

Числення предикатів (самостійна робота)

1. Нехай предикати $P_1(x, y), P_2(x, y), T(x)$ та функції $f(x, y), g(x)$ задано на множині $\{a, b, c\}$ таблицями значень:

P_1	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	0
c	0	1	0

P_2	a	b	c
a	0	0	0
b	1	1	1
c	1	0	1

	T
a	0
b	1
c	0

$f :$

	a	b	c
a	a	a	b
b	b	a	a
c	a	c	b

$g :$

a	c
b	a
c	b

Побудувати таблиці значень предикатів:

- a) $(\exists y \neg P_1(x, y)) \rightarrow (\exists y P_2(x, y) \wedge \forall x T(x))$;
- b) $(\exists x P_2(x, y)) \vee (\exists y \neg P_1(f(x, g(y)), x))$;
- c) $\exists y (\forall x \neg P_1(x, y) \rightarrow P_2(f(x, y), y)) \leftrightarrow (P_2(x, y) \wedge T(g(y)))$;
- d) $\exists x (T(x) \leftrightarrow \forall y P_1(x, y) \wedge P_2(x, y))$;
- e) $T(g(x)) \rightarrow (\exists y P_1(x, y) \vee \forall x P_2(x, y))$.
- f) $(T(f(x, y)) \rightarrow (\exists y P_2(g(x), y) \vee \forall x P_1(x, g(y))))$

2. Скільки інтерпретацій мають формули

$$a) \exists x_2 \forall x_1 (\exists x_1 P_1(x_1, x_2) \rightarrow (P_2(x_1, x_2) \rightarrow P_3(x_1, x_3))) \vee \neg P_4(x_4);;$$

$$b) \exists x_2 (\forall x_1 (P_1(x_1, x_2) \rightarrow P_2(x_1, x_2, x_3))) \wedge P_3(x_1, x_2);;$$

на множині з семи елементів?

Скільки існує моделей формули

$$\exists x \forall y (A(x, y) \rightarrow A(y, x))$$

на множині з п'яти елементів?

4. До якого типу відносяться формули:

- a) $\exists x (A \vee B) \rightarrow ((\exists x A) \vee (\forall x B))$;
- b) $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow ((\forall x A) \rightarrow (\forall x B))$;
- c) $\forall x (A \leftrightarrow B) \rightarrow (\forall x A \leftrightarrow \forall x B)$;
- d) $((\forall x A) \rightarrow (\forall x B)) \rightarrow \forall x (A \rightarrow B)$.

5. Довести теореми числення висловлювань та числення предикатів.

a) $\vdash \neg F \rightarrow (F \rightarrow G)$

$$b) \vdash (\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow G)$$

$$c) \vdash (F \rightarrow G) \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F)$$

$$d) \vdash F \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg(F \rightarrow G))$$

$$e) \vdash (F \rightarrow G) \rightarrow ((\neg F \rightarrow G) \rightarrow G)$$

$$1. \vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$$

$$2. \vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$$

$$3. \vdash \forall x A(x) \rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)).$$

$$4. \vdash \exists x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)).$$

$$7. \vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$8. (\vdash \neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B).$$

6. Оцінити часову складність обчислення функцій

1) $x^5 + v^4$ за $mod 7$;

2) $4x^4 + 3x^2 + x + 7$;

де x і y деякі цілі числа.