

Контрольная работа №3

Задача 3.1

Задача посвящена анализу переходного процесса в цепи первого порядка, содержащей резисторы, конденсатор или индуктивность. В момент времени $t = 0$ происходит переключение ключа K , в результате чего в цепи возникает переходной процесс.

1. Перерисуйте схему цепи (см. рис. 3.1) для Вашего варианта (таблица 1).
2. Выпишите числовые данные для Вашего варианта (таблица 2).
3. Рассчитайте все токи и напряжение на C или L в три момента времени $t: 0_-, 0_+, \infty$.
4. Рассчитайте классическим методом переходный процесс в виде $u_C(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ в схемах 1 – 5, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_L(t)$ в схемах 6 – 10. Проверьте правильность расчетов, выполненных в п. 4, путем сопоставления их с результатами расчетов в п. 3.

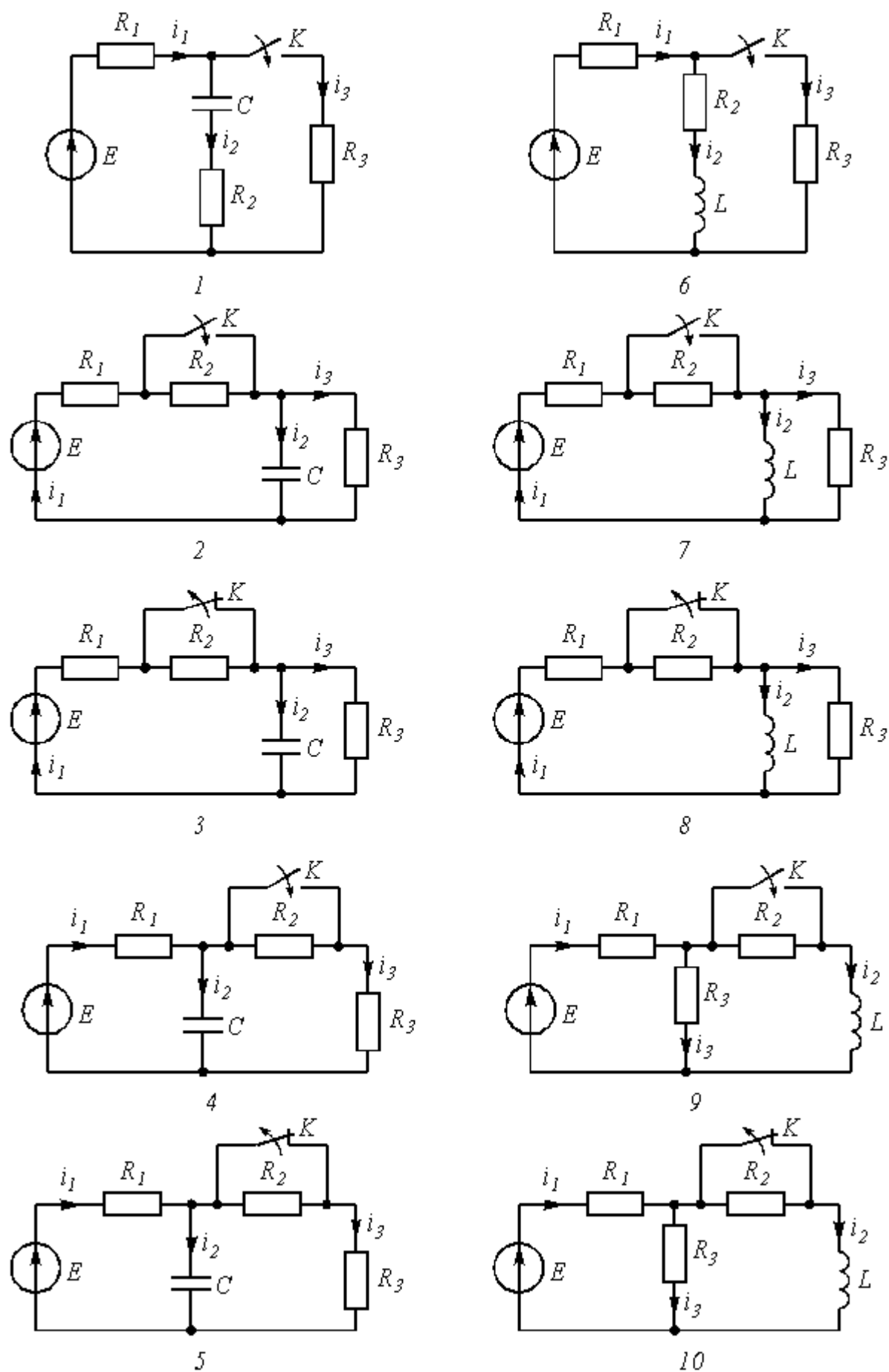


Рис. 3.1

5. Постройте графики переходных токов и напряжения, рассчитанных в п. 4. Определите длительность переходного процесса, соответствующую переходу цепи в установившееся состояние с погрешностью 5%.

6. Рассчитайте ток i_2 операторным методом.

Таблица 1

Варианты										Номер схемы или задания
00	10	20	30	40	50	60	70	80	90	1
01	11	21	31	41	51	61	71	81	91	2
02	12	22	32	42	52	62	72	82	92	3
03	13	23	33	43	53	63	73	83	93	4
04	14	24	34	44	54	64	74	84	94	5
05	15	25	35	45	55	65	75	85	95	6
06	16	26	36	46	56	66	76	86	96	7
07	17	27	37	47	57	67	77	87	97	8
08	18	28	38	48	58	68	78	88	98	9
09	19	29	39	49	59	69	79	89	99	10

Таблица 2

Варианты	C, нФ или L, мГн	R_1 , кОм	R_2 , кОм	R_3 , кОм	E, В
От 00 до 09	20	2	2	2	10
От 10 до 19	10	1	1	1	5
От 20 до 29	10	1	2	2	12
От 30 до 39	15	1	1	2	12
От 40 до 49	15	2	2	1	10
От 50 до 59	15	1	2	1	10
От 60 до 69	20	2	1	2	12
От 70 до 79	20	2	1	1	12
От 80 до 89	15	1	0,5	0,5	5
От 90 до 99	10	0,5	1	1	5

Типовая задача Т3.1

Цепь (рис. 3.2 а) содержит резисторы $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1,5$ кОм, $R_3 = 0,5$ кОм, $R_4 = 2,5$ кОм, индуктивность $L = 6,3$ мГн и источник постоянного напряжения $E = 9$ В. В момент $t = 0$ происходит размыкание ключа K и в цепи возникает переходной процесс. Требуется: рассчитать основные характеристики процесса; получить выражения для токов $i_2(t)$, $i_3(t)$ и напряжения $u_L(t)$ классическим методом; построить графики указанных токов и напряжений; рассчитать ток $i_2(t)$ операторным методом.

