

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.К.АММОСОВА» ЧУКОТСКИЙ ФИЛИАЛ**

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников
по направлениям подготовки:
140400.62 «Теплоэнергетика и теплотехника»
230100.62 «Информатика и вычислительная техника»

Анадырь 2012

Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ

Цель курса – научить студентов применению математики в специальных дисциплинах и изучении практических явлений.

Предназначено для студентов-заочников и содержит теоретические вопросы и контрольные задания. Каждое задание состоит из 20 вариантов. Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса по рекомендованным учебным пособиям.

Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует написать свою фамилию, инициалы, адрес, шифр (номер студенческого билета), название дисциплины и дату сдачи работы.

Решения необходимо приводить в той же последовательности, в какой даны условия задач. При этом условие задачи полностью переписывается перед её решением, в него вставляются необходимые данные.

В незначительной работе студент должен исправить отмеченные ошибки и недочеты, учесть рекомендации и советы рецензента.

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого определяется следующим образом: а) если предпоследняя цифра в номере студенческого билета - четное число, то номер варианта совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки; б) если предпоследняя цифра нечетная, то выбирается номер варианта с 11 по 20, последняя цифра которого совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки.

Контрольная работа, выполненная с нарушением изложенных выше требований или выполненная студентом не по своему варианту, не зачитывается и возвращается без проверки.

Программа курса

I курс

Глава 1. Линейная и векторная алгебра

Векторы: определения, свойства, линейные операции над ними. Базис, размерность пространства. Разложения вектора по базису. Скалярное произведение векторов. Евклидово n -мерное пространство. Геометрическое изображение векторов в трехмерном пространстве. Координаты векторов, разложение вектора по прямоугольному базису. Нелинейные операции: скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, свойства и применения произведений. Матрицы, операции над ними. Определители, их свойства. Обратная матрица. Системы линейных уравнений. Ранг матрицы, совместность систем уравнений. Отыскание решений линейной системы с помощью обратной матрицы. Правило Крамера, метод Гаусса.

Глава 2. Аналитическая геометрия

Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Простейшие задачи: расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, площадь треугольника. Полярная система координат.

Линии и плоскости. Линии и поверхности в пространстве. Уравнения прямой на плоскости: общее, с угловым коэффициентом, через две точки, в «отрезках», нормальное. Кривые второго порядка на плоскости, их канонические уравнения. Плоскость и прямая в пространстве, различные виды их уравнений. Взаиморасположение прямой и плоскости в пространстве. Канонические уравнения поверхности второго порядка.

Глава 3. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Множество действительных чисел. Модуль действительного числа. Погрешности вычисления. Функция.

Предел функции, свойства пределов. Первый замечательный предел. Последовательность, определение предела последовательности. Размещения, сочетания, сочетания с повторениями. Число e . Второй замечательный предел. Бесконечно малые и бесконечно большие.

Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций. Точки разрыва, их классификация. Свойства непрерывных функций.

Производная функции. Приращение функции, определение производной, геометрическая и физическая интерпретации, правила дифференцирования. Производные элементарных функций. Таблица производных. Производные сложной и обратной функций.

Дифференцируемость функции одной переменной. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью, дифференцируемостью и существованием производных. Дифференциал функции одной переменной, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Физический и геометрический смысл второй производной. Производная функции, заданной с помощью параметра. Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора для функции одной переменной.

Исследование и построение графиков функций. Возрастание и убывание функции на промежутки. Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Глава 4. Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределенный интеграл. Задача интегрирования, первообразная функция. Теорема о множестве первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства, таблица интегралов. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной и интегрирование по частям. Интегрирование некоторых классов функций. Разложение рациональных дробей на простейшие. Интегрирование простейших дробей и рациональных функций. Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости. Свойства определенного интеграла. Оценки интеграла. Теорема о среднем.

Связь между определенным и неопределенным интегралами. Теорема Барроу о производной интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Приложения определенного интеграла.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций. Теоремы сравнения. Абсолютная и условная сходимость.

Контрольная работа I. Линейная и векторная алгебра

Задача 1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: 1) найти её решение с помощью формул Крамера; 2) решить методом Гаусса; 3) записать систему в матричной форме и решить её средствами матричного исчисления. Проверить правильность вычисления обратной матрицы, используя матричное умножение.

$$1. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11, \\ -2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -10, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 8, \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -10, \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -1, \\ -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -13. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 8x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Задача 2. Коллинеарны ли векторы \vec{c}_1 и \vec{c}_2 , построенные по векторам \vec{a} и \vec{b} ?

1. $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$, $\vec{b} = \{3; 0; -1\}$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$.
2. $\vec{a} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; 3; 5\}$, $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$.
3. $\vec{a} = \{-2; 4; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 7\}$, $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}$.
4. $\vec{a} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{b} = \{2; -1; -1\}$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 8\vec{a} - \vec{b}$.
5. $\vec{a} = \{3; 5; 4\}$, $\vec{b} = \{5; 9; 7\}$, $\vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.
6. $\vec{a} = \{1; 4; -2\}$, $\vec{b} = \{1; 1; -1\}$, $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}$.
7. $\vec{a} = \{1; -2; 5\}$, $\vec{b} = \{3; -1; 0\}$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$.
8. $\vec{a} = \{3; 4; -1\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$.
9. $\vec{a} = \{-2; -3; -2\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 5\}$, $\vec{c}_1 = 3\vec{a} + 9\vec{b}$, $\vec{c}_2 = -3\vec{b} - \vec{a}$.
10. $\vec{a} = \{-1; 4; 2\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 6\}$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}$.
11. $\vec{a} = \{5; 0; -1\}$, $\vec{b} = \{7; 2; 3\}$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}$.
12. $\vec{a} = \{0; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$, $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$.
13. $\vec{a} = \{-2; 7; -1\}$, $\vec{b} = \{-3; 5; 2\}$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.
14. $\vec{a} = \{3; 7; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -3; 4\}$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$.
15. $\vec{a} = \{-1; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{2; -7; 1\}$, $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$.
16. $\vec{a} = \{7; 9; -2\}$, $\vec{b} = \{5; 4; 3\}$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{b} - \vec{a}$.
17. $\vec{a} = \{5; 0; -2\}$, $\vec{b} = \{6; 4; 3\}$, $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 6\vec{b} - 10\vec{a}$.
18. $\vec{a} = \{8; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{4; 1; 3\}$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}_2 = 2\vec{b} - 4\vec{a}$.
19. $\vec{a} = \{3; -1; 6\}$, $\vec{b} = \{5; 7; 10\}$, $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$.
20. $\vec{a} = \{1; -2; 4\}$, $\vec{b} = \{7; 3; 5\}$, $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами \overline{AB} и \overline{AC} .

