Контрольная работа #1

(4) а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5n-1}{(3n+2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5n-1}{9n^2+12n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\left(2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(9+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{9+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}} =$

$= \dfrac{2+0+0}{9+0+0} = \dfrac{2}{9}$.

б) $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} = \left\{\begin{matrix} \text{замена } x=y^3 \\ y\to 3 \end{matrix}\right\} = \lim\limits_{y\to 3} \dfrac{y^3-27}{y-3} = \lim\limits_{y\to 3} \dfrac{(y-3)(y^2+3y+9)}{(y-3)} =$

$= \lim\limits_{y\to 3} (y^2+3y+9) = 9+9+9 = 27$.

с) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{4x^2} = \left\{\begin{matrix} \text{воспользуемся} \\ \text{эквивалентцией} \\ \sin z \simeq z \text{ при } z\to 0 \end{matrix}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(4x)^2}{4x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 4 = 4$.

(5) а) $y = 5x^3 - 2x^{2/3} + 3x^{-1/3} - 2^x$;

$y' = 15x^2 - \frac{4}{3}x^{-1/3} - \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^{-4/3} - 2^x \ln 2$;

б) $y = \cos 4x \cdot \ln(3x^2+1)$;

$y' = -4\sin 4x \cdot \ln(3x^2+1) + \cos 4x \cdot \dfrac{6x}{3x^2+1}$;

в) $y = \dfrac{(\sqrt{2x} - tg 2x)^2}{(4x+1)}$

$y' = \dfrac{2(\sqrt{2x} - tg 2x)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2x}} - \frac{2}{\cos^2 2x}\right) - (\sqrt{2x} - tg 2x)\cdot 4}{(4x+1)^2}$;

(6) а) $\boxed{y = (x+3)^2(x-6)}$

1) $D(y)$: $x \in (-\infty; +\infty)$;

2) функция общего вида;

3) $x = 0 \to y = 3^2\cdot(-6) = -54$;

нули: $x = -3$; $x = 6 \Rightarrow y = 0$;

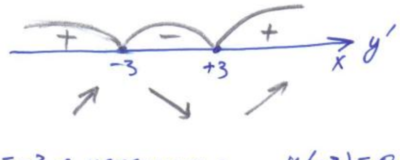
$y(x) > 0$ при $x > 6$ и $y(x) < 0$ при $x < 6$;

при $x \to \pm\infty$ $y(x) \to \pm\infty$.

4) экстремумы и промежутки монотонности:

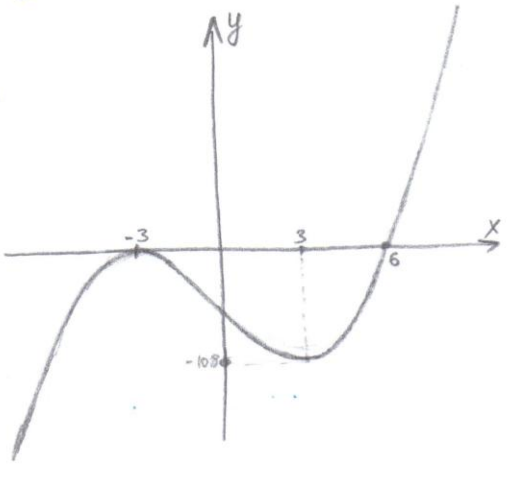
$y' = 2(x+3)(x-6) + (x+3)^2 = 3(x-3)(x+3) = 0$;

$x_1 = -3$; $x_2 = 3$;



$x_1 = -3 \to$ максимум; $y(-3) = 0$;

$x_2 = 3 \to$ минимум; $y(3) = -108$;



$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) \to$ функция возрастает

$x \in (-3; 3) \to$ функция убывает;

5) $y' = 3(x^2 - 9)$; $y'' = 6x = 0$; $\Rightarrow x = 0 \to$ точка перегиба

$x \in (-\infty; 0) \to$ функция выпукла; $x \in (0; +\infty) \to$ функция вогнута;