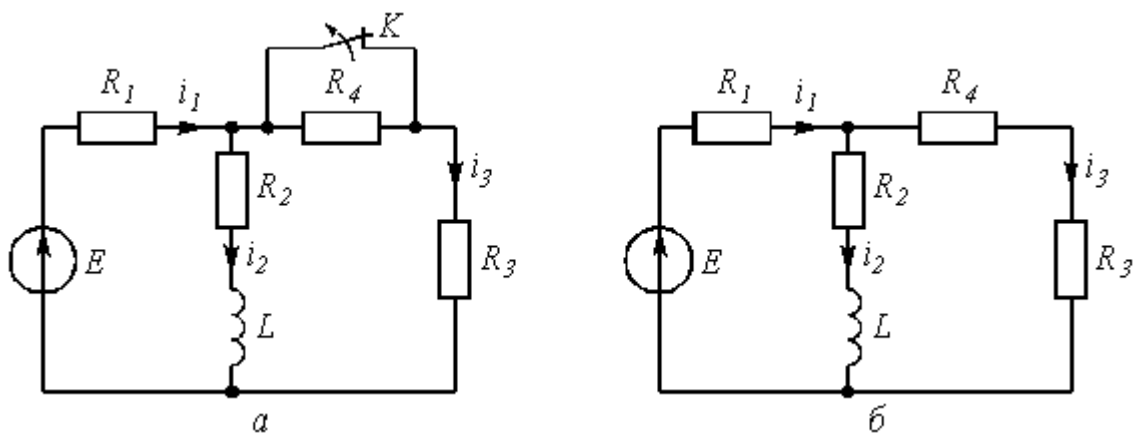


Рис 3.2

Решение

1. Находим токи i_1 , i_2 , i_3 и напряжение u_L в три момента времени $t = 0_-$, 0_+ и ∞ .

1.1. Момент $t = 0_-$. Он соответствует стационарному состоянию цепи до коммутации. В этом состоянии резистор R_4 закорочен ключом K и не влияет на работу цепи. Сама схема (рис. 3.2 а) представляет собой цепь, в которой $u_L(0_-) = 0$, поэтому она может быть рассчитана по следующим формулам:

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{9}{\left(1 + \frac{1,5 \cdot 0,5}{1,5 + 0,5}\right) 10^3} = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 6,5 \text{ mA};$$

$$i_2(0_-) = i_1(0_-) \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10^3}{(1,5 + 0,5) 10^3} = 1,6 \text{ mA};$$

$$i_3(0_-) = i_1(0_-) \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{6,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^3}{(1,5 + 0,5) 10^3} = 4,9 \text{ mA}.$$

1.2. Момент $t = 0_+$. Это первое мгновение после размыкания ключа. В соответствие с законом коммутации

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 1,6 \text{ mA}. \quad (3.1)$$

Остальные величины находим путем составления и решения системы уравнений по законам Кирхгофа, описывающих электрическое состояние цепи в момент $t = 0_+$ (рис. 3.2 б):

$$\left. \begin{aligned} i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) &= 0 \\ R_1 i_1(0_+) + R_2 i_2(0_+) + u_L(0_+) &= E \\ (R_3 + R_4) i_3(0_+) + R_1 i_1(0_+) &= E \end{aligned} \right\}$$

После числовых подстановок с учетом (3.1) получим:

$$\left. \begin{aligned} i_1(0_+) - 1,6 \cdot 10^{-3} - i_3(0_+) &= 0 \\ 10^3 i_1(0_+) + 1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} + u_L(0_+) &= 9 \\ (0,5 + 2,5) 10^3 i_3(0_+) + 10^3 i_1(0_+) &= 9 \end{aligned} \right\}$$

Решая систему, находим:

$$i_1(0_+) = 3,45 \text{ мА}, \quad i_3(0_+) = 1,85 \text{ мА}, \quad u_L(0_+) = 3,15 \text{ В.} \quad (3.2)$$

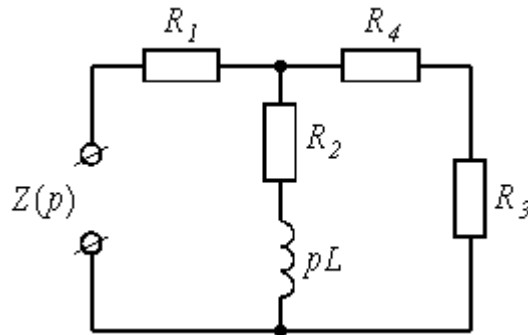


Рис. 3.3

1.3. Момент $t = \infty$. Означает новое стационарное состояние цепи после окончания переходного процесса. Внешне схема цепи при $t = \infty$ соответствует рис. 3.2 б, причем $u_L(\infty) = 0$, а токи рассчитываются по формулам:

$$i_1(\infty) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{9}{\left[1 + \frac{1,5(0,5 + 2,5)}{1,5 + 0,5 + 2,5} \right] 10^3} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 4,5 \text{ мА};$$

$$i_2(\infty) = i_1(\infty) \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{4,5 \cdot 10^{-3} \cdot (0,5 + 2,5) 10^3}{(1,5 + 0,5 + 2,5) 10^3} = 3 \text{ мА};$$

$$i_3(\infty) = i_1(\infty) - i_2(\infty) = 4,5 - 3 = 1,5 \text{ мА}.$$

2. Расчет токов $i_2(t)$, $i_3(t)$ и напряжения $u_L(t)$ после коммутации классическим методом.