1. $A(1; -2; 3)$, $B(0; -1; 2)$, $C(3; -4; 5)$.
2. $A(0; 1; -2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(4; 1; 1)$.
3. $A(3; 3; -1)$, $B(5; 5; -2)$, $C(4; 1; 1)$.
4. $A(-1; 2; -3)$, $B(3; 4; -6)$, $C(1; 1; -1)$.
5. $A(-4; -2; 0)$, $B(-1; -2; 4)$, $C(3; -2; 1)$.
6. $A(2; -4; 6)$, $B(0; -2; 4)$, $C(6; -8; 10)$.
7. $A(5; 3; -1)$, $B(5; 2; 0)$, $C(6; 4; -1)$.
8. $A(-3; -7; -5)$, $B(0; -1; -2)$, $C(2; 3; 0)$.
9. $A(3; 3; -1)$, $B(1; 5; -2)$, $C(4; 1; 1)$.
10. $A(0; -3; 6)$, $B(-12; -3; -3)$, $C(-9; -3; -6)$.
11. $A(2; 1; -1)$, $B(6; -1; -4)$, $C(4; 2; 1)$.
12. $A(-1; -2; 1)$, $B(-4; -2; 5)$, $C(-8; -2; 2)$.
13. $A(6; 2; -3)$, $B(6; 3; -2)$, $C(7; 3; -3)$.
14. $A(0; 0; 4)$, $B(-3; -6; 1)$, $C(-5; -10; -1)$.
15. $A(0; 2; -4)$, $B(8; 2; 2)$, $C(6; 2; 4)$.
16. $A(3; -6; 9)$, $B(0; -3; 6)$, $C(9; -12; 15)$.
17. $A(3; 3; -1)$, $B(5; 1; -2)$, $C(4; 1; 1)$.
18. $A(2; -8; -1)$, $B(4; -6; 0)$, $C(-2; -5; -1)$.

19. $A(-4; 3; 0)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-2; 4; -2)$. 20. $A(1; -1; 0)$, $B(-2; -1; 4)$, $C(8; -1; -1)$.

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

$$1. \vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}; |\vec{p}| = 10, |\vec{q}| = 1, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}; |\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 4, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}; |\vec{p}| = 6, |\vec{q}| = 7, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$4. \vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}; |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 4, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$5. \vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}; |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$6. \vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}; |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$7. \vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}; |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$8. \vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}; |\vec{p}| = \frac{1}{2}, |\vec{q}| = 2, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$9. \vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}; |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 4, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$10. \vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}; |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$11. \vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}; |\vec{p}| = 8, |\vec{q}| = \frac{1}{2}, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$12. \vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}, \vec{b} = \vec{q} - \vec{p}; |\vec{p}| = 2,5, |\vec{q}| = 2, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$13. \vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}; |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 1, \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$14. \vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}; \quad |\vec{p}| = 3, \quad |\vec{q}| = 5, \quad \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$15. \vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}; \quad |\vec{p}| = 7, \quad |\vec{q}| = 2, \quad \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$16. \vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}; \quad |\vec{p}| = 5, \quad |\vec{q}| = 3, \quad \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$17. \vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}; \quad |\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 3, \quad \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$18. \vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 5\vec{q} + \vec{p}; \quad |\vec{p}| = \frac{1}{2}, \quad |\vec{q}| = 4, \quad \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{5\pi}{4}.$$

$$19. \vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}; \quad |\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 1, \quad \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$20. \vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}; \quad |\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 3, \quad \left(\overset{\wedge}{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 5. Написать разложение вектора \vec{v} по векторам \vec{p} , \vec{q} и \vec{r} .

$$1. \vec{v} = \{6; 5; -14\}, \vec{p} = \{1; 1; 4\}, \vec{q} = \{0; -3; 2\}, \vec{r} = \{2; 1; -1\}$$

$$2. \vec{v} = \{6; -1; 7\}, \vec{p} = \{1; -2; 0\}, \vec{q} = \{-1; 1; 3\}, \vec{r} = \{1; 0; 4\}$$

$$3. \vec{v} = \{5; 15; 0\}, \vec{p} = \{1; 0; 5\}, \vec{q} = \{-1; 3; 2\}, \vec{r} = \{0; -1; 1\}$$

$$4. \vec{v} = \{2; -1; 11\}, \vec{p} = \{1; 1; 0\}, \vec{q} = \{0; 1; -2\}, \vec{r} = \{1; 0; 3\}$$

$$5. \vec{v} = \{11; 5; -3\}, \vec{p} = \{1; 0; 2\}, \vec{q} = \{-1; 0; 1\}, \vec{r} = \{2; 5; -3\}$$

$$6. \vec{v} = \{8; 0; 5\}, \vec{p} = \{2; 0; 1\}, \vec{q} = \{1; 1; 0\}, \vec{r} = \{4; 1; 2\}$$

$$7. \vec{v} = \{3; 1; 8\}, \vec{p} = \{0; 1; 3\}, \vec{q} = \{1; 2; -1\}, \vec{r} = \{2; 0; -1\}$$

$$8. \vec{v} = \{8; 1; 12\}, \vec{p} = \{1; 2; -1\}, \vec{q} = \{3; 0; 2\}, \vec{r} = \{-1; 1; 1\}$$

$$9. \vec{v} = \{-9; -8; -3\}, \vec{p} = \{1; 4; 1\}, \vec{q} = \{-3; 2; 0\}, \vec{r} = \{1; -1; 2\}$$

$$10. \vec{v} = \{-5; 9; -13\}, \vec{p} = \{0; 1; -2\}, \vec{q} = \{3; -1; 1\}, \vec{r} = \{4; 1; 0\}$$

$$11. \vec{v} = \{-15; 5; 6\}, \vec{p} = \{0; 5; 1\}, \vec{q} = \{3; 2; -1\}, \vec{r} = \{-1; 1; 0\}$$

$$12. \vec{v} = \{23; -14; -30\}, \vec{p} = \{2; 1; 0\}, \vec{q} = \{1; -1; 0\}, \vec{r} = \{-3; 2; 5\}$$

$$13. \vec{v} = \{8; 9; 4\}, \vec{p} = \{1; 0; 1\}, \vec{q} = \{0; -2; 1\}, \vec{r} = \{1; 3; 0\}$$

$$14. \vec{v} = \{3; 1; 3\}, \vec{p} = \{2; 1; 0\}, \vec{q} = \{1; 0; 1\}, \vec{r} = \{4; 2; 1\}$$

$$15. \vec{v} = \{-1; 7; 0\}, \vec{p} = \{0; 3; 1\}, \vec{q} = \{1; -1; 2\}, \vec{r} = \{2; -1; 0\}$$

16. $\vec{v} = \{11; -1; 4\}$, $\vec{p} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{q} = \{3; 2; 0\}$, $\vec{r} = \{-1; 1; 1\}$
17. $\vec{v} = \{-13; 2; 18\}$, $\vec{p} = \{1; 1; 4\}$, $\vec{q} = \{-3; 0; 2\}$, $\vec{r} = \{1; 2; -1\}$
18. $\vec{v} = \{0; -8; 9\}$, $\vec{p} = \{0; -2; 1\}$, $\vec{q} = \{3; 1; -1\}$, $\vec{r} = \{4; 0; 1\}$
19. $\vec{v} = \{8; -7; -13\}$, $\vec{p} = \{0; 1; 5\}$, $\vec{q} = \{3; -1; 2\}$, $\vec{r} = \{-1; 0; -1\}$
20. $\vec{v} = \{15; -20; -1\}$, $\vec{p} = \{0; 2; 1\}$, $\vec{q} = \{0; 1; -1\}$, $\vec{r} = \{5; -3; 2\}$

Контрольная работа 2. Аналитическая геометрия

Задача 1. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения её с прямой: $Ax + By + C = 0$.

1. $2x^2 - 4x - y + 3 = 0, 2x - y - 1 = 0.$
2. $x - 2y^2 + 4y - 3 = 0, x - 2y + 1 = 0.$
3. $x^2 - 2x - y + 2 = 0, x - y = 0.$
4. $x - y^2 + 2y - 2 = 0, x + y - 2 = 0.$
5. $x^2 - 2x + y + 2 = 0, x - y - 2 = 0.$
6. $x + y^2 - 2y + 3 = 0, x + y + 1 = 0.$
7. $2x^2 + 8x + y + 7 = 0, 2x + y + 3 = 0.$
8. $x + 2y^2 - 4y + 4 = 0, x - 2y + 4 = 0.$
9. $x^2 + 4x + y + 3 = 0, x - y + 3 = 0.$
10. $x + 2x^2 + 4y + 1 = 0, x + 2y + 1 = 0.$
11. $x^2 - 2x + y - 3 = 0, 3x - y - 2 = 0.$
12. $y^2 + x - 4y + 6 = 0, 3x + 10 = 0.$
13. $2x^2 + y^2 - 12x + 10 = 0, x + y - 2 = 0.$
14. $x^2 + 2x + y - 2 = 0, 2x - y + 4 = 0.$
15. $2x^2 + 4x + y^2 - 2 = 0, 2x + y + 2 = 0.$
16. $x^2 + 2y^2 - 12y + 10 = 0, x + y - 3 = 0.$
17. $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0, 2x + y - 6 = 0.$
18. $y^2 + x + 4y + 3 = 0, x + 2y + 2 = 0.$
19. $x^2 + 2y^2 + 8y + 4 = 0, 5y + 4 = 0.$
20. $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0, 3x + y - 3 = 0.$

Задача 2. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти: 1) длину ребра A_1A_2 ; 2) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4 ; 3) угол между гранями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; 4) уравнение прямой проходящей через вершины A_4 и центр тяжести грани $A_1A_2A_3$; 5) длину и уравнение высоты из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 6) расстояние между скрещивающимися ребрами A_1A_2 и A_3A_4 .

1. $A_1(1; 3; 6), A_2(2; 2; 1), A_3(-1; 0; 0), A_4(-4; 6; -3)$
2. $A_1(-4; 2; 6), A_2(2; -3; 0), A_3(-10; 5; 8), A_4(-5; 2; -4)$
3. $A_1(7; 2; 4), A_2(7; -1; -2), A_3(3; 3; 1), A_4(-4; 2; 1)$
4. $A_1(2; 1; 4), A_2(-1; 5; -2), A_3(-7; -3; 2), A_4(-6; -3; 6)$
5. $A_1(-1; -5; 2), A_2(-6; 0; -3), A_3(3; 6; -3), A_4(-10; -6; 7)$
6. $A_1(0; -1; -1), A_2(-2; 3; 5), A_3(1; -5; -9), A_4(-1; -6; 3)$
7. $A_1(5; 2; 0), A_2(2; 5; 0), A_3(1; 2; 4), A_4(-1; 1; 1)$
8. $A_1(2; -1; -2), A_2(1; 2; 1), A_3(5; 0; -6), A_4(-10; 9; -7)$
9. $A_1(-2; 0; -4), A_2(-1; 7; 1), A_3(4; -8; -4), A_4(1; -4; 6)$
10. $A_1(14; 4; 5), A_2(-5; -3; 2), A_3(-2; -6; -3), A_4(-2; 2; 1)$
11. $A_1(1; 2; 0), A_2(3; 0; -3), A_3(5; 2; 6), A_4(8; 4; -9)$
12. $A_1(2; -1; 2), A_2(1; -2; -1), A_3(3; 2; 1), A_4(-4; 2; 5)$

13. $A_1(1; 1; 2), A_2(-1; 1; 3), A_3(2; -2; 4), A_4(-1; 0; -2)$
14. $A_1(2; 3; 1), A_2(4; 1; -2), A_3(6; 3; 7), A_4(7; 5; -3)$
15. $A_1(1; 1; -1), A_2(2; 3; 1), A_3(3; 2; 1), A_4(5; 9; -8)$
16. $A_1(1; 5; -7), A_2(-3; 6; 3), A_3(-2; 7; 3), A_4(-4; 8; -12)$
17. $A_1(-3; 4; -7), A_2(1; 5; -4), A_3(-5; -2; 0), A_4(2; 5; 4)$
18. $A_1(-1; 2; -3), A_2(4; -1; 0), A_3(2; 1; -2), A_4(3; 4; 5)$
19. $A_1(4; -1; 3), A_2(-2; 1; 0), A_3(0; -5; 1), A_4(3; 2; -6)$
20. $A_1(1; -1; 1), A_2(-2; 0; 3), A_3(2; 1; -1), A_4(2; -2; -4)$

Задача 3. Написать канонические и параметрические уравнения заданной прямой, а также уравнение плоскости в «отрезках», перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Построить плоскость.

1. $L: \begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0; \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases} M_0(0; 2; -3).$ 2. $L: \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0; \\ x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases} M_0(4; -1; 2).$
3. $L: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0; \\ 2x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases} M_0(1; -4; -2).$ 4. $L: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0; \\ x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases} M_0(-2; 3; 5).$
5. $L: \begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0; \\ x + 3y + z + 6 = 0. \end{cases} M_0(10; -9; 5).$ 6. $L: \begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0; \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases} M_0(-7; 6; 2).$
7. $L: \begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0; \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases} M_0(5; -10; 2).$ 8. $L: \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0; \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases} M_0(9; -2; 1).$
9. $L: \begin{cases} 5x + y - 3z + 2 = 0; \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases} M_0(8; -4; 3).$ 10. $L: \begin{cases} x - y - z - 2 = 0; \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases} M_0(-1; 2; 5).$
11. $L: \begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0; \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases} M_0(-2; 10; 7).$ 12. $L: \begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0; \\ 2x - 3y + z + 6 = 0. \end{cases} M_0(0; -2; 4).$
13. $L: \begin{cases} 6x - 7y - 4z - 2 = 0; \\ x + 7y - z - 5 = 0. \end{cases} M_0(5; 9; -1).$ 14. $L: \begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0; \\ x + y + z + 10 = 0. \end{cases} M_0(6; 11; -2).$
15. $L: \begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0; \\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0. \end{cases} M_0(7; 2; -5).$ 16. $L: \begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0; \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0. \end{cases} M_0(4; -3; 8).$
17. $L: \begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0; \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases} M_0(1; -3; 5).$ 18. $L: \begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0; \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases} M_0(-1; 0; 5).$
19. $L: \begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0; \\ 2x - y - 3z - 8 = 0. \end{cases} M_0(8; -5; 1).$ 20. $L: \begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0; \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases} M_0(2; -6; 7).$

Задача 4. Найти точку пересечения прямой и плоскости, а также угол между ними.

1. $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $2x+y+7z-3=0$.
2. $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}$, $5x+7y+9z-32=0$.
3. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}$, $3x-7y-2z+7=0$.
4. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$, $x-2y+4z-19=0$.
5. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$, $x+7y+3z+11=0$.
6. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$, $5x+9y+4z-25=0$.
7. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$, $x+4y+13z-23=0$.
8. $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$, $3x-2y+5z-3=0$.
9. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$, $4x+y-6z-5=0$.
10. $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$, $3x+7y-5z-11=0$.
11. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}$, $3x-y+4z=0$.
12. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$, $x-2y-3z-18=0$.
13. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$, $x+2y-z-2=0$.
14. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$, $x+3y+5z-42=0$.
15. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$, $2x-y+4z=0$.
16. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}$, $7x+y+4z-47=0$.
17. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $x+3y-5z+9=0$.
18. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$, $2x-3y-5z-7=0$.
19. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$, $x+2y-5z+16=0$.
20. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$, $2x-y+3z+23=0$.

Контрольная 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Задача 1. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-x-x^2}{\sqrt{x^4+5x-1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{4x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{2\operatorname{tg} x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$.

2. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+3}}$; в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 4x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{2x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$.

3. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x} \right)^{2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.

4. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)\sqrt{6+x}}{x^2-4}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x^4+3}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin^2 x}{\ln \sin x}$.

5. а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{4x^2-64}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-x^3}{2x^3+x^2-10}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

6. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{3x^2}$;

г) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{h}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+3) - \ln x)$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

7. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-9}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{2x^3+3x^5}$; в) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

8. а) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x-3}{3x^2+5x-2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{\sqrt{x^6-1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$.

9. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x-1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec x - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{2x+1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.
10. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x+5}{x}}$; в) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x} \right)^{5x+1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$.
11. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x\sqrt{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$.
12. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{1 - 5x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 6x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$.
13. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\arcsin 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-8}{x} \right)^{\frac{x}{2}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$.
14. a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \frac{1}{3}x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{9-x^3}}{x-1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln x - \ln(x+2))$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.
15. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - x^2}{1 - x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{2x^3 + 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.
16. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x(x-2)} - \sqrt{x^2 - 3})$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}$.
17. a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x + 8}{x^2 + x - 12}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 1}{x^6 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2 - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$.
18. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{5}{x}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

19. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 6}{3x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$;
 з) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

20. а) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x+10}{x^2+2x-15}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$;
 з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Задача 2. Найти производные функций.

1. а) $y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$; б) $y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$; в) $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$;
 з) $y = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 3x}{3 \cos 6x}$; д) $y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}$; е) $x = \ln \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $y = \arcsin \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

2. а) $y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{x^2}$; б) $y = \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \sin 2x - \cos 2x)$; в) $y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$;
 з) $y = \cos \ln 2 - \frac{1 \cos^2 3x}{3 \sin 6x}$; д) $y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+3}{\sqrt{17}}$; е) $x = \sqrt{1-t^2}$, $y = \operatorname{tg} \sqrt{1+t}$.

3. а) $y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$; б) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$; в) $y = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}$;
 з) $y = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x})$; д) $y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)}$; е) $x = \sqrt{2t-t^2}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$.

4. а) $y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$; б) $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$;
 з) $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x}$; д) $y = \frac{4x+1}{16x^2 + 8x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x+3}{\sqrt{2}}$; е) $x = \ln \operatorname{ctg} t$, $y = \frac{1}{\cos^2 t}$.

5. а) $y = \frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$; б) $y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}$; в) $y = \frac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}$;
 з) $y = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$; д) $y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}$; е) $x = \operatorname{arctg} \frac{t+1}{t-1}$, $y = \arcsin \sqrt{1-t^2}$.

6. а) $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; б) $y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$;
 з) $y = \arcsin \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$; д) $y = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; е) $x = \operatorname{ctg} 2e^t$, $y = \ln \operatorname{tge}^t$.

7. а) $y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$; б) $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$; в) $y = \cos \operatorname{ctg} 2 - \frac{1 \cos^2 8x}{16 \sin 16x}$;
 з) $y = 2 \arcsin \frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12}$; д) $y = x^{e^{\cos x}}$; е) $x = \ln \operatorname{tg} t$, $y = \frac{1}{\sin^2 t}$.

8. a) $y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 8}}{6x^3}$; б) $y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right)$; в) $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} + a^{\pi\sqrt{2}}$;
 з) $y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$; д) $y = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$; е) $x = \arcsin(\sin t)$, $y = \arccos(\cos t)$.
9. a) $y = \frac{4+x^3}{x^3(2+x^3)^2}$; б) $y = \frac{2(\sqrt{2^x-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x-1})}{\ln 2}$; в) $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$;
 з) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$; д) $y = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$; е) $x = 2 \ln \operatorname{ctgt} + 1$, $y = \operatorname{tgt} + \operatorname{ctgt}$.
10. a) $y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$; б) $y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}$; в) $y = \operatorname{ctg} \cos 2 + \frac{1}{6} \frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$;
 з) $y = \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2})$; д) $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$; е) $x = \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, $y = \sqrt{1-t^2}$.
11. a) $y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x + e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1+e^x + e^{2x}} - e^x + 1}$; в) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$;
 з) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} x/2}$; д) $y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1}) + \arcsin e^{-5x}$; е) $x = (\arcsin t)^2$, $y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$.
12. a) $y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$; б) $y = \frac{e^{\alpha x} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}$; в) $y = \ln \sin \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$;
 з) $y = (\cos 2x)^{\ln \cos^2 x/4}$; д) $y = \ln^3(1 + \cos x)$; е) $x = \operatorname{arctgt}$, $y = \ln \frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}$.
13. a) $y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y = e^{\alpha x} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right]$; в) $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$;
 з) $y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$; д) $y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}$; е) $x = \arcsin \sqrt{1-t^2}$, $y = (\arccos t)^2$.
14. a) $y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$; б) $y = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$; в) $y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - x$;
 з) $y = \frac{\cos \operatorname{ctg} 3 \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}$; д) $y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x$; е) $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}$, $y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}$.
15. a) $y = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}$; б) $y = x - 3 \ln \left[(1 + e^{x/6}) \sqrt{1 + e^{x/3}} \right]$; в) $y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{\arccos x}{2x^2}$;
 з) $y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$; д) $y = \frac{6^x (\sin 4x \ln 6 - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 6}$; е) $x = (1 + \cos^2 t)^2$, $y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}$.
16. a) $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$; б) $y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}$; в) $y = 6 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2} \sqrt{x(4-x)}$;
 з) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \cos x - 3 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; д) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} x/4}$; е) $x = \cos t + \sin t$, $y = \sin 2t$.
17. a) $y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$; б) $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x}$; в) $y = (\sin x)^{5x/2}$;

$$z) y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}; \quad \partial) y = \frac{\operatorname{ctg} \sin(1/3) \cdot \sin^2 17x}{17 \cos 34x}; \quad e) x = 2 \operatorname{tg} t, \quad y = 2 \sin^2 t + \sin 2t.$$

18. $a) y = (1-x) \sqrt{x^3 + \frac{1}{x}}; \quad \bar{o}) y = -\frac{1}{2} e^{-x^2(x^4+2x^2+2)}; \quad \epsilon) y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{4x}};$
 $z) y = (x^2+1)^{\cos x}; \quad \partial) y = \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}; \quad e) x = \ln(1+t^2), \quad y = t - \operatorname{arctg} t.$

19. $a) y = 3 \frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}; \quad \bar{o}) y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right); \quad \epsilon) y = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}};$
 $z) y = \frac{\operatorname{tg} \ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}; \quad \partial) y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}; \quad e) x = \arcsin \sqrt{t}, \quad y = \sqrt{1+\sqrt{t}}.$

20. $a) y = \frac{(x-1)}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}; \quad \bar{o}) y = \frac{x^4}{81} \arcsin \frac{3}{x} + \frac{1}{81} (x^2+18)\sqrt{x^2-9}; \quad \epsilon) y = \ln \ln \sin(1 + \frac{1}{x});$
 $z) y = \arccos \frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}; \quad \partial) y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}); \quad e) x = 2(t - \sin t), \quad y = 4(2 + \cos t).$

Задача 3. Провести полное исследование функций методами дифференциального исчисления и построить их графики.

1. $a) y = \frac{x^3+4}{x^2}; \quad \bar{o}) y = (2x+3)e^{-2(x+1)}.$ 2. $a) y = \frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}; \quad \bar{o}) y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$

3. $a) y = \frac{x^3-4x}{3x^2-4}; \quad \bar{o}) y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1.$ 2. $a) y = \frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}; \quad \bar{o}) y = (3-x)e^{x-2}.$

5. $a) y = \frac{2x^2-6}{x-2}; \quad \bar{o}) y = e^{\sqrt{2} \sin x}.$ 6. $a) y = \frac{x^2}{(x-1)^2}; \quad \bar{o}) y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}.$

7. $a) y = \frac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}; \quad \bar{o}) y = (x-2)e^{3-x}.$ 8. $a) y = \frac{2x^3+1}{x^2}; \quad \bar{o}) y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3.$

9. $a) y = \frac{4x^3-3x}{4x^2-1}; \quad \bar{o}) y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$ 10. $a) y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}; \quad \bar{o}) y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}.$

11. $a) y = \frac{21-x^2}{7x+9}; \quad \bar{o}) y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$ 12. $a) y = \frac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}; \quad \bar{o}) y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}.$

13. $a) y = \frac{x^3-4}{x^2}; \quad \bar{o}) y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}.$ 14. $a) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2; \quad \bar{o}) y = \ln(-\sin x - \cos x).$

15. $a) y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}; \quad \bar{o}) y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}.$ 16. $a) y = \frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}}; \quad \bar{o}) y = (4-x)e^{x-3}.$

17. $a) y = \frac{2x^2-4}{\sqrt{x^2-2}}; \quad \bar{o}) y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$ 18. $a) y = \left(\frac{3x^2-10}{3-2x}\right)^2; \quad \bar{o}) y = \ln(-\sqrt{2} \sin x)$

19. $a) y = \frac{4x}{(x+1)^2}; \quad \bar{o}) y = e^{\sin x + \cos x}.$ 20. $a) y = \frac{-x^2-4x+13}{4x+3}; \quad \bar{o}) y = \operatorname{arctg} \sin x.$

Контрольная работа 4. Неопределенный и определенный интегралы

Задача 1. Найти неопределенный интеграл.

$$1. a) \int \left(e^{-2x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx; \quad б) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx; \quad в) \int \left(7^{2x+1} - x^2 - \frac{3}{x} \right) dx;$$

$$г) \int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx; \quad д) \int \frac{xdx}{x^2 + 3x + 2}; \quad е) \int \frac{x+5}{\sqrt{2-x-x^2}} dx.$$

$$2. a) \int \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} dx; \quad б) \int \left(e^{3-x} + \frac{1}{5+2x^2} \right) dx; \quad в) \int \frac{\cos x}{2 \sin x + 3} dx;$$

$$г) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}; \quad д) \int \frac{dx}{x^2 - 6x - 16}; \quad е) \int \frac{4x-3}{\sqrt{3x^2+x+1}} dx.$$

$$3. a) \int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} dx; \quad б) \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^{-2} + 1}}; \quad в) \int \left(x^{3/7} + \frac{x}{\sqrt{5+2x^2}} \right) dx;$$

$$г) \int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}; \quad д) \int \frac{(5x+3)dx}{29+10x+x^2}; \quad е) \int \frac{5x-3}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx.$$

$$4. a) \int \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} + \sqrt{x} \right) dx; \quad б) \int \frac{dx}{3+(\sqrt{3x})^2}; \quad в) \int \left(e^{3x+1} + \frac{5}{5+x^2} \right) dx;$$

$$г) \int \frac{xdx}{\sqrt{9+16x^2}}; \quad д) \int \frac{(x+1)dx}{8x^2+2x-1}; \quad е) \int \frac{x+4}{\sqrt{2x^2+2x+1}} dx.$$

$$5. a) \int \frac{x^2+4}{x^2-4} dx; \quad б) \int \left(e^{x+1} + \frac{3}{3+x^2} \right) dx; \quad в) \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx;$$

$$г) \int \frac{xdx}{(3x^2-1)^3 \sqrt{3x^2-1}}; \quad д) \int \frac{(x+1)dx}{x^2-8x+15}; \quad е) \int \frac{3x-1}{\sqrt{1-x-2x^2}} dx.$$

$$6. a) \int \frac{x^{3/2} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 4} dx; \quad б) \int \left(2^{1-x} + \frac{3}{3+x^2} \right) dx; \quad в) \int (2 \sin^2 2x - 1) dx;$$

$$г) \int \frac{e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad д) \int \frac{(x+4)dx}{x^2+x-4}; \quad е) \int \frac{4x-3}{\sqrt{2+2x-3x^2}} dx.$$

$$7. a) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}; \quad б) \int \left(5e^{3x/2} + 4x^3 \sqrt{x^2+1} \right) dx; \quad в) \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^2 x};$$

$$г) \int \frac{dx}{\cos^{-2} x - 1}; \quad д) \int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}; \quad е) \int \frac{3x-3}{\sqrt{5x^2+3x+2}} dx.$$

$$8. a) \int \frac{dx}{x(x+2)}; \quad б) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^{-2}+1}}; \quad в) \int \frac{\sin 2x dx}{\operatorname{tg} x};$$

$$г) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}; \quad д) \int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}; \quad е) \int \frac{2x-1}{\sqrt{5+12x-9x^2}} dx.$$

$$9. a) \int \frac{x^2 - 5x + 1}{\sqrt{x}} dx; \quad б) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5}}; \quad в) \int \left(5^{2x} + \frac{2}{5x} \right) dx;$$

$$г) \int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}; \quad д) \int \frac{(x+5)dx}{x^2-4x-5}; \quad е) \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x+x^2}}.$$

10. a) $\int \left(3^{3x} - \frac{5}{x^2 - 4} \right) dx$; б) $\int \frac{(x^3 + 5)dx}{x^2 + 2}$; в) $\int \frac{\cos x dx}{2 \sin x + 3}$;
 з) $\int \frac{e^x \sqrt{\arctg e^x}}{1 + e^{2x}} dx$; д) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$; е) $\int \frac{(3x + 2)dx}{\sqrt{1 - 3x - 4x^2}}$.

11. a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 5}} \right) dx$; б) $\int \left(e^{3+x} + \frac{1}{2 + 2x^2} \right) dx$; в) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} 4x}$;
 з) $\int x^3 (1 - 2x^4)^3 dx$; д) $\int \frac{(3x - 1)dx}{x^2 + x - 6}$; е) $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{3 - 5x + 2x^2}}$.

12. a) $\int \left(\frac{3x^2}{x^2 + 16} + e^{2x} \right) dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^{-2} x - 1}$; в) $\int \left(2^{-\frac{1}{3}} + x\sqrt{x} \right) dx$;
 з) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$; д) $\int \frac{(2x - 2)dx}{3x^2 - 3x + 2}$; е) $\int \frac{(x + 3)dx}{\sqrt{1 - x + x^2}}$.

13. a) $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 4x}{x^2 + 3} dx$; б) $\int \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right) dx$; в) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} dx$;
 з) $\int \frac{(\arccos x - x)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; д) $\int \frac{(x + 5)dx}{2x^2 + 2x + 1}$; е) $\int \frac{(3x - 4)dx}{\sqrt{21 + 12x - 9x^2}}$.

14. a) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$; б) $\int \left(2^{x+1} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx$; в) $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$;
 з) $\int \frac{e^x dx}{(7 - e^x)^2}$; д) $\int \frac{(2x - 1)dx}{2x^2 + x + 2}$; е) $\int \frac{(4x + 3)dx}{\sqrt{1 - x - 3x^2}}$.

15. a) $\int (2x^{-1} + 3x^{-2} + 4x^{-3}) dx$; б) $\int \left(\frac{1}{4 + x^2} + \frac{1}{4 - x^2} \right) dx$; в) $\int \frac{\cos x + 1}{\sin x} dx$;
 з) $\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x} \cdot \sin 2x dx$; д) $\int \frac{(x - 1)dx}{4x^2 - 3x - 1}$; е) $\int \frac{(x - 1)dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}$.

16. a) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$; б) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$; в) $\int \left(x^{-\frac{3}{4}} + (4x^2 - 8)^{-\frac{1}{2}} \right) dx$;
 з) $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}} dx$; д) $\int \frac{(x + 1)dx}{5x^2 + 2x + 1}$; е) $\int \frac{(2x + 1)dx}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}}$.

17. a) $\int \frac{x^2}{3x^2 - 1} dx$; б) $\int \frac{(4^{-x} + x^2)4^x}{x^2} dx$; в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2 - 3x^3}} dx$;
 з) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4}} dx$; д) $\int \frac{(3x + 1)dx}{4x^2 - 2x + 1}$; е) $\int \frac{(2x + 3)dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}$.

18. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$; б) $\int e^{x+1} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$;
 з) $\int \frac{\cos 2x dx}{(2 + 3\sin 2x)^3}$; д) $\int \frac{(3x - 1)dx}{4x^2 + 3x + 2}$; е) $\int \frac{(3x + 1)dx}{\sqrt{1 - x - 3x^2}}$.

19. a) $\int \frac{(x^2 + 4x + 7)dx}{x^2 + 16}$; б) $\int \left(3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$; в) $\int e^{2x} \operatorname{tg}(e^{2x} - 1) dx$;

$$z) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx; \quad \partial) \int \frac{(4x+8)dx}{3x^2+2x+5}; \quad e) \int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+3x+2}}.$$

$$20. a) \int \frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx; \quad \partial) \int e^x \left(1 + \frac{e^x}{x^2-1}\right) dx; \quad e) \int \frac{dx}{1+\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$z) \int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}} dx; \quad \partial) \int \frac{(2x+2)dx}{3x^2-2x+1}; \quad e) \int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}}.$$

Задача 2. Найти неопределенный интеграл используя формулу интегрирования по частям.

$$1. a) \int x^2 e^{-3x} dx; \quad \partial) \int x \ln(x-1) dx; \quad e) \int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx; \quad z) \int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx.$$

$$2. a) \int e^{-3x} \sin 3x dx; \quad \partial) \int \arcsin \frac{x}{5} dx; \quad e) \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+4x}; \quad z) \int \frac{1}{x(x^2+2)} dx.$$

$$3. a) \int x^2 \cdot 5^x dx; \quad \partial) \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx; \quad e) \int \frac{dx}{2+\cos 4x}; \quad z) \int \frac{7x+13}{(x^2+2x+3)(x+3)} dx.$$

$$4. a) \int x^2 \cos 2x dx; \quad \partial) \int x^3 \ln \frac{x}{2} dx; \quad e) \int \frac{\cos^3 3x}{\sin 3x} dx; \quad z) \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$$

$$5. a) \int 2^x \sin 2x dx; \quad \partial) \int \operatorname{arctg} 2x dx; \quad e) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1+x)^3}} dx; \quad z) \int \frac{3x^2+2x-1}{x(x-1)^2} dx.$$

$$6. a) \int (x^2+1)e^{-2x} dx; \quad \partial) \int \arcsin 5x dx; \quad e) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{3(1+x^2)^5}} dx; \quad z) \int \frac{6x-4}{x^3-4x} dx.$$

$$7. a) \int x^2 3^x dx; \quad \partial) \int x \sin^2 3x dx; \quad e) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{3(1+x^2)^5}} dx; \quad z) \int \frac{dx}{x(x^2+4)}.$$

$$8. a) \int e^{x/2} \cos 5x dx; \quad \partial) \int \arcsin \frac{x}{2} dx; \quad e) \int \sqrt{\frac{3+x}{2-x}} dx; \quad z) \int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}.$$

$$9. a) \int \frac{\ln x}{x^6} dx; \quad \partial) \int \frac{xdx}{\cos^2 7x}; \quad e) \int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}; \quad z) \int \frac{(x^3+3)dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

$$10. a) \int e^{2x} \cos 3x dx; \quad \partial) \int x \sin^2 5x dx; \quad e) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9x^2-1}}; \quad z) \int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}.$$

$$11. a) \int (2+\ln x)^2 dx; \quad \partial) \int \frac{xdx}{\sin^2 6x}; \quad e) \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}; \quad z) \int \frac{(x^3+x+1)dx}{x(x^2+1)}.$$

$$12. a) \int x \sin 3x dx; \quad \partial) \int \frac{\ln x dx}{(x+1)^2}; \quad e) \int \frac{(x^2+2)dx}{\sqrt{x^2+1}}; \quad z) \int \frac{(x^3-2x)dx}{(x^2-1)^2}.$$

$$13. a) \int e^x \cos 8x dx; \quad \partial) \int \frac{\arcsin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}; \quad e) \int \frac{dx}{2+2\sin x+2\cos x}; \quad z) \int \frac{(x^3+1)dx}{x(x-1)^3}.$$

$$14. a) \int \operatorname{arctg} 3x dx; \quad \partial) \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}; \quad e) \int \frac{\sqrt{x-1} dx}{x}; \quad z) \int \frac{xdx}{2x^2+3x+2}.$$

15. а) $\int x^2 \cdot 6^x dx$; б) $\int \frac{x \arctg x dx}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{3+\cos 4x}$; г) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x+3)(x-1)^3}$.

16. а) $\int e^{-3x} \cos x dx$; б) $\int e^x \cdot \ln(2e^x - 1) dx$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+x^4}}$; г) $\int \frac{(x+1)dx}{5x^2+2x+1}$.

17. а) $\int x \sin 5x dx$; б) $\int \frac{\ln(\tg x)}{\cos^2 x} dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^4+2x^2} dx$; г) $\int \frac{(5x^2-x)dx}{2(x-1)(x+1)}$.

18. а) $\int e^{-x} \sin 3x dx$; б) $\int \arctg \frac{x}{5} dx$; в) $\int \frac{dx}{1+\sin 4x}$; г) $\int \frac{(6x^2-13x+4)dx}{x^3-3x^2+2x}$.

19. а) $\int x^2 \cdot 4^x dx$; б) $\int \frac{x dx}{\sin^2 4x}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(x+2)}$; г) $\int \frac{(x^2+4x+4)dx}{x(x-1)}$.

20. а) $\int e^{-x} \cos 2x dx$; б) $\int (1-\ln x)^2 dx$; в) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; г) $\int \frac{(7x-3)dx}{2(x+1)(x-1)}$.

Задача 3. Нарисовать область, ограниченную данными линиями, и вычислить её площадь.

1. а) $y = 4 - x^2$, $y = 0,5x + 1$; б) $r = 3 + \sin 2\varphi$. 2. а) $y^2 = x + 2$, $y = x$; б) $r^2 = 4 \cos 2\varphi$.

3. а) $xy = 4$, $y = 4$, $x = 2$; б) $r = 1 + \sin^2 2\varphi$, $r = 1,4$. а) $y^2 = 2x + 4$, $y = x + 2$; б) $r = 2 \sin 3\varphi$.

5. а) $y = x^2 + 2x$, $y = x$; б) $r = 2 \sin \varphi - 1$, $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$. 6. а) $y^2 = x$, $y^2 = x^3$; б) $r = \cos^2 \varphi$.

7. а) $y^2 = 2x + 1$, $x - y = 1$; б) $r = 3 \sin 2\varphi$. 8. а) $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$; б) $r = 2(2 + \cos \varphi)$.

9. а) $y = 4x^2$, $y = \frac{x^2}{9}$; $y = 2$; б) $r = \frac{2}{\varphi}$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi$. 10. а) $y^2 = x$, $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$; б) $r = 2 \cos^3 \varphi$.

11. а) $y = x^2 + 1$, $y = \sqrt{x} + 1$; б) $r = 2 \cos^4 \varphi$. 12. а) $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$; б) $r = 1 - \cos 3\varphi$.

13. а) $y = -x^2 + 3x + 3$, $y = x$; б) $r^2 = 4 \sin 4\varphi$. 14. а) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$; б) $r = 2 - \cos 3\varphi$.

15. а) $y = x^2 + 2$, $y = \frac{x^3}{3}$; б) $r = 2 \sin 5\varphi$. 16. а) $y = \frac{27}{x^2 + 9}$, $y = \frac{x^2}{6}$; б) $r = 3 \cos 3\varphi$.

17. а) $y^2 + x^2 = 8$, $y = \frac{x^2}{2}$; б) $r = 2 \cos 5\varphi$. 18. а) $y = 12 + 2x - 3x^2$, $y = -7x$; б) $r = 2 \cos \frac{\varphi}{2}$.

19. а) $y = 3 + 2x - x^2$, $y = 4x$; б) $r = \cos^5 \frac{\varphi}{5}$. 20. а) $y^2 = x^3$, $y = x$; б) $r = \sin \varphi + \cos \varphi$.

Задача 4. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигуры, (вокруг осей Ox , Oy), ограниченной заданными линиями.

1. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = \pm 2$. 2. $y = \ln(x+2)$, $y = 2 \ln x$, $y = 0$, $x = 0$.

3. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. 4. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$, $y = 0$.

5. $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$, $y = 0$, $x = 0$. 6. $y = \frac{x}{4-x}$, $x = 2$, $y = 0$.

7. $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$. 8. $y = \ln(x+3)$, $y = 2 \ln x$, $y = 0$, $x = 0$.

9. $3x = 2y - y^2$, $x = 0$, $y = 3x$.

10. $(y-1)^2 = x$, $x = 0$, $y = 2$.

11. $y = e^{-x} - 1$, $y = 1$, $x = 0$.

12. $y = x^2 - 2x + 2$, $x = 2$, $y = 0$.

13. $y = 2\left(\frac{x}{3}\right)^{2/3}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$.

14. $2x = 3y - y^2$, $y = 2x$, $x = 0$.

15. $y = \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

16. $y = x^2 - 3x$, $y = 2x$, $y \geq 0$.

17. $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$.

18. $y = x^2 + 4x + 5$, $y = 0$, $-2 \leq x \leq 0$.

19. $y = 2x^2$, $y = 2|x|$.

20. $y = x^2$, $2x + y - 3 = 0$, $x \geq 0$.

Задача 5. Нарисовать дугу кривой и вычислить её длину.

1. а) $y = \frac{x^2 - 2}{3}$, $0 \leq x \leq 2$; б) $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$, $0 \leq x \leq 2$; в) $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

2. а) $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$; б) $x = t^2$, $y = t^3 + 1$, $0 \leq t \leq 1$; в) $r = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

3. а) $y^2 = x^3$, $x \leq \frac{4}{3}$; б) $x = t^2$, $y = \frac{3}{t^2 - 3}$, $2 \leq t \leq 3$; в) $r = 2 \sin^4 \frac{\varphi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

4. а) $y = \ln x$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$; б) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; в) $r = \cos^4 \frac{\varphi}{4}$.

5. а) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 2$; б) $x = t^3 + 1$, $y = t^2 - 1$, $y \leq 0$; в) $r = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

6. а) $y = \ln(2 \cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$; б) $x = 1 - e^t$, $y = 1 + e^t$, $0 \leq t \leq 1$; в) $r = 1 + \cos \varphi$.

7. а) $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$; б) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; в) $r = 3\varphi^2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

8. а) $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, $0 \leq x \leq 2$; б) $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$; в) $r = \sin \varphi + \cos \varphi$.

9. а) $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$; б) $x = t - 2$, $y = t^2 - 2t$, $y \leq 0$; в) $r = 5\varphi^2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

10. а) $9y^2 = x(x-3)^2$, $x \leq 3$; б) $x = \frac{t^2}{2} - 1$, $y = \frac{t^2}{2}$, $0 \leq t \leq 1$; в) $r = \sqrt{2} \cdot e^\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

11. а) $y = \ln \frac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$; б) $x = t - 1$, $y = t^2 - 1$, $-1 \leq t \leq 1$; в) $r = \sqrt{2} \cdot e^\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

12. а) $y^2 = 16x$, $0 \leq x \leq 8$; б) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; в) $\varphi = \sqrt{r}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

13. а) $y = 4 - x^2$, $y \geq 0$; б) $x = 3(t^2 - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $\pi \leq t \leq 2\pi$; в) $r = 2 \cos^4 \frac{\pi}{4}$.

14. а) $y^3 = x^2$, $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$; б) $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; в) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

15. а) $y = -\ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$; б) $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 1 - \frac{t^2}{4}$, $y \geq 0$; в) $r = 3 \sin^4 \frac{\varphi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

16. а) $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$, $0 \leq x \leq \frac{5}{3}$; б) $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 1$, $0 \leq t \leq \sqrt{3}$; в) $r = \sin \varphi - \cos \varphi$.

17. а) $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$; б) $x = 2t^2 + t$, $y = t - 1$, $0 \leq t \leq 1$; в) $r = 2 + 2 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

18. a) $y = \ln \frac{1}{x}$, $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{4}{3}$; б) $x = t^2$, $y = \frac{t^3}{3}$, $-1 \leq t \leq 1$; в) $r = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

19. a) $y = 2 - e^x$, $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$; б) $x = t^2$, $y = \frac{t(t^2 - 3)}{3}$; в) $r = 3(1 + \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

20. a) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leq y \leq e$; б) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \leq t \leq 1$; в) $r = 3\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$.

Литература

Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Г.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа. Ч. 1 – 2003. – 304 с.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Г.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа. Ч. 2 – 2003. – 416 с.