(5) $\boxed{y = 1 - x - \frac{8}{2x-5}}$ 1) $D(y)$: $x \in (-\infty; \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; +\infty)$;

2) функция общего вида;

3) $x = 0$; $y(0) = 1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$;

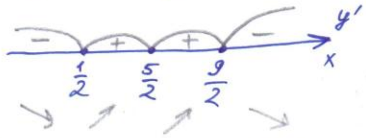
$x \to \pm\infty \quad y \to \mp\infty$;

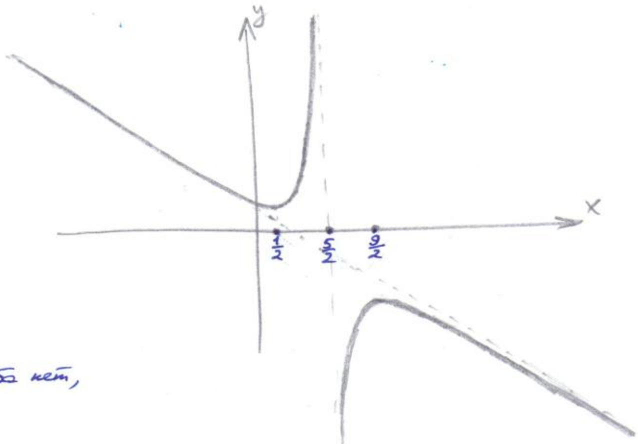
$x = \frac{5}{2} \to$ вертикальная ассимптота; $y = 1 - x \to$ наклонная ассимптота;

4) $y' = -1 + \frac{16}{(2x-5)^2} = \frac{16 - (2x-5)^2}{(2x-5)^2} = 0$;

$(2x-5)^2 = 16$; $2x - 5 = \pm 4$; $2x_2 = 9$ или $2x_1 = 1$;

тогда $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{9}{2}$;





$x = \frac{1}{2} \to$ минимум; $x = \frac{9}{2} \to$ максимум;

$x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{9}{2}; +\infty) \to$ убывает;

$x \in (\frac{1}{2}; \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; +\infty) \to$ возрастает;

5) $y'' = -\frac{32}{(2x-5)^3}$; $\to$ точек перегиба нет, т.к. $y'' \neq 0$;

$x \in (-\infty; \frac{5}{2}) \to$ функция вогнута; $x \in (\frac{5}{2}; +\infty) \to$ выпукла;

Контрольная работа № 2

(1) $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{4}{9}x^2 + 1} = \frac{1}{6} \int \frac{d(\frac{2}{3}x)}{(\frac{2}{3}x)^2 + 1} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C.$

$$\int \frac{\operatorname{ctg}^2 2x - \cos^3 2x - 2}{\sin^2 2x} dx = \int \operatorname{ctg}^2 2x \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} dx - \int \frac{\cos^3 2x}{\sin^2 2x} dx - 2 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} =$$

$$= -\int \operatorname{ctg}^2 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot d(\operatorname{ctg} 2x) - \int \frac{\cos 2x\,(1 - \sin^2 2x)\,dx}{\sin^2 2x} + \operatorname{ctg} 2x =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \operatorname{ctg}^3 2x - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - 1 \right) d \sin 2x + \operatorname{ctg} 2x =$$

$$= -\frac{1}{6}ctg^3 2x + ctg\,2x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2\sin 2x} + C.$$

(2) $$\int_0^{\pi/8}(1-3x)\cos 4x\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{интегрируем}\\ \text{по частям}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8}(1-3x)\,d\sin 4x =$$

$$= \frac{1}{4}(1-3x)\sin 4x\Big|_0^{\pi/8} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8}\sin 4x\cdot d(1-3x) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{3}{4}\int_0^{\pi/8}\sin 4x\,dx = \frac{1}{32}(8-3\pi) + \frac{3}{16}(-\cos 4x)\Big|_0^{\pi/8} = \frac{1}{32}(8-3\pi) + \frac{3}{16} =$$

$$= \frac{14-3\pi}{32}.$$

(3) $\boxed{(x-2)y' = 2-y}$ → дифференциальное ур-ие $I^{го}$ порядка с разделяющимися переменными;