Переходный процесс в цепях первого порядка (с одним реактивным элементом) описывается уравнением вида

$$f(t) = f_{np} + f_{ce}(t) = f_{np} + A e^{pt}, \quad (3.3)$$

где $f_{np} = f(\infty)$ – принужденная составляющая искомой величины, равная ее значению при $t = \infty$; $f_{ce}(t)$ – свободная составляющая; A – постоянная интегрирования; p – корень характеристического уравнения, определяющий в конечном итоге длительность переходного процесса. Так как p является общей величиной для всех токов и напряжений в конкретной цепи, то расчет переходного процесса целесообразно начать с определения p .

2.1. Характеристическое уравнение для расчета p составляется по операторной схеме замещения, отражающей работу цепи после коммутации, и показанной на рис. 3.3.

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + pL)(R_3 + R_4)}{R_2 + pL + R_3 + R_4}.$$

Принимая $Z(p) = 0$, получим характеристическое уравнение

$$pL + R_2 + \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4} = 0.$$

Решение уравнения дает корень

$$p = -\frac{R_2 + \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}}{L} = -\frac{\left[1,5 + \frac{1(0,5 + 2,5)}{1 + 0,5 + 2,5}\right] 10^3}{6,3 \cdot 10^{-3}} = -357 \cdot 10^3. \quad (3.4)$$

Величина

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{357 \cdot 10^3} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 2,8 \text{ мкс} \quad (3.5)$$

называется постоянной времени цепи.

2.2. Расчет $i_2(t)$.

В соответствии с (3.3) запишем:

$$i_2(t) = i_{2np} + A_1 e^{pt}.$$

Учтем, что $i_{2np} = i_2(\infty) = 3 \text{ мА}$. Величину A_1 найдем из рассмотрения $i_2(0_+)$ с учетом независимого начального условия (3.1):

$$i_2(0_+) = 3 + A_1 e^{p \cdot 0} = 1,6 \text{ мА}.$$

Откуда $A_1 = 1,6 - 3 = -1,4$. Тогда

$$i_2(t) = \left(3 - 1,4 e^{-357 \cdot 10^3 t}\right) \text{ мА}. \quad (3.6)$$

2.3. Расчет $u_L(t)$.

Воспользуемся законом Ома для индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di_2}{dt} = 6,3 \cdot 10^{-3} \frac{d}{dt} \left(3 - 1,4 e^{-357 \cdot 10^3 t}\right) \cdot 10^{-3} = 3,15 e^{-357 \cdot 10^3 t}. \quad (3.7)$$

2.4. Расчет $i_3(t)$. Ведется аналогично расчету $i_2(t)$.

$$i_3(t) = i_{3np} + A_2 e^{pt} = 1,5 + A_2 e^{pt}.$$

$$i_3(0_+) = 1,5 + A_2 = 1,85 \text{ mA}; \quad A_2 = 0,35.$$

$$i_3(t) = \left(1,5 + 0,35 e^{-357 \cdot 10^3 t} \right) \text{ mA.} \quad (3.8)$$

2.5. Проверка правильности расчетов производится путем анализа выражений (3.6), (3.7) и (3.8) в моменты времени $t = 0$ и ∞ .

$$i_2(0) = 1,6 \text{ mA}; \quad i_2(\infty) = 3 \text{ mA}.$$

$$i_3(0) = 1,85 \text{ mA}; \quad i_3(\infty) = 1,5 \text{ mA}.$$

$$u_L(0) = 3,15 \text{ B}; \quad u_L(\infty) = 0.$$

Полученные значения всех величин совпадают с результатами расчетов в п. 1.

3. Построение графиков переходного процесса.

Для построения графиков необходимо составить таблицу значений $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_L(t)$ в различные моменты времени (таблица 3).

Таблица 3

t	0	$0,5\tau$	τ	$1,5\tau$	2τ	3τ	4τ
$t, \text{ мкс}$	0	1,4	2,8	4,2	5,6	8,4	11,2
$i_2, \text{ mA}$	1,6	2,16	2,5	2,7	2,8	2,93	2,97
$i_3, \text{ mA}$	1,85	1,71	1,63	1,58	1,54	1,51	1,5
$u_L, \text{ B}$	3,15	1,9	1,16	0,7	0,41	0,16	0,06

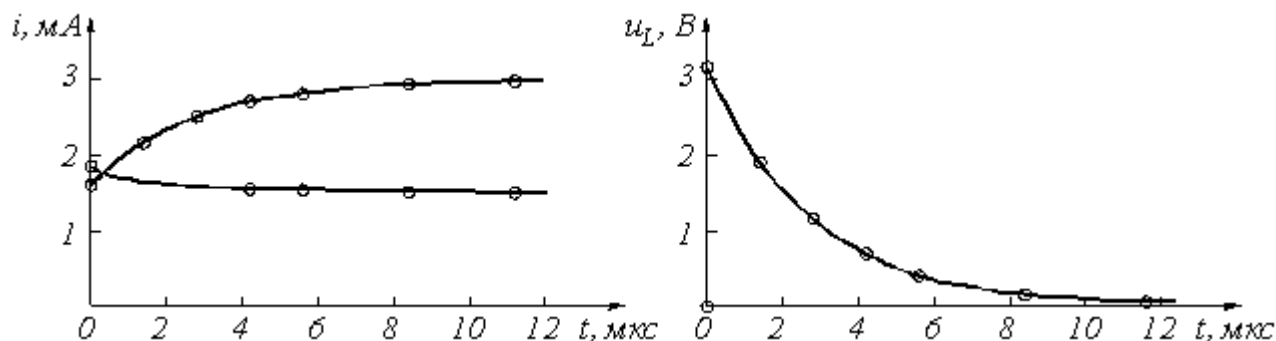


Рис. 3.4

Кривые $i_2(t)$ и $i_3(t)$ могут быть построены на одном графике. При выборе масштабных делений по осям графиков учитываются максимальные значения соответствующих величин. Для тока и

напряжения целесообразно принять в 1 см по 1 мА и 1 В соответственно. Масштаб по оси времени определяется длительностью переходного процесса. Известно, что экспоненциальные функции за время $t = 3\tau$ изменяется на 95% от своего максимального значения. Тогда можно принять, что переходный процесс в цепях первого порядка заканчивается через 3τ с погрешностью 5%. Учитывая (3.5), получим для данной схемы $t_{пер.пр} = 3\tau = 8,4$ мкс. Для построения графика удобно принять масштаб по оси времени 2 мкс в 1 см.

