$\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I), если:

I) $\alpha=(-11,5)$, $\beta=(-1,3)$; 2) $\alpha=(6,-4)$, $\beta=(1,2)$.

3. Выясните, образует ли подмножество $\mathcal{M}$, $K\supset\mathcal{M}=\{(a,b),\ a,b\in 2\mathbb{Z}\}$ идеал кольца $\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I). Будут ли сравнимыми по идеалу $\mathcal{M}$ элементы α и β, если:

I) $\alpha=(-15,8)$, $\beta=(3,4)$; 2) $\alpha=(-1,-3)$, $\beta=(2,3)$.

Постройте пример пары элементов кольца $\mathcal{K}$, сравнимых по идеалу $\mathcal{M}$.

4. Постройте фактор-кольцо кольца $\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I) по идеалу $\mathcal{M}$ (см.№3). Составьте таблицы сложения и умножения элементов фактор-кольца. Пользуясь таблицами, укажите для всех элементов фактор-кольца противоположные элементы. Найдите делители нуля и обратимые элементы в фактор-кольце.

5. Даны два кольца $\mathcal{K}_1=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I) и $\mathcal{K}_2=\langle \mathbb{Z},+,\cdot\rangle$. Для произвольного элемента $\alpha=(a,b)\in K$ положим $\alpha\varphi=b$. Выясните, будет ли соответствие φ гомоморфизмом кольца $\mathcal{K}_1$ в кольцо $\mathcal{K}_2$.

XVI. I. Докажите, что алгебра $\langle K,\oplus,\odot\rangle$, где

$$K=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{Z}\right\},$$

$\oplus,\odot$ – обычные операции над матрицами, является кольцом. Выясните, будет ли это кольцо областью целостности, имеет ли оно единичный элемент. Найдите группу обратимых элементов кольца.

2. Узнайте, делится ли элемент α на элемент β в кольце $\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I), если:

I) $\alpha=\begin{pmatrix}11&-14\\-14&11\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&2\end{pmatrix}$; 2) $\alpha=\begin{pmatrix}-6&2\\2&-6\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

3. Выясните, образует ли множество $\mathcal{M}$

$$K\supset\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix},\ a,b\in 3\mathbb{Z}\right\}$$

идеал кольца $\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I). Будут ли сравнимыми по идеалу элементы α и β, если:

I) $\alpha=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&5\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}-4&1\\1&-4\end{pmatrix}$; 2) $\alpha=\begin{pmatrix}1&-3\\-3&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}2&-5\\-5&2\end{pmatrix}$.

Постройте пример пары элементов кольца, несравнимых по идеалу $\mathcal{M}$.

4. Постройте фактор-кольцо кольца $\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I) по идеалу $\mathcal{M}$ (см.№3). Составьте таблицы сложения и умножения элементов фактор-кольца. Пользуясь таблицами, укажите для каждого

элемента противоположный элемент, найдите делители нуля и группу обратимых элементов фактор-кольца.

5. Даны два кольца $\mathcal{K}_1=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I) и $\mathcal{K}_2=\langle \mathbb{Z},+,\cdot\rangle$. Для произвольного элемента $\alpha=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\in K$ положим $\alpha\varphi=a+b$.

Выясните, будет ли соответствие φ гомоморфизмом кольца $\mathcal{K}_1$ в кольцо $\mathcal{K}_2$. Определите вид гомоморфизма, найдите ядро гомоморфизма.

XVII. I. Докажите, что алгебра $\langle K,\oplus,\odot\rangle$, где

$$K=\left\{\begin{pmatrix}a&-2b\\b&a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{Z}\right\},$$

$\oplus,\odot$ – обычные операции над матрицами, является кольцом. Выясните, будет ли это кольцо областью целостности, имеет ли оно единичный элемент. Найдите группу обратимых элементов кольца.

2. Узнайте, делится ли элемент α на элемент β в кольце $\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I), если:

I) $\alpha=\begin{pmatrix}7&4\\-2&7\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$; 2) $\alpha=\begin{pmatrix}14&-2\\1&14\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}2&6\\-3&2\end{pmatrix}$.

3. Выясните, образует ли множество $\mathcal{M}$,

$$K\supset\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}a&-2b\\b&a\end{pmatrix},\ a,b\in 3\mathbb{Z}\right\}$$

идеал кольца $\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I). Будут ли сравнимыми по этому идеалу элементы α и β, если:

I) $\alpha=\begin{pmatrix}8&-4\\2&8\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$; 2) $\alpha=\begin{pmatrix}5&4\\-2&5\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&-1\end{pmatrix}$.

Постройте пример пары элементов данного кольца, сравнимых по идеалу $\mathcal{M}$.

4. Постройте фактор-кольцо кольца $\mathcal{K}=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I) по идеалу $\mathcal{M}$ (см.№3). Составьте таблицы сложения и умножения элементов фактор-кольца. Пользуясь таблицами, укажите для каждого элемента фактор-кольца противоположный элемент. Найдите делители нуля и обратимые элементы фактор-кольца.

5. Даны два кольца $\mathcal{K}_1=\langle K,\oplus,\odot\rangle$ (см.№I) и $\mathcal{K}_2=\langle\{a+b\sqrt{2}i;\ a,b\in\mathbb{Z}\},+,\cdot\rangle$. Для произвольного элемента $\alpha=\begin{pmatrix}a&-2b\\b&a\end{pmatrix}\in K$ положим $\alpha\varphi=a+b\sqrt{2}i$.

Выясните, будет ли соответствие φ гомоморфизмом кольца $\mathcal{K}_1$ в кольцо $\mathcal{K}_2$. Определите вид гомоморфизма, найдите ядро гомоморфизма.

XVIII. I. Докажите, что алгебра $\langle K,\oplus,\odot\rangle$, где

$$K=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{Q}\right\},$$