Задание 1. Решить следующую задачу динамического программирования (15 баллов).

Имеется S_0 – начальное количество средств, которые нужно распределять в течение m лет между двумя отраслями I и II. Средства, вложенные в каждую отрасль, приносят за год определенный доход. Если вложить средства x в отрасль I, то за год получим доход $f_1(x)$. Если вложить средства y в отрасль II, то за год получим доход $f_2(y)$. При этом средства амортизируются (уменьшаются) так, что к концу года становятся равными для отрасли I $\varphi_1(x)<x$, а для отрасли II $\varphi_2(y)<y$.

По истечение года оставшиеся от K_0 средства перераспределяются заново между отраслями I и II. Новых средств не поступает, доход в производство не вкладывается, а накапливается отдельно. Найти такой способ управления ресурсами (какие средства, в какие года и в какую отрасль вкладывать), при котором суммарный доход от обеих отраслей за m лет будет максимальным.

Решить задачу 1 при следующих условиях: $S_0 = 10000, f_1(x)= 0{,}6x^2, f_2(y)= 0{,}5y^2, \varphi_1(x)= 0{,}7x, \varphi_2(y)= 0{,}8y, m=3.$

Уравнение состояния

$$s_k = \phi_1(x_k) + \phi_2(s_{k-1} - x_k)$$
$$s_k = 0.7x_k + 0.8(s_{k-1} - x_k)$$
$$s_k = 0.8s_{k-1} - 0.1x_k$$

Целевая функция k-го шага

$$f_1(x_k) + f_2(s_{k-1} - x_k)^2$$
$$1.1x_k^2 + 0.5s_{k-1}^2 - s_{k-1}x_k$$

Целевая функция

$$Z = \sum_{k=1}^{3} 1.1x_k^2 + 0.5s_{k-1}^2 - s_{k-1}x_k$$

Функциональные уравнения

$$Z^*(s_2) = \max_{0\leqslant x_3 \leqslant s_2} \{1.1x_{3k}^2 + 0.5s_2^2 - s_2x_3\}$$

$$Z^*(k) = \max_{0\leqslant x_k \leqslant s_{k-1}} \{1.1x_k^2 + 0.5s_{k-1}^2 - s_{k-1}x_k + Z_{k+1}^*(s_k)\}$$

III шаг

$$Z_3 = 1.1x_3^2 + 0.5s_2^2 - s_2x_3$$

график этой функции при $s_2 = 1$

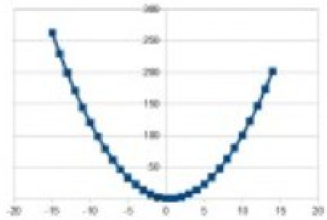


график этой функции при $s_2 = 10$

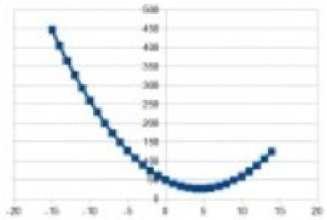
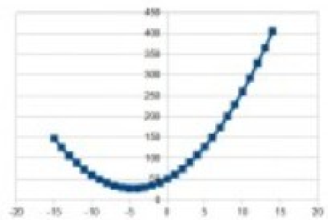


график этой функции при $s_2 = -10$



Из графика видно, что у функции нет точки максимума, поэтому задача не имеет решений

Задание 2. **Решить следующую задачу динамического программирования (15 баллов).**

Конструируется электронный прибор, состоящий из трех основных компонент. Все компоненты соединены последовательно, поэтому выход из строя одной из них приводит к отказу всего прибора. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора можно повысить путем дублирования каждой компоненты. Конструкция прибора допускает использование одного или двух запасных блоков, т.е. каждая компонента может содержать до трех блоков, соединенных параллельно. Общая стоимость прибора не должна превышать 10 тыс. долл. Данные о надежности $R_j(k_j)$ и стоимости $C_j(k_j)$ j-ой компоненты (j=1,2,3), включающей k_j соединенных параллельно блоков, приведены в таблице. Требуется определить кол-во блоков k_j в компоненте j, при котором надежность прибора максимальна, а стоимость не превышает заданной величины.

k_j	J=1		J=2		J=3	
	R_1	C_1	R_2	C_2	R_3	C_3
1	0.6	1	0.7	3	0.5	2
2	0.8	2	0.8	5	0.7	4
3	0.9	3	0.9	6	0.9	5

$$f_1(y_1)=\max_{k_1\ldots k_3}\left\{\prod_{j=1}^{n} R_j(k_j)\right\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(k_j)\le y_1$$

$$k_j\ge 1-\text{целые}$$

$$f_n(y_n)=\max_{k_n|c_n(k_n)\le y_n}\{R_n(k_n)\}$$

$$f_j(y_j)=\max_{k_j|c_j(k_j)\le y_j}\{R_j(k_j)*f_{j+1}(y_j-c_j(k_j))\}$$

$$j=n-1,n-2,\ldots,1$$

Этап 3. Третья компонента прибора

$$f_3(y_3)=\max_{x_3}\{R_3(k_3)\}$$

y_3	$R_3(k_3)$			Оптимальное решение	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$f_3(y_3)$	k_3^*
2	0,5	-	-	0,5	1
3	0,5	-	-	0,5	1
4	0,5	0,7	-	0,7	2
5	0,5	0,7	0,9	**0,9**	**3**
6	0,5	0,7	0,9	0,9	3