4. Расчет тока $i_2(t)$ операторным методом.

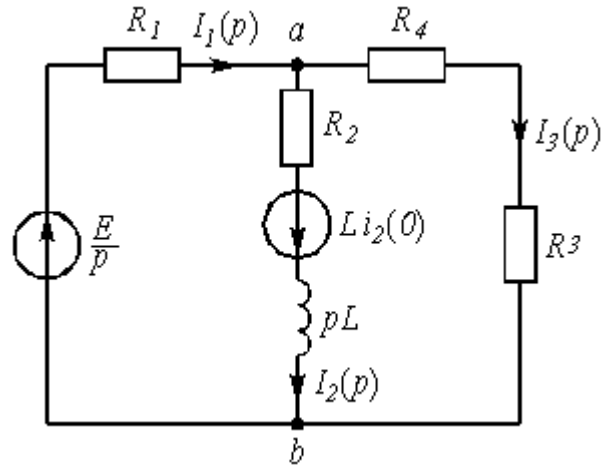


Рис. 3.5

Для состояния цепи при $t^3 0$ (рис. 3.2) составляется операторная схема замещения, которая учитывает независимые начальные условия в виде дополнительных (расчетных) источников напряжения $Li_L(0)$ или $u_C(0)/p$. В данной задаче таким источником будет $Li_2(0)$ (рис. 3.5).

Используя закон Ома, в операторной форме, запишем

$$I_2(p) = \frac{U_{ab}(p) + Li_2(0)}{R_2 + pL}, \tag{3.9}$$

где $U_{ab}(p)$ может быть найдено по методу узловых напряжений:

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_1} - Li_2(0) \left(\frac{1}{R_2 + pL} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + pL} + \frac{1}{R_3 + R_4}}, \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим

$$I_2(p) = \frac{E (R_3 + R_4) + [R_1 (R_3 + R_4)] Li_2(0)p}{p [(R_2 + pL) (R_3 + R_4) + R_1 (R_3 + R_4) + R_1 (R_2 + pL)]}$$

После числовых подстановок

$$I_2(p) = \frac{1,55 \cdot 10^{-3} p + 1,04 \cdot 10^3}{p(p + 346 \cdot 10^3)} = \frac{F_1(p)}{p F_2(p)}$$

Используя теорему разложения, найдем оригинал тока:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_2'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{1,04 \cdot 10^3}{346 \cdot 10^3} + \\ &+ \frac{1,55 \cdot 10^{-3} (-346 \cdot 10^3) + 1,04 \cdot 10^3}{-346 \cdot 10^3} e^{-346 \cdot 10^3 t} = \\ &= \left(3 - 1,44 e^{-346 \cdot 10^3 t} \right) \text{ мА,} \end{aligned}$$

которое совпадает с выражением (3.6), полученным классическим методом.

Задача 3.2

Задача посвящена временному и частотному (спектральному) методам расчета реакции цепей на сигналы произвольной формы. В качестве такого сигнала используется импульс прямоугольной формы (видеоимпульс).

Электрические схемы цепей (рис. 3.6) содержат емкости C или индуктивности L , а также сопротивления R . Для всех вариантов $R_2 = 3R_1$. В схемах, где имеется сопротивление R_3 , его величина $R_3 = 0,2R_1$. Во всех схемах входным напряжением $u_1(t)$ является прямоугольный импульс длительностью t_u и амплитудой U_1 .

1. Перерисуйте схему Вашего варианта (см. табл. 1 и рис. 3.6). Выпишите исходные данные Вашего варианта (таблица 4).

Таблица 4

Варианты	C, пф или L, мкГн	R_1 , кОм	t_u , нс	U_1 , В
От 00 до 09	20	1	30	3
От 10 до 19	25	1	35	4
От 20 до 29	30	1	40	5
От 30 до 39	20	2	35	6
От 40 до 49	25	2	40	7
От 50 до 59	30	2	45	3
От 60 до 69	20	3	35	4
От 70 до 79	25	3	40	5
От 80 до 89	30	3	45	6

От 90 до 99

25

2,5

35

7

Временной метод расчета

2. Рассчитайте переходную $g_2(t)$ и импульсную $h_2(t)$ характеристики цепи по напряжению классическим или операторным методами (по выбору).

