

Образец решения контрольной работы по теме  
«Функции нескольких переменных».

Дано: функция  $z = \frac{2x^2 - 2y + 1}{y^2}$ , точки  $A(1;1)$ ,  $B(0,95;0,9)$ ,  $C(3;5)$ .

$$z = z(x, y), \quad z = \frac{2x^2 - 2y + 1}{y^2}.$$

1. Найдите и постройте область определения функции

Область определения  $y \neq 0$ , т.к. на ноль делить нельзя. Т.о. функция определена во всей плоскости  $R^2$ , кроме прямой  $y = 0$  (кроме оси  $OX$ ).

2. Найдите все первые и вторые частные производные функции.

$$z'_x = \left( \frac{2x^2 - 2y + 1}{y^2} \right)'_x = \frac{1}{y^2} \cdot (2x^2 - 2y + 1)'_x = \frac{4x}{y^2};$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left( \frac{2x^2 - 2y + 1}{y^2} \right)'_y = \frac{(2x^2 - 2y + 1)'_y (y^2) - (y^2)'_y (2x^2 - 2y + 1)}{y^4} = \\ &= \frac{-2y^2 - 2y(2x^2 - 2y + 1)}{y^4} = \frac{-2y(y + 2x^2 - 2y + 1)}{y^4} = \frac{-2(2x^2 - y + 1)}{y^3}; \end{aligned}$$

$$z''_{xx} = \left( \frac{4x}{y^2} \right)'_x = \frac{4}{y^2};$$

$$z''_{yy} = -2 \left( \frac{2x^2 - y + 1}{y^3} \right)'_y = -2 \frac{-1 \cdot y^3 - 3y^2(2x^2 - y + 1)}{y^6} = 2 \frac{y^2(y + 2x^2 - y + 1)}{y^6} = 2 \frac{2x^2 + 1}{y^4};$$

$$z''_{xy} = \left( \frac{4x}{y^2} \right)'_y = 4x(y^{-2})'_y = 4x \cdot \frac{-2}{y^3} = \frac{-8x}{y^3};$$

$$z''_{yx} = \frac{-2}{y^3} (2x^2 - y + 1)'_x = \frac{-8x}{y^3}.$$

3. Вычислить  $z'_x(A); z'_y(A)$

$$z'_x(A) = \frac{4x}{y^2}(1;1) = \frac{4 \cdot 1}{1^2} = 4$$

$$z'_y(A) = \frac{-2(2x^2 - y + 1)}{y^3}(1;1) = \frac{-2(2 - 1 + 1)}{1^3} = -4$$

4. С помощью полного дифференциала найти приближённое значение функции в точке  $B(0,95;0,9)$ . Используем формулу приближенных вычислений:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0) \Delta x + z'_y(x_0, y_0) \Delta y.$$

$$x = 0,95 = 1 - 0,05, \text{ т.е. } x_0 = 1, \Delta x = - 0,05$$

$$y = 0,9 = 1 - 0,1, \text{ т.е. } y_0 = 1, \Delta y = - 0,1.$$

$$z(x_0, y_0) = z(1, 1) = z(A) = \frac{2 - 2 + 1}{1} = 1$$

$$z'_x(1, 1) = z'_x(A) = 4$$

$$z'_y(1, 1) = z'_y(A) = - 4$$

Итак,

$$z(B) \approx 1 + 4 \cdot (- 0,05) - 4(- 0,1) = 1 - 0,2 + 0,4 = 1,2.$$

$$\text{Ответ : } z(B) \approx 1,2.$$

5. Исследуйте функцию на локальный экстремум. Для нахождения локального экстремума сначала нужно найти все частные производные 1го порядка и

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

приравнять их к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = \frac{4x}{y^2} = 0 \\ z'_y = \frac{- 2(2x^2 - y + 1)}{y^3} = 0 \end{cases}$$

Или:

$$\frac{- 2}{y^3}(- y + 1) = 0; \quad y = 1$$

Из 1го уравнения  $x=0$ . Подставляем во 2-е:

Получили решение системы – точку Д(0, 1). В этой точке может быть экстремум функции. Теперь нужно составить определитель  $\Delta$  из частных производных второго порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}$$

И подставить координаты точки Д:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{4}{y^2} & \frac{- 8x}{y^3} \\ \frac{- 8x}{y^3} & \frac{2(2x^2 - y + 1)}{y^4} \end{vmatrix}_D = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 0 = 8$$

Вывод делается так:

1) если  $\Delta > 0$ , то экстремум есть, именно, это точка минимума, если в  $\Delta$  на главной диагонали стоят положительные числа, точка максимума, если на главной диагонали – отрицательные числа.

2) если  $\Delta < 0$ , экстремума нет.

3) если  $\Delta = 0$ , вывод сделать нельзя.

В нашем случае:  $\Delta = 8 > 0$ , на главной диагонали – положительные числа, значит

$$(\bullet) D - \text{точка минимума} \quad z(D) = z(0,1) = \frac{0 - 2 + 1}{1} = -1$$

Ответ: функция достигает минимума в  $(\bullet) D(0,1); z_{\min} = -1$

$$\overrightarrow{AC} = (C - A) = \{3 - 1; 5 - 1\} = \{2; 4\}$$

Длина:  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \left\{ \frac{2}{2\sqrt{5}}; \frac{4}{2\sqrt{5}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Частные производные были вычислены в пунктах 2; 3.

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{AC}} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}} < 0 \Rightarrow \text{в направлении } \overrightarrow{AC} \text{ функция убывает}$$

7. Найдите вектор градиент функции в точке А и производную функции в этом направлении.

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = \{z'_x, z'_y\} (A) = \{4; -4\}.$$

Градиент – это вектор, координатами которого служат частные производные.

Используем формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{\text{grad}} z} = |\overrightarrow{\text{grad}} z| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

8. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = z(x, y) \text{ в } (\bullet) A$$

Используем формулы:

Касательной плоскости:

$$z - z_0 = z'_x(A)(x - x_0) + z'_y(A)(y - y_0)$$

и нормали:

$$\frac{z - z_0}{-1} = \frac{x - x_0}{z'_x(A)} = \frac{y - y_0}{z'_y(A)}$$

Имеем:

$$z_0 = z(A) = 1$$

$$z'_x(A) = 4$$

$$z'_y(A) = -4$$

Касательная плоскость:

$$z - 1 = 4(x - 1) - 4(y - 1)$$

$$z - 1 = 4x - 4 - 4y + 4$$

$$z = 4x - 4y + 1.$$

Нормаль:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{-1}.$$