cdot ((\dot{\varphi}_1)^2 \cdot 0{,}5 \cdot l \sin(\alpha));$$

$$\Phi_2 = m_1 \cdot a_{C2} = m_1 \cdot a_{C2}^{\omega} = m_2 \cdot ((\dot{\varphi}_1)^2 \cdot l \sin(\alpha)).$$

Сила инерции $\mathbf{\Phi}_1$ тела 1 приложена в точке D на расстоянии $OD = 2 \cdot l/3$, так как эпюра распределения элементарных сил инерции тела 1 имеет форму треугольника.

Согласно рис. 5.43 на рассматриваемую конструкцию действует плоская произвольная система сил ($\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{Y}_O$, $\mathbf{Z}_O$, $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$). Принцип Даламбера в этих условиях выражается системой трех уравнений.

$$\Sigma F_{iOY}^E + \Sigma R_{iOZ}^E + \Sigma \Phi_{iOY} = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{iOZ}^E + \Sigma R_{iOZ}^E + \Sigma \Phi_{iOZ} = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_O(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i) = 0, \quad (3)$$

где $\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_O(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i)$ – суммы моментов соответственно активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно точки O.

Преобразуем последние уравнения к следующему виду:

$$Y_O - \Phi_1 - \Phi_2 = 0; \qquad (1^I)$$
$$-G_1 - G_2 + Z_O = 0; \qquad (2^I)$$
$$G_1 \cdot 0{,}5 \cdot l \cdot \sin(\alpha) + G_2 \cdot l \cdot \sin(\alpha) - \Phi_1 \cdot (2 \cdot l/3) \cdot \cos(\alpha) - \Phi_2 \cdot l \cdot \cos(\alpha) = 0. \qquad (3^I)$$

При использовании условий задачи эти уравнения принимают вид:

$$Y_O - m_1 \cdot ((\dot\varphi_1)^2 \cdot 0{,}5 \cdot l \sin(\alpha)) - m_2 \cdot ((\dot\varphi_1)^2 \cdot l \cdot \sin(\alpha)); \qquad (1^{II})$$
$$-m_1 \cdot g - m_2 \cdot g + Z_O = 0; \qquad (2^{II})$$
$$m_1 \cdot g \cdot 0{,}5 \cdot l \cdot \sin(\alpha) + m_2 \cdot g \cdot l \cdot \sin(\alpha) -$$
$$- m_1 \cdot ((\dot\varphi_1)^2 \cdot 0{,}5 \cdot l \cdot \sin(\alpha)) \cdot (2 \cdot l/3) \cdot \cos(\alpha) -$$
$$- m_2 \cdot ((\dot\varphi_1)^2 \cdot l \cdot \sin(\alpha)) \cdot l \cdot \cos(\alpha) = 0. \qquad (3^{II})$$

В трёх уравнениях (1^{II}), (2^{II}), (3^{II}) содержатся три неизвестные величины: Y_O, Z_O, $\dot\varphi_1$. Решим эти уравнения.

Из уравнения (3^{II}) имеем

$$\dot\varphi_1 = \sqrt{\frac{g \cdot l \cdot \sin(\alpha) \cdot (0{,}5 \cdot m_1 + m_2)}{l \cdot \sin(\alpha) \cdot l \cdot \cos(\alpha) \cdot (0{,}333 \cdot m_1 + m_2)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{g \cdot (0{,}5 \cdot m_1 + m_2)}{l \cdot \cos(\alpha) \cdot (0{,}333 \cdot m_1 + m_2)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot (0{,}5 \cdot 20 + 10)}{1 \cdot 0{,}866 \cdot (0{,}333 \cdot 20 + 10)}} = 3{,}686 \text{ рад/с.}$$

Из уравнения (2^{II}) следует, что

$$Z_O = g \cdot (m_1 + m_2) = 9{,}81 \cdot (20 + 10) = 294{,}300 \text{ Н.}$$

Из уравнения (1^{II}) получим

$$Y_O = (\dot\varphi_1)^2 \cdot l \cdot \sin(\alpha) \cdot (0{,}5 \cdot m_1 + m_2) =$$
$$= 3{,}686^2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5 \cdot 20 + 10) = 135{,}939 \text{)Н.}$$

Таким образом, ответы на вопросы (Y_O = ?, Z_O = ?), поставленные в курсовом задании Д 5, получены.

Случай 2.

Однородный стержень массой m из состояния покоя приходит во вращательное движение относительно вертикальной оси OZ по гладкой горизонтальной плоскости под действием пары сил с моментом M (рис. 5.44).