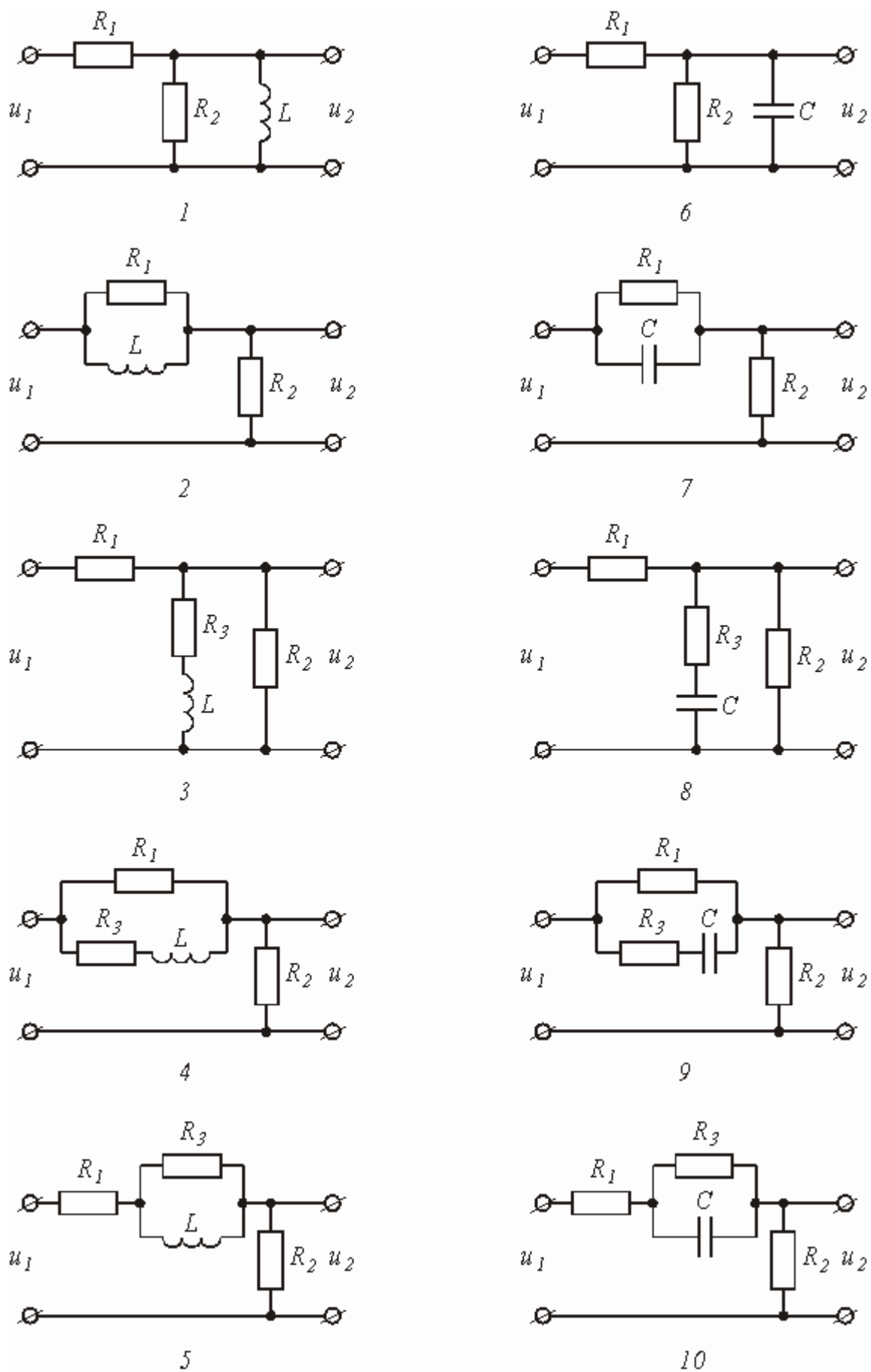


Рис.3.6

3. Рассчитайте реакцию цепи в виде выходного напряжений $u_2(t)$ используя:

- интеграл Дюамеля;

- интеграл наложения.

4. Постройте временные диаграммы входного и выходного напряжений.

Частотный метод расчета

5. Рассчитайте комплексные спектральные плотности входного $U_1(j\omega)$ и выходного $U_2(j\omega)$ сигналов.

6. Рассчитайте и построьте графики модулей $|U_1(j\omega)| = U_1(\omega)$, $|U_2(j\omega)| = U_2(\omega)$ и модуля комплексной передаточной функции цепи $|H(j\omega)| = H(\omega)$, как функций от циклической частоты f в диапазоне частот $0 - 3/t_u$.

Типовая задача Т3.2

Схема цепи, приведенная на рис. 3.7 а, содержит емкость $C = 10$ пф и сопротивления $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 3R_1 = 3$ кОм. На входе цепи действует прямоугольный импульс (рис. 3.8) длительностью $t_u = 60$ нс и амплитудой $U_1 = 4$ В. Выполнить расчеты в соответствии с заданием к задаче 3.2.

Решение

1. Расчет переходной и импульсной характеристик классическим методом.

1.1. Переходная характеристика цепи рассчитывается, как переходной процесс в виде тока или напряжения, вызванный включением цепи с нулевыми начальными условиями на постоянное напряжение 1 В. В соответствии с этим составляется схема включения (рис. 3.7 б), на которой $E = 1$ В. В задаче определяется переходная характеристика $g_2(t)$ по напряжению относительно выходного контура $R_2 C$, поэтому можно записать, что:

$$g_2(t) = u_{R_2}(t) + u_C(t) = R_2 i(t) + u_C(t) = R_2 C \frac{du_C}{dt} + u_C(t), \quad (3.11)$$

Напряжение $R_2 = 3R_1$ в схеме на рис. 3.7 б может быть рассчитано с помощью общей формулы (3.3) расчета переходных процессов в схемах первого порядка:

$$u_C(t) = u_{C,np} + Ae^{pt},$$

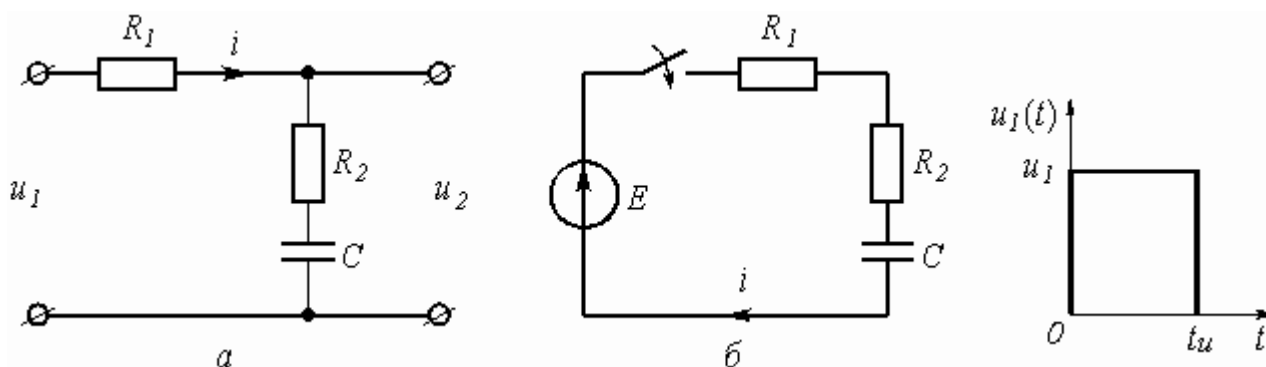


Рис.3.7

где $u_{C,np} = u_C(\infty) = 1$ В; p – корень характеристического уравнения, находится из операторного сопротивления схемы, и равен; постоянная

$$Z(p) = R_1 + R_2 + 1/pC \qquad p = 1/(R_1 + R_2)C$$

интегрирования находится из рассмотрения $u_C(t)$ при $t = 0_+$:

$$u_C(0_+) = u_{C, np} + A = 0 \text{ (нулевое начальное условие).}$$

Откуда $A = -u_{C, np} = -1$. Окончательно

$$u_C(t) = 1 - 1e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} = 1 - e^{-\frac{t}{40 \cdot 10^{-9}}},$$

где $\tau_1 = 40 \cdot 10^{-9} C$ – постоянная времени цепи.

Подставляя $R_2 = 3R_1$ в (3.11), получим:

$$\begin{aligned} g_2(t) &= R_2 C \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = \\ &= 1 - 0,25 e^{-\frac{t}{40 \cdot 10^{-9}}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Обратить внимание, что $g_2(t)$ в (3.12) определяется только элементами цепи и не зависит ни от токов, ни от напряжений.

1.2 Импульсная характеристика цепи $h(t)$ есть производная от переходной характеристики $h(t) = g\phi(t)$. Однако следует учесть, что, если переходная характеристика отлична от нуля при $t = 0$, т.е. имеет скачок при $t = 0$, то при дифференцировании появляется дополнительное слагаемое:

$$h(t) = g(0)d(t) + g\phi(t).$$

В рассматриваемой задаче $g_2(0) = 0,75$, поэтому

$$h_2(t) = 0,75 \delta(t) + 6,25 \cdot 10^6 e^{-\frac{t}{40 \cdot 10^{-9}}}, \quad (3.13)$$

где $d(t)$ – импульсная функция (функция Дирака).

2. Расчет выходного напряжения $u_2(t)$ временным методом.

2.1. Использование интеграла Дюамеля.

Из известных четырех формул интеграла Дюамеля наиболее общий характер имеет формула вида

$$u_2(t) = u_1(0)g_2(t) + \int_0^t u_1'(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \quad (3.14)$$

в обозначениях величин и понятий, принятых в рассматриваемой задаче. Переменной интегрирования в (3.14) является t (не путать с постоянной времени τ_1).

Входное напряжение имеет форму прямоугольного импульса (рис. 3.8), аналитическая

$$u_I(t)$$

запись которого может быть представлена как

$$u_I(t) = \begin{cases} U_I & \text{при } 0 \leq t \leq t_u \\ 0 & \text{при } t \geq t_u. \end{cases} \quad (3.15)$$

Из (3.15) следует, что $u_I(0) = U_I$ и что производная $u_I'(t) = 0$ или для переменной $\tau - u_I'(\tau) = 0$.

Число участников интегрирования в (3.14) определяется числом участков в функции, описывающей входной сигнал, в которых она непрерывна и дифференцируема [1, с. 188]. Для функции (3.15) таких участков в виде интервалов времени два: $0 \leq t < t_u$ и $t_u \leq t < \infty$. Необходимость учета второго участка, когда $u_I(t) = 0$, объясняется тем, что за время действия импульса в реактивных элементах цепи накапливается энергия электрического и магнитного полей, которая после окончания импульса постепенно убывает до нуля, создавая напряжение и токи в цепи. Анализ этих величин и проводится в интервале $t \geq t_u$.

Важнейшей характерной особенностью аппарата интеграла Дюамеля является то, что при записи реакции цепи на каждом новом интервале времени наличие скачкообразного изменения входного сигнала в начальный момент рассматриваемого интервала учитывается дополнительным слагаемым вида

$$\Delta U g(t - t_{\kappa}),$$

где ΔU – амплитуда скачка;

t_{κ} – момент действия скачка.

Учитывая сказанное, запишем выходное напряжение цепи в соответствие с (3.14) и (3.12):

для интервала времени $0 \leq t < t_u$

$$u_2(t) = U_I g_2(t) + \int_0^t 0 \cdot g_2(t - \tau) d\tau = 4 \cdot \left(1 - 0,25 e^{-25 \cdot 10^6 t} \right) = 4 - e^{-25 \cdot 10^6 t}. \quad (3.16)$$

для интервала времени $t_u \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= U_I g_2(t) + \int_0^{t_u} 0 \cdot g_2(t - \tau) d\tau - U_I g_2(t - t_u) = \\ &= 4 \cdot \left(1 - 0,25 e^{-25 \cdot 10^6 t} \right) - 4 \cdot \left(1 - 0,25 e^{-25 \cdot 10^6 (t - t_u)} \right) = 3,48 e^{-25 \cdot 10^6 t}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

2.2. Использование интеграла наложения.