Этап 2. Вторая и третья компонента прибора

$$f_2(y_2)=\max_{k_2=1,2,3}\{R_2(k_2)*f_3(y_2-c_2(k_2))\}$$

y_2	$R_2(k_2)*f_3(y_2-c_2(k_2))$			Оптимальное решение	
	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$f_2(y_2)$	k_2^*
5	0,7*0,5=0,35	-	-	0,35	1
6	0,7*0,5=0,35	-	-	0,35	1
7	0,7*0,7=0,49	0,8*0,5=0,4	-	0,49	1
8	0,7*0,9=0,63	0,8*0,5=0,4	0,9*0,5=0,45	**0,63**	**1**
9	0,7*0,9=0,63	0,8*0,7=0,56	0,9*0,5=0,45	0,63	1

Этап 1. Первая, вторая и третья компоненты прибора

$$f_1(y_1)=\max_{k_1=1,2,3}\{R_1(k_1)*f_2(y_1-c_1(k_1))\}$$

y_1	$R_1(k_1)*f_2(y_1-c_1(k_1))$			Оптимальное решение	
	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$f_1(y_1)$	k_1^*
6	0,6*0,35=0,21	-	-	0,21	1
7	0,6*0,35=0,21	0,8*0,35=0,28	-	0,28	2
8	0,6*0,49=0,294	0,8*0,35=0,28	0,9*0,35=0,315	0,315	3
9	0,6*0,63=0,378	0,8*0,49=0,392	0,9*0,35=0,315	0,392	2
10	0,6*0,63=0,378	0,8*0,63=0,504	0,9*0,49=0,441	**0,504**	**2**

k_j	j=1		j=2		j=3	
	R_1	C_1	R_2	C_2	R_3	C_3
1	0,6	1	**0,7**	**3**	0,5	2
2	**0,8**	**2**	0,8	5	0,7	4
3	0,9	3	0,9	6	**0,9**	**5**

в требуемом приборе будут 2 блока первого вида, один блок второго вида и 3 блока третьего вида

Задание 3. (4 балла)

Игрок *A* записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок *B* — одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если оба числа одинаковой четности, то *A* выигрывает и выигрыш равен сумме этих чисел, если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то *B* выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры, определить нижнюю и верхнюю цены игры и проверить наличие седловой точки.

платежная матрица

	$B_1(1)$	$B_2(2)$	$B_3(3)$		α
A_1 (1)	2	-3	4	-3	-3
A_2 (2)	-3	4	-5	-5	
	2	4	4		
β	2				

нижняя цена игры = -3

верхняя цена игры = 2

$-3 \neq 2$ седловой точки нет

Задание 4. (6 баллов)

Найти решение игры, предварительно упростив ее:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

упростим игру

3	-2	5	-1
4	0	6	1
2	-1	3	2
1	3	7	4

Удалим первую строку (числа в ячейках меньше, чисел в ячейках второй строки)

4	0	6	1
2	-1	3	2
1	3	7	4

Удалим третий столбец (числа в ячейках больше, чисел в ячейках первого столбца)

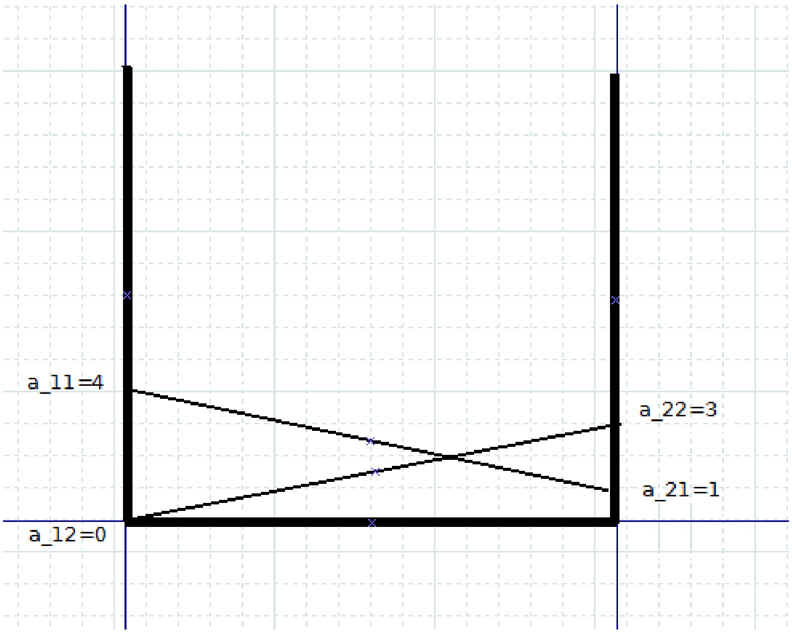
4	0		1
2	-1		2
1	3		4

Удалим четвертый столбец (числа в ячейках больше, чисел в ячейках второго столбца)

4	0		
2	-1		
1	3		

Удалим третью строку (числа в ячейках меньше, чисел в ячейках первой строки)

4	0		
1	3		



точки (0; 0) и (1;3)

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{3-0} \qquad y=3x$$

точки (0; 4) и (1;1)

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-4}{1-4} \qquad y=4-3x$$

$$\begin{cases} y=3x \\ y=4-3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=2 \end{cases}$$

$$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Значит $p_2^*=\frac{2}{3}$ $p_4^*=\frac{1}{3}$ оптимальная стратегия $S_A^*=(0;\frac{2}{3};0;\frac{1}{3})$ цена игры v = 2