Определить реакции внешней связи в момент времени t_1.

Дано: $m = 10$ кг; $OA = l = 1$ м; $\varphi_0 = 0$; $\dot\varphi_0 = 0$; $M = 10 \cdot t$; $t_1 = 1$ с.

Решение.

Запишем формулу, выражающую принцип Даламбера в векторном виде:

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \Sigma \mathbf{\Phi}_i = 0,$$

где $\Sigma \mathbf{F}_i^E$ – геометрическая сумма активных сил; $\Sigma \mathbf{R}_i^E$ – геометрическая сумма реакций внешних связей, наложенных на механическую систему; $\Sigma \mathbf{\Phi}_i$ – геометрическая сумма сил инерции.

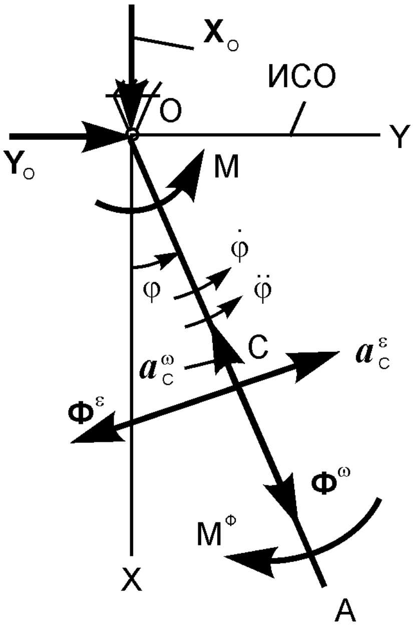

Рис. 5.44

Согласно этому принципу на стержень действуют активная сила **G** (сила тяжести), активная пара сил с моментом М, реакции $\mathbf{X}_O$, $\mathbf{Y}_O$ цилиндрического шарнира в точке О, реакция **N** гладкой горизонтальной поверхности OXY, центробежная $\mathbf{\Phi}^\omega$ и вращательная $\mathbf{\Phi}^\varepsilon$ силы инерции и момент M^Φ сил инерции. Силы **G** и **N** на рис. 5.42 не показаны, так как рисунок приведён в ортогональной проекции.

Стержень на рис. 5.42 изображён в произвольный момент времени, при этом предполагается, что он вращается с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ в сторону возрастания угловой координаты φ с угловым ускорением $\ddot{\varphi}$. Исходя из этого предположения, силы $\mathbf{\Phi}^\omega$, $\mathbf{\Phi}^\varepsilon$ инерции и момент M^Φ сил инерции направлены так, как это показано на рис. 5.44.

Применительно к рассматриваемой задаче принцип Даламбера выражается формулой

$$\mathbf{G} + \mathbf{X}_O + \mathbf{Y}_O + \mathbf{N} + \mathbf{\Phi}^\omega + \mathbf{\Phi}^\varepsilon = 0.$$

Модули Φ^ω, Φ^ε сил инерции и модуль M^Φ момента сил инерции определим по формулам:

$$\Phi^{\omega} = m\cdot a_C^{\omega} = m\cdot((\dot{\varphi})^2\cdot l/2); \quad \Phi^{\varepsilon} = m\cdot a_C^{\varepsilon} = m\cdot(\ddot{\varphi}\cdot l/2);$$

$$M^{\Phi} = J_{CZ}\cdot\ddot{\varphi} = (m\cdot l^2/12)\cdot\ddot{\varphi}.$$

Поскольку стержень движется по гладкой горизонтальной поверхности, то силы **G** и **N** на это движение не влияют и, следовательно, их можно исключить из рассмотрения. В этих условиях принцип Даламбера выражается системой трёх уравнений:

$$\Sigma F_{iOX}^{E} + \Sigma R_{iOX}^{E} + \Sigma \Phi_{iOX} = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{iOY}^{E} + \Sigma R_{iOY}^{E} + \Sigma \Phi_{iOY} = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^{E}) + \Sigma M_O(\mathbf{R}_i^{E}) + \Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i) = 0, \qquad (3)$$

где $\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^{E})$, $\Sigma M_O(\mathbf{R}_i^{E})$, $\Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i)$ – суммы моментов соответственно активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно произвольной точки O.