В отличие от интеграла Дюамеля в интеграле наложения не учитываются дополнительными слагаемыми скачки входного напряжения:

$$u_2(t) = \int_0^t U_I(\tau) \cdot h_2(t - \tau) d\tau, \quad (3.18)$$

С учетом (3.13) реакция (3.18) заданной цепи на прямоугольный импульс будет равна:

для интервала времени $0 \leq t < t_u$

$$u_2(t) = \int_0^t U_I \left[0,75 \delta(\tau) + 6,25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau,$$

Используя фильтрующее свойство импульсной δ -функции [1. стр. 173], получим

$$u_2(t) = 4 \cdot 0,75 + 4 \int_0^t 6,25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} d\tau = 4 - e^{-25 \cdot 10^6 t},$$

Для интервала времени $t_u \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^{t_u} U_I \left[0,75 \delta(\tau) + 6,25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau + \\ &+ \int_{t_u}^t \left[(0 - U_I) 0,75 \delta(\tau - t_u) + 0 \cdot 6,25 \cdot 10^6 e^{-25 \cdot 10^6 (t-\tau)} \right] d\tau = \\ &= 4 \cdot 0,75 + \left(e^{25 \cdot 10^6 t_u} - 1 \right) e^{-25 \cdot 10^6 t} - 4 \cdot 0,75 = 3,48 e^{-25 \cdot 10^6 t}. \end{aligned}$$

Сравнение результатов расчетов напряжения $u_2(t)$ с использованием интегралов наложения и Дюамеля показывает, что они совпадают между собой.

3. Построение временной диаграммы входного и выходного напряжений.

Диаграмма выходного напряжения строится с использованием формул (3.16) и (3.17) путем подстановки в них соответствующих моментов времени. Результаты расчетов сводятся в таблицу 5.

Таблица 5

Время,	0	$0,3t_u$	$0,6t_u$	t_{u-}	t_{u+}	$t_u + \tau_I$	$t_u + 2\tau_I$	$t_u + 3\tau_I$
нс	0	18	36	60	60	100	140	180
u_1 , В	4	4	4	4	0	0	0	0
u_2 , В	3	3,4	3,6	3,8	0,8	0,28	0,03	0,01

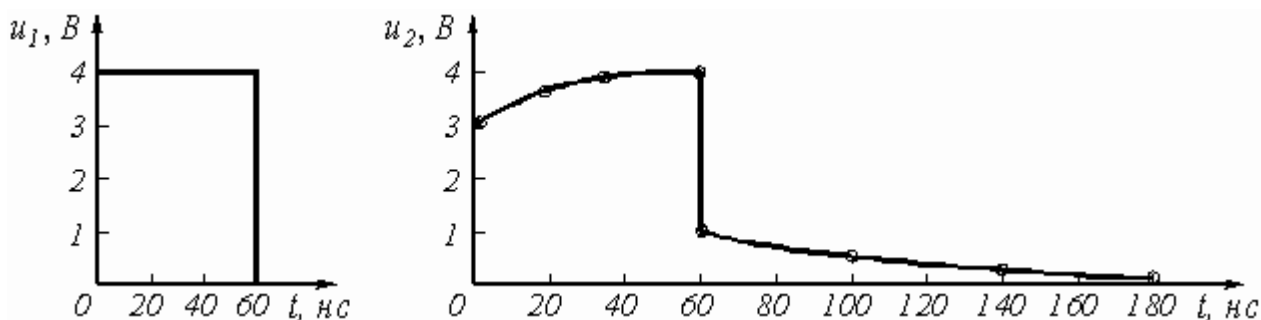


Рис.3.8

Из таблицы 5 видно, что $u_2(t)$ в момент $t = t_u$ рассчитывается дважды: при t_{u-} по формуле (3.16), а при t_{u+} по формуле (3.17). Именно при такой методике можно определить будет ли скачкообразное изменение в форме выходного сигнала в момент изменения функции, описывающей входной сигнал, как это и показано в рассматриваемом примере.

Выбор расчетных точек в интервале $t > t_u$ определяется временем затухающего переходного процесса, которое зависит от постоянной времени цепи, равной $\tau_I = (R_1 + R_2)C = (1 + 3)10^3 \cdot 10^{-11} = 40$ нс.

Временные диаграммы входного и выходного напряжений показаны на рис. 3.9.

4. Расчет комплексной спектральной плотности входного $U_1(j\omega)$ и выходного $U_2(j\omega)$ сигналов.

Для расчета комплексной спектральной плотности непериодического сигнала $f(t)$ произвольной формы используется прямое преобразование Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Для заданного входного сигнала (3.15) преобразование Фурье дает выражение

$$U_1(j\omega) = \int_0^{t_u} U_1 e^{-j\omega t} dt = \frac{U_1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_u}),$$

которое после преобразований (в контрольной работе показать эти преобразования) принимает более удобную форму

$$U_1(j\omega) = \frac{2U_1}{\omega} \sin \frac{\omega t_u}{2} e^{-j \frac{\omega t_u}{2}} = U_1 t_u \frac{\sin \frac{\omega t_u}{2}}{\frac{\omega t_u}{2}} e^{-j \frac{\omega t_u}{2}}. \quad (3.19)$$

Комплексная спектральная плотность выходного сигнала находится по формуле

$$U_2(j\omega) = H(j\omega) \cdot U_1(j\omega), \quad (3.20)$$

где $H(j\omega)$ – комплексная передаточная функция цепи по напряжению. Функция $H(j\omega)$ находится как отношение комплексного значения гармонического напряжения \underline{U}_2 на выходе цепи к комплексному значению гармонического напряжения той же частоты, приложенному ко входу

$$\underline{U}_1$$

цепи:

$$H(j\omega) = \underline{U}_2 / \underline{U}_1.$$

Для схемы, приведенной на рис. 3.7 а легко получить:

$$\underline{U}_2 = \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C} \right) I = \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C} \right) \frac{\underline{U}_1}{R_1 + R_2 - j \frac{1}{\omega C}}.$$

Тогда

$$H(j\omega) = \frac{R_2 - j \frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2 - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega (R_1 + R_2) C}. \quad (3.21)$$

Анализ (3.21) позволяет сделать вывод, что комплексная передаточная функция цепи по напряжению определяется только элементами цепи и является безразмерной величиной.

Используя (3.19) и (3.21), находим по (3.20) спектральную плотность выходного сигнала:

$$U_2(j\omega) = \frac{2U_1(1 + j\omega R_2 C)}{\omega [1 + j\omega (R_1 + R_2) C]} \sin \frac{\omega t_u}{2} e^{-j \frac{\omega t_u}{2}}. \quad (3.22)$$

5. Расчет графиков модулей $|U_1(j\omega)|$, $|H(j\omega)|$ и $|U_2(j\omega)|$.