• $(x-2)\dfrac{dy}{dx} = (2-y)$; разделяем переменные: $\dfrac{dy}{2-y} = \dfrac{dx}{x-2}$;

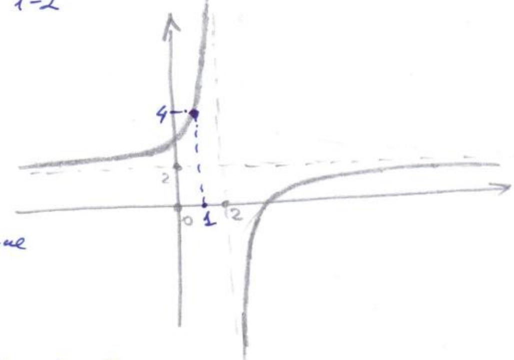
• интегрируем: $\displaystyle\int\frac{dy}{2-y} = \int\frac{dx}{x-2} \Rightarrow -\ln|y-2| = \ln\left|\frac{x-2}{C}\right|$;

отсюда $y-2 = \dfrac{C}{x-2}$; $\boxed{y(x) = 2+\dfrac{C}{x-2};}$ → общее решение;

$\boxed{x_0=1;\ y_0(1)=4}$ → $y(1) = 2+\dfrac{C}{1-2} = 2-C = 4$; $C=-2$; тогда

$\boxed{y(x) = 2-\dfrac{2}{x-2}}$ → решение дифф. ур-ие для $(x_0; y_0)$

→ гипербола



(4) $\boxed{y''+3y' = -3e^{-3x}}$ → линейное неоднородное ур-ие второго порядка

1) Решаем однородное: $y''+3y'=0$;

• характеристич. ~~решение~~ ур-ие: $k^2+3k=0$;

$k(k+3)=0$; $k_1=0$; $k_2=-3$; тогда $y(x) = C_1+C_2e^{-3x}$;

2) ищем частное решение неоднородного в виде:

$\tilde{y} = axe^{-3x}$; тогда

$\tilde{y}' = ae^{-3x}\cdot(1-3x)$; $\tilde{y}'' = 3ae^{-3x}(-2+3x)$; тогда:

$3ae^{-3x}(-2+3x) + 3ae^{-3x}(1-3x) = -3e^{-3x}$;

~~отсюда~~ $-6a+3a=-3$; $a=1$; тогда

$\boxed{y(x) = C_1+C_2e^{-3x}+xe^{-3x}}$ → решение исходного ур-ие;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(-5)^n\sqrt{2n+3}}$;

• первые три члена: $u_0 = \frac{1}{(-5)^0\sqrt{2\cdot 0+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$u_1 = \frac{x}{-5\sqrt{5}}$; $u_2 = \frac{x^2}{25\sqrt{7}}$;

• для исследования сходимости ряда воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\cdot\frac{(-5)^n\sqrt{2n+3}}{(-5)^{n+1}\sqrt{2n+5}}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\,\frac{\cancel{\sqrt{2n}}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{1/2}}{\cancel{\sqrt{2n}}\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{1/2}} =$$

$= \frac{|x|}{5} < 1$; $\Rightarrow$ $\boxed{x\in(-5;+5)}$ → интервал сходимости

• при $x=-5$; $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ → расходится ;

• при $x=5$; $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ → сходится условно по признаку Лейбница:

1) знакочередование выполнено ;
2) $a_{n+1} < a_n$, т.к. $\frac{1}{\sqrt{2n+5}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ → монотонно убывает ;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+5}} = 0$;

Таким образом, интервал сходимости есть $\boxed{x\in(-5;+5]}$

1 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{приведем} \\ \text{матрицу к} \\ \text{диагональному} \\ \text{виду}\end{matrix}\right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & +8 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -33 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & -76 & -23 \\ 0 & 0 & 14 & -42 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -33 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

• тогда определитель равен: $\Delta = 1\cdot1\cdot13\cdot4\cdot1 = 52$.