Применительно к рассматриваемой задаче имеем:

$$X_O + \Phi^{\omega}\cdot\cos(\varphi) + \Phi^{\varepsilon}\cdot\sin(\varphi) = 0; \qquad (1^{I})$$

$$Y_O + \Phi^{\omega}\cdot\sin(\varphi) + \Phi^{\varepsilon}\cdot\cos(\varphi) = 0; \qquad (2^{I})$$

$$M - \Phi^{\varepsilon}\cdot(l/2) - M^{\Phi} = 0. \qquad (3^{I})$$

При использовании условий задачи эти уравнения приобретают следующий вид:

$$X_O + m((\dot{\varphi})^2\cdot l/2)\cdot\cos(\varphi) + m(\ddot{\varphi}\cdot l/2)\cdot\sin(\varphi) = 0; \qquad (1^{II})$$

$$Y_O + m\cdot((\dot{\varphi})^2\cdot l/2)\cdot\sin(\varphi) + m\cdot(\ddot{\varphi}\cdot l/2)\cdot\cos(\varphi) = 0; \qquad (2^{II})$$

$$M - m\cdot(\ddot{\varphi}\cdot l/2)\cdot(l/2) - (m\cdot l^2/12)\cdot\ddot{\varphi} = 0. \qquad (3^{II})$$

Следует отметить, что угловая скорость $\dot{\varphi}$, угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ и угол φ поворота зависят от времени t ($\dot{\varphi} = f_1(t)$; $\ddot{\varphi} = f_2(t)$; $\varphi = f_3(t)$). В момент времени t_1 они будут иметь соответствующие значения $\dot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_1$, φ_1. Внесём эти значения в последние уравнения.

$$X_O + m\cdot((\dot{\varphi}_1)^2\cdot l/2)\cdot\cos(\varphi_1) + m\cdot(\ddot{\varphi}_1\cdot l/2)\cdot\sin(\varphi_1) = 0; \qquad (1^{III})$$

$$Y_O + m\cdot((\dot{\varphi}_1)^2\cdot l/2)\cdot\sin(\varphi_1) + m\cdot(\ddot{\varphi}_1\cdot l/2)\cdot\cos(\varphi_1) = 0; \qquad (2^{III})$$

$$M - m\cdot(\ddot{\varphi}_1\cdot l/2)\cdot(l/2) - (m\cdot l^2/12)\cdot\ddot{\varphi}_1 = 0. \qquad (3^{III})$$

Нетрудно заметить, что в трёх уравнениях содержатся следующие неизвестные величины: X_O, Y_O, $\dot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_1$, φ_1, следовательно, для успешного решения задачи требуется получить дополнительные уравнения. Для этого дифференциальное уравнение (3^{III}) представим в следующем виде:

$$(m\cdot l^2/3)\cdot\ddot{\varphi}_1 = 10\cdot t.$$

Преобразовав это уравнение, получим

$$\ddot{\varphi}_1 = 30\cdot t/(m\cdot l^2). \qquad (4)$$

Дважды проинтегрировав последнее уравнение, получим:

$$\dot{\varphi}_1 = (30/(m\cdot l^2))\cdot(t^2/2) + C_1 = (15/(m\cdot l^2))\cdot t^2 + C_1;$$
$$\varphi = (15/(m\cdot l^2))\cdot(t^3/3) + C_1\cdot t + C_2 = (5/(m\cdot l^2))\cdot t^3 + C_1\cdot t + C_2,$$
где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям движения.

Поскольку $\dot{\varphi}_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Тогда справедливы выражения:

$$\dot{\varphi} = (15/(m\cdot l^2))\cdot t^2; \quad (5)$$
$$\varphi = (5/(m\cdot l^2))\cdot t^3. \quad (6)$$

Если в уравнения (4), (5), (6) подставить значения времени t_1, то получим:

$$\ddot{\varphi}_1 = (30/(m\cdot l^2))\cdot t_1 = (30/(10\cdot 1^2))\cdot 1 = 3 \text{ рад/с}^2; \quad (4^I)$$
$$\dot{\varphi}_1 = (15/(m\cdot l^2))\cdot(t_1)^2 = (15/(10\cdot 1^2))\cdot 1^2 = 1{,}5 \text{ рад/с}; \quad (5^I)$$
$$\varphi_1 = (5/(m\cdot l^2))\cdot(t_1)^3 = (5/(10\cdot 1^2))\cdot 1^3 = 0{,}5 \text{ рад}. \quad (6^1)$$

Определим значения $\sin(\varphi_1)$ и $\cos(\varphi_1)$:

$$\sin(\varphi_1) = 0{,}479; \ \cos(\varphi_1) = 0{,}877.$$

По известным величинам $\ddot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_1$, $\sin(\varphi_1)$, $\cos(\varphi_1)$ определим проекции X_O, Y_O реакций связи на координатные оси:

$$X_O = -\, m\cdot((\dot{\varphi}_1)^2\cdot l/2)\cdot\cos(\varphi_1) - m\cdot(\ddot{\varphi}_1\cdot l/2)\cdot\sin(\varphi_1) =$$
$$= -10\cdot(3{,}5^2\cdot 1/2)\cdot 0{,}877 - 10\cdot(1{,}5\cdot 1/2)\cdot 0{,}479 = -\,57{,}308 \text{ Н};$$
$$Y_O = -\, m\cdot((\dot{\varphi}_1)^2\cdot l/2)\cdot\sin(\varphi_1) + m\cdot(\ddot{\varphi}_1\cdot l/2)\cdot\cos(\varphi_1) =$$
$$= -10\cdot(3{,}5^2\cdot 1/2)\cdot 0{,}479 + 10\cdot(1{,}5\cdot 1/2)\cdot 0{,}877 = -\,22{,}760 \text{ Н}.$$

Таким образом, ответы на вопросы (X_O = ?, Y_O = ?), поставленные в курсовом задании Д 5, получены.

Случай 3.

Однородный круг массой m и радиусом R находится в состоянии покоя. В момент времени $t_0 = 0$ ему придали угловую скорость $\dot{\varphi}_0$. Определить реакции внешней связи в момент времени, когда угол поворота тела равен значению φ_1. На рис. 5.45 круг изображен в произвольный момент времени.

Дано: m = 10 кг; R = 1 м; $\varphi_1 = 60^o$; $\varphi_0 = 0^o$; $\dot{\varphi}_0 = 10$ рад/с.

Решение.

Запишем формулу, выражающую принцип Даламбера в векторной форме:

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \Sigma \mathbf{\Phi}_i = 0,$$

где $\Sigma \mathbf{F}_i^E$ – геометрическая сумма активных сил; $\Sigma \mathbf{R}_i^E$ – геометрическая сумма реакций внешних связей, наложенных на механическую систему; $\Sigma \mathbf{\Phi}_i$ – геометрическая сумма сил инерции.

По условию задания на материальное тело действует активная сила тяжести **G**, реакции $\mathbf{Y}_O$, $\mathbf{Z}_O$ цилиндрического шарнира, центробежная $\mathbf{\Phi}^{\omega}$ и вращательная $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}$ силы инерции и момент M^{Φ} сил инерции. Направления нагрузок **G**, $\mathbf{Y}_O$, $\mathbf{Z}_O$, $\mathbf{\Phi}^{\omega}$, $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}$, M^{Φ} показаны на рис. 5.45.

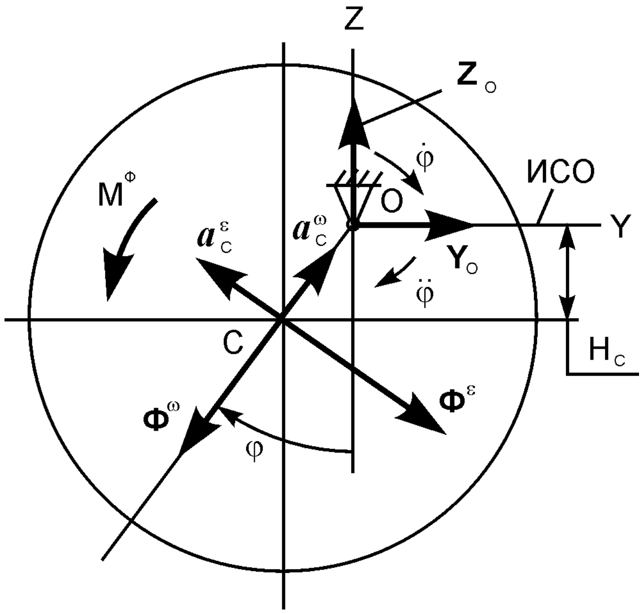

Рис. 5.45

При определении направления этих нагрузок предполагается, что тело вращается в сторону увеличения угловой координаты φ ускоренно. Модули инерционных нагрузок в момент времени t_1, когда угол поворота тела равен φ_1, определяют по формулам:

$$\Phi^{\omega} = m\cdot a_C^{\omega} = m\cdot((\dot{\varphi})^2\cdot OC);\quad \Phi^{\varepsilon} = m\cdot a_C^{\varepsilon} = m\cdot(\ddot{\varphi}\cdot OC);$$

$$M^{\Phi} = J_{CX1}\cdot\ddot{\varphi} = (m\cdot R^2/2)\cdot\ddot{\varphi},$$

где a_C^{ω}, a_C^{ε}, J_{CX1} – соответственно модули центростремительного и вращательного ускорений центра масс и момент инерции круга относительно оси, проходящей через центр масс.

Так как система сил, действующая на круг, является плоской и произвольной, то для решения поставленной задачи необходимо составить три уравнения:

$$\Sigma F_{iOY}^{E} + \Sigma R_{iOY}^{E} + \Sigma \Phi_{iOY} = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{iOZ}^{E} + \Sigma R_{iOZ}^{E} + \Sigma \Phi_{iOZ} = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_O(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i) = 0, \qquad (3)$$

где $\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_O(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i)$ – суммы моментов соответственно активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно точки О.

Для рассматриваемого варианта курсового задания Д 5 имеем:

$$Y_O - \Phi^{\omega}\cdot\sin(\varphi) + \Phi^{\varepsilon}\cdot\cos(\varphi) = 0; \qquad (1^I)$$

$$-G + Z_O - \Phi^{\omega}\cdot\cos(\varphi) - \Phi^{\varepsilon}\cdot\sin(\varphi) = 0; \qquad (2^I)$$

$$G\cdot(0{,}5\cdot R)\cdot\sin(\varphi) + \Phi^{\varepsilon}\cdot(0{,}5\cdot R) + M^{\Phi} = 0. \qquad (3^I)$$

В уравнения (1^I), (2^I), (3^I) введём обозначения исходных данных.

$$Y_O - m((\dot{\varphi})^2\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot\sin(\varphi) + m\cdot(\ddot{\varphi}\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot\cos(\varphi) = 0; \qquad (1^{II})$$

$$m\cdot g + Z_O - m\cdot((\dot{\varphi})^2\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot\cos(\varphi) - m\cdot(\ddot{\varphi}\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot\sin(\varphi) = 0; \qquad (2^{II})$$

$$m\cdot g\cdot 0{,}5\cdot R\cdot\sin(\varphi) + m(\ddot{\varphi}\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot 0{,}5\cdot R + (m\cdot R^2/2)\cdot\ddot{\varphi} = 0. \qquad (3^{II})$$

Очевидно, что при вращении тела его угловой путь φ, угловая скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ будут переменны и взаимозависимы. При значении угла φ_1 угловая скорость будет иметь значение $\dot{\varphi}_1$, а угловое ускорение значение $\ddot{\varphi}_1$. Исходя из этого, уравнения (1^{II}), (2^{II}), (3^{II}) приобретают вид:

$$Y_O - m((\dot{\varphi}_1)^2\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot\sin(\varphi_1) + m\cdot(\ddot{\varphi}_1\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot\cos(\varphi_1) = 0; \qquad (1^{III})$$

$$m\cdot g + Z_O - m\cdot((\dot{\varphi}_1)^2\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot\cos(\varphi_1) - m\cdot(\ddot{\varphi}_1\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot\sin(\varphi_1) = 0; \qquad (2^{III})$$

$$m\cdot g\cdot 0{,}5\cdot R\cdot\sin(\varphi_1) + m\cdot(\ddot{\varphi}_1\cdot 0{,}5\cdot R)\cdot 0{,}5\cdot R + (m\cdot R^2/2)\cdot\ddot{\varphi}_1 = 0. \qquad (3^{III})$$

В системе этих уравнений содержатся следующие неизвестные: Y_O, Z_O, $\dot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_1$. Для решения задачи необходимо получить четвёртое уравнение.

Проанализируем исходные данные задачи. Нам известны начальное ($\varphi_0 = 0$) и конечное (φ_1) значения угла поворота тела. Связь между начальным и конечным значениями параметров определяется теоремой об изменении кинетической энергии механической системы на её конечном перемещении.

$$T_{Sk} - T_{Sn} = \Sigma A_i^E,$$

где T_{Sk} – кинетическая энергия механической системы в конечном положении; T_{Sn} – кинетическая энергия механической системы в начальном положении; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил, приложенных к механической системе, на её перемещении.

Кинетическую энергию твёрдого тела при его вращательном движении определяют по формуле

$$T = 0{,}5\cdot J_{OX}\cdot(\dot{\varphi})^2,$$

где J_{OX} – момент инерции тела относительно оси ОХ вращения; $\dot{\varphi}$ – угловая скорость.