Из выражений (3.19), (3.21) и (3.22) легко получить модули: спектральной плотности входного напряжения

$$U_1(\omega) = |U_1(j\omega)| = \frac{2U_1}{\omega} \left| \sin \frac{\omega t_u}{2} \right|; \quad (3.23)$$

комплексной передаточной функции (амплитудно-частотная характеристика цепи)

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega R_2 C)^2}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2}}; \quad (3.24)$$

спектральной плотности выходного напряжения

$$U_2(\omega) = |U_2(j\omega)| = \frac{2U_1}{\omega} \sin \frac{\omega t_u}{2} \sqrt{\frac{1 + (\omega R_2 C)^2}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2}}. \quad (3.25)$$

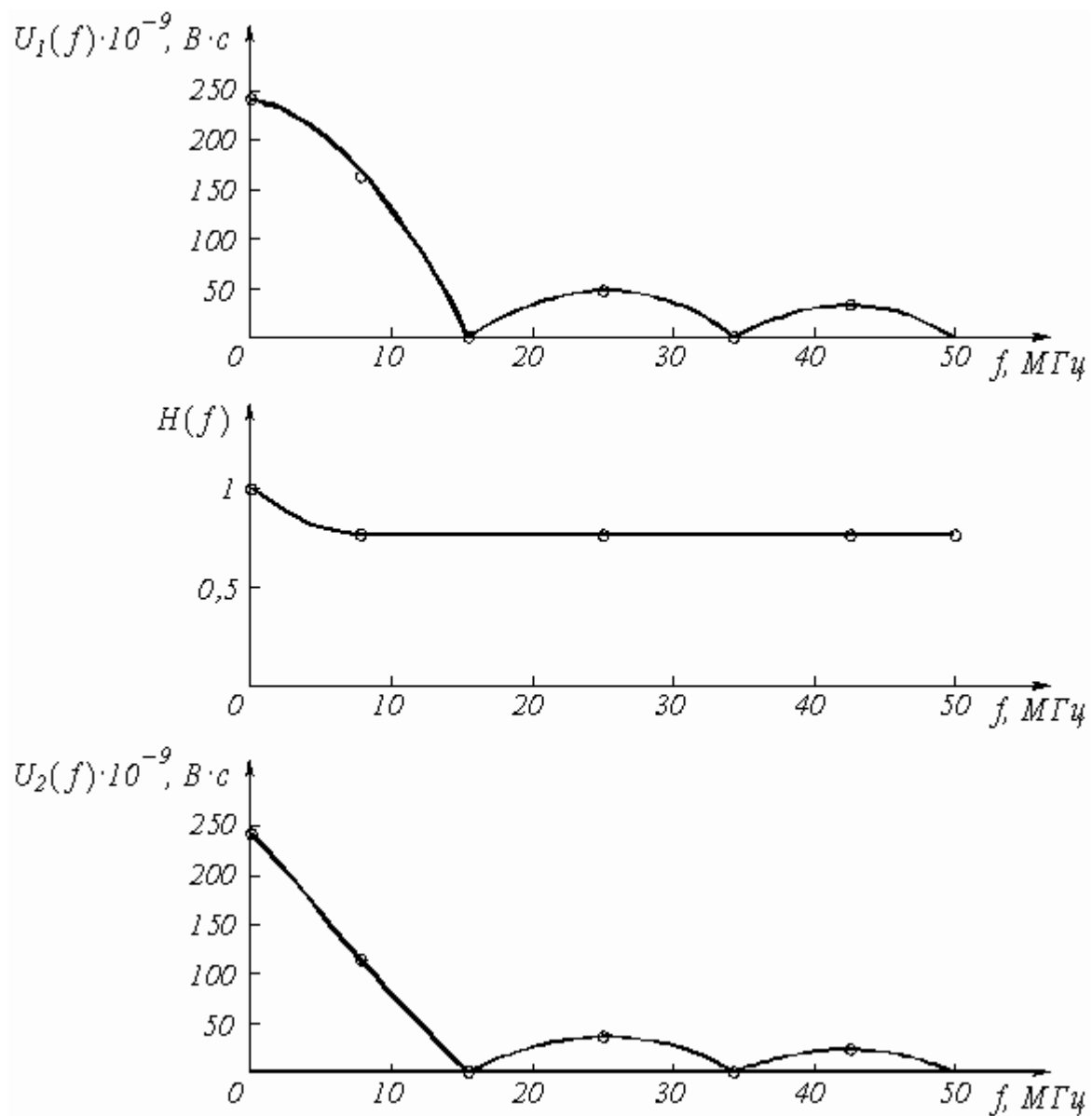


Рис.3.10

Для построения графиков полученных функций необходимо выбрать расчетные точки по частоте. Учтем, что спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса измеряется в вольт \times секундах $[B \times c]$ и что она обращается в ноль на частотах $f = 1/t_u, 2/t_u, 3/t_u$ и т.д. Поэтому дополнительно выбираются промежуточные точки между этими частотами. Максимальная частота в соответствии с заданием равна $3/60 \times 10^{-9} = 50 \times 10^6$ Гц = 50 МГц. Результаты расчетов по (3.23), (3.25) сводим в таблицу 6.

Таблица 6

$f, \text{ МГц}$	$\omega \cdot 10^6, \text{ рад/с}$	$U_1(\omega) \cdot 10^{-9}, \text{ В} \times \text{ с}$	$H(\omega)$	$U_2(\omega) \cdot 10^{-9}, \text{ В} \times \text{ с}$
0	0	240	1	240
8,3	52,1	153	0,75	115
16,6	104,2	0	0,75	0
24,9	157	51	0,75	38

33,3	209	0	0,75	0
41,6	261	31	0,75	23
50	314	0	0,75	0

По данным таблицы 6 строим графики (рис. 3.10).