2 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; найдем алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5;$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0;$ $\quad A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22;$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1;$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -17;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -26;$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1;$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20;$

• считаем определитель: $\det A = 3\cdot A_{11} + 4A_{12} + 4\cdot A_{13} = 3\cdot 5 + 4\cdot 22 - 4\cdot 26 = -1;$

тогда $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 22 & -1 & -17 \\ -26 & 1 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -22 & 1 & 17 \\ 26 & -1 & -20 \end{pmatrix}$

• проверка:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -22 & 1 & 17 \\ 26 & -1 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 5 - 4\cdot 22 + 4\cdot 26 & 4-4 & 3\cdot 4 + 4\cdot 17 - 4\cdot 20 \\ 2\cdot 5 - 4\cdot 22 + 3\cdot 26 & 4-3 & -2\cdot 4 + 4\cdot 17 - 3\cdot 20 \\ 4\cdot 5 - 5\cdot 22 + 5\cdot 26 & 5-5 & 4\cdot 4 + 5\cdot 17 - 5\cdot 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ → сходится.

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2; \end{cases}$

• составим расширенную матрицу системы и приведем ее к диагональн. виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 & -5 & +3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

→ 3 уравнения; 5 неизвестных ⇒ 2 из них нужно задать;

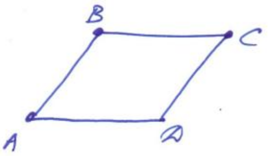
пусть $x_4 = a;$ $x_5 = b;$ тогда $x_3 = \frac{1}{8}(9 + 4a - 5b);$

тогда $x_2 = 2 - x_3 = \frac{1}{8}(7 - 4a + 5b);$ тогда

$x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = \frac{1}{8}(14 - 8a + 5b) - \frac{1}{8}(9 + 4a - 5b) + a - b =$

$= \frac{5}{8} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b.$ $\quad a, b$ → произвольные константы.

⑤ $A(5;-2;4)$; $B(-5;-8;-1)$; $C(-2;4;3)$ D – ? α – ?



• составим ур-ия прямых AB и DC, сравним их и найдем т. D :

$$AB: \quad \frac{x+5}{5+5} = \frac{y+8}{-2+8} = \frac{z+1}{4+1};$$

$$\boxed{\frac{x+5}{10} = \frac{y+8}{6} = \frac{z+1}{5}} \Rightarrow$$

$$DC: \quad \frac{x-x_D}{10} = \frac{y-y_D}{6} = \frac{z-z_D}{5};$$

подставляя вместо x, y, z координаты т. C, имеем:

$$\frac{-2-x_D}{10} = \frac{4-y_D}{6} = \frac{3-z_D}{5} = -t; \Rightarrow \begin{cases} x_D = 10t-2; \\ y_D = 6t+4; \\ z_D = 5t+3; \end{cases}$$

• длина стороны BC :

$$BC^2 = (-5+2)^2 + (-8+4)^2 + (-1+3)^2 =$$

$$= 3^2 + 4^2 + 2^2 = 29;$$

• длина стороны AD должна равняться длине BC :

$$AD^2 = BC^2 = (-2-x_D)^2 + (4-y_D)^2 + (3-z_D)^2 =$$

$$= (10t)^2 + (6t)^2 + (5t)^2 = 161t^2 = 29;$$

тогда $t = \sqrt{\frac{29}{161}}$; тогда $\begin{cases} x_D = 10\sqrt{\frac{29}{161}} - 2; \\ y_D = 6\sqrt{\frac{29}{161}} + 4; \\ z_D = 5\sqrt{\frac{29}{161}} + 3; \end{cases}$