Для рассматриваемой задачи

$$J_{OX} = m \cdot R^2/2 + m \cdot (CO)^2 = m \cdot R^2/2 + m \cdot (0{,}5 \cdot R)^2 = 0{,}75\ m \cdot R^2.$$

Тогда получим

$$T = 0{,}75 \cdot m \cdot R^2 \cdot (\dot{\varphi})^2.$$

Определим кинетические энергии тела в начальный и конечный моменты времени:

$$T_{Sn} = 0{,}75 \cdot m \cdot R^2 (\dot{\varphi}_0)^2; \quad T_{Sk} = 0{,}75 \cdot m \cdot R^2 \cdot (\dot{\varphi}_1)^2.$$

Определим сумму работ внешних сил, приложенных к телу, при его повороте из начального положения ($\varphi_0 = 0$) в конечное положение ($\varphi_1 = 60^o$).

$$\Sigma A_i^E = -G \cdot H_C = -m \cdot g \cdot (0{,}5 \cdot R - 0{,}5 \cdot R \cdot \cos(\varphi_1)) =$$
$$= -0{,}5 \cdot m \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos(\varphi_1)).$$

Применительно к условиям задания теорема об изменении кинетической энергии приобретает вид

$$0{,}75 \cdot m \cdot R^2 \cdot ((\dot{\varphi}_1)^2 - (\dot{\varphi}_0)^2) = -0{,}5 \cdot m \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos(\varphi_1)).$$

Отсюда определим значение $\dot{\varphi}_1$ угловой скорости.

$$\dot{\varphi}_1 = \sqrt{\frac{0{,}75 \cdot R \cdot (\dot{\varphi}_0)^2 - 0{,}5 \cdot g \cdot (1 - \cos(\varphi_1))}{0{,}75 \cdot R}} =$$
$$= \sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 1 \cdot (10)^2 - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot (1 - 0{,}5)}{0{,}75 \cdot 1}} = 9{,}835 \text{ рад/с}.$$

Решим систему уравнений (1^{III}), (2^{III}), (3^{III}) относительно неизвестных величин Y_O, Z_O, $\ddot{\varphi}_1$.

Из уравнения (3^{III}) имеем

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{0{,}5 \cdot m \cdot g \cdot R \cdot \sin(\varphi_1)}{0{,}75 \cdot m \cdot (R)^2} = -\frac{0{,}5 \cdot g \cdot \sin(\varphi_1)}{0{,}75 \cdot R} =$$
$$= -\frac{0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}866}{0{,}75 \cdot 1} = -5{,}663 \text{ рад/с}^2.$$

Из уравнения (1^{III}) определим Y_O.

$$Y_O = m \cdot (\dot{\varphi}_1)^2 \cdot 0{,}5 \cdot R \cdot \sin(\varphi_1) - m \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot 0{,}5 \cdot R \cdot \cos(\varphi_1) =$$
$$= 10 \cdot 9{,}835^2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}866 - 10(-5{,}663) \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 497{,}793 \text{ Н}.$$

Из уравнения (2^{III}) получим

$$Z_O = m \cdot g + m \cdot (\dot{\varphi}_1)^2 \cdot 0{,}5 \cdot R \cdot \cos(\varphi_1) + m \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot 0{,}5 \cdot R \cdot \sin(\varphi_1) =$$
$$= 10 \cdot 9{,}81 + 10 \cdot 9{,}835^2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 10(-5{,}663) \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}866 = 315{,}397 \text{ Н}.$$

Таким образом, ответы на вопросы (Y_O =?, Z_O = ?), поставленные в курсовом задании Д 5, получены.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать определение понятия «***сила инерции***».
2. Записать формулу для определения ***силы инерции материальной точки***.
3. Записать формулу, выражающую ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в векторной форме.
4. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для свободной материальной точки*** в координатной форме.
5. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в координатной форме.
6. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной механической системы*** в векторной форме.
7. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной неизменяемой механической системы*** в координатной форме.
8. Записать формулу для определения ***главного вектора сил инерции*** поступательно движущегося твёрдого тела.
9. Записать формулы, по которым определяются ***центробежная и вращательная силы инерции и момент сил инерции*** при вращательном движении тела относительно оси, не проходящей через центр масс, в случае, когда силы инерции приложены в центре масс.
10. Записать формулу для определения ***момента сил инерции*** при вращении тела относительно оси, проходящей через его центр масс.
11. Записать формулы для определения инерционных нагрузок при плоскопараллельном движении твёрдого тела.