• найдем угол:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos\alpha;$$

$$\vec{AB} = (-10; -6; -5); \quad \vec{BC} = (3; 12; 4);$$

$$AB = \sqrt{10^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{161}; \quad BC = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -(10 \cdot 3 + 6 \cdot 12 + 5 \cdot 4) = -122; \quad \text{тогда} \quad \cos\alpha = \frac{-122}{13\sqrt{161}} \approx -0{,}7396;$$

$$\alpha = \arccos(-0{,}7396) \approx 137{,}7^\circ;$$

тогда острый угол:

$$\beta = 180 - \alpha = 180^\circ - 137{,}7^\circ = 42{,}3^\circ$$

(7.) $M(-3;-5;-4)$; $\quad d: \; -3x+2y+z-4=0$;

• нормаль к плоскости: $\vec{n} = \pm(-3;2;1)$

• направляющий вектор прямой, проходящей через начало координат и т. M: $\vec{m} = (+3;+5;+4)$

• Косинус угла между векторами $\vec{n}$ и $\vec{m}$:

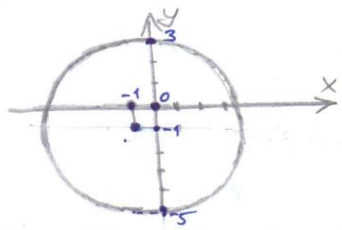
$$\cos\beta = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{m\cdot n} = \frac{-3\cdot 3+2\cdot 5+1\cdot 4}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2+4^2}} \approx 0,189;$$

$\beta = \arccos 0,189 = 79,1^\circ$

• расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $ax+by+cz+d=0$;

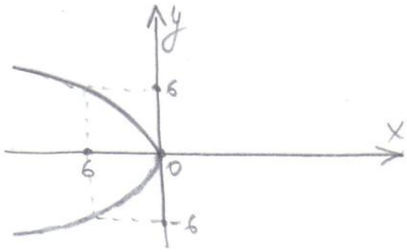
$$\rho = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-3\cdot(-3)+2\cdot(-5)-4-4|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}.$$

(8.) $(x+1)^2+(y+1)^2=16$ $\rightarrow$ ур-ие окружности с радиусом $R=4$ и центром $(-1;-1)$



$y^2=-6x$; $\quad y=\pm\sqrt{-6x}$ $\rightarrow$ две ветви параболы при $x<0$

$x=-6$; $y=\pm 6$



$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$; $\rightarrow$ эллипс с полуосями

$a=\sqrt{25}=5$ (по оси x);

$b=\sqrt{36}=6$ (по оси y);

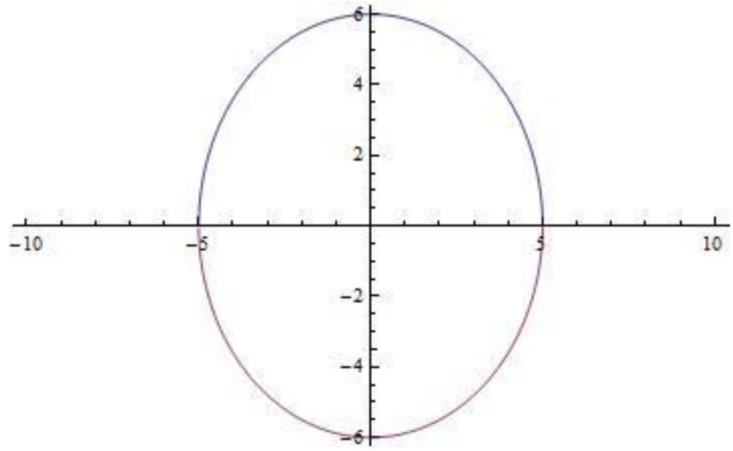
рисунок на следующ. странице

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$;

$\rightarrow$ гипербола

рисунок на след. странице;

Эллипс:



Гипербола: