ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ "КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ" 2 КУРС, 3 СЕМЕСТР (БМТ-1,2)

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Каждая задача оценивается в 2 балла.

ВАРИАНТ 1.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x/2}^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x/2}^{2/x} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = 9x$, $x = y$, $x + y = 2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $z = x^2 + y^2 + 1$ /внутри параболоида/.

Задача 4. Вычислить линейный интеграл $\int\limits_L (x^2 + y^2 - 2Rx)dx + R(x + y)dy$ вдоль дуги окружности $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(R, R)$.

Задача 5. Вычислить $\oint x^3dy - y^3dx$, взятый вдоль окружности $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ в положительном направлении. Преобразовать интеграл в двойной и убедиться в равенстве этих интегралов, вычислив тот и другой.

ВАРИАНТ 2.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 - 4y^2$, $z = 0$, $x = 4$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 - z^2 = 9$, $z = 0$, $z = 4$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_L yzdx + z\sqrt{9 - y^2}dy + xyzdz$ вдоль дуги L винтовой линии $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{2}{\pi}t$ от точки A пересечения кривой с плоскостью XOY до точки B ее пересечения с плоскостью $z = 4$.

Задача 5. Вычислить $\oint x^3dy - y^3dx$, взятый вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ в положительном направлении. Преобразовать в двойной; убедиться в равенстве этих интегралов, вычислив тот и другой.

ВАРИАНТ 3.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = 4x$; $z^2 = 4 - 4x$; $y = 0$; $x + y = 2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; $z = 0$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(-1,4)}^{(1,1)} \dfrac{dx + dy}{(x + y - 1)^2}.$

Задача 5. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где C – пробегаемый в положительном направлении контур, составленный из отрезка прямой от точки $A(3, 0)$ до точки $B(1, 2)$, параболой $y = 2x^2$ от точки $B(1, 2)$ до точки $O(0, 0)$ и отрезка оси OX от точки $O(0, 0)$ до точки A. Проверить результат с помощью криволинейного интеграла.

ВАРИАНТ 4.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 = 4y$; $y + z = 4$; $y + 2z = 4$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$; $x + y + z = 4$.

Задача 4. Вычислить площадь части цилиндра $(y-2)^2 + z^2 = 1$, лежащей внутри гиперболоида: $x^2 - y^2 + z^2 = -1$.

Задача 5. Вычислить $\int\limits_{(0,0)}^{(0,4)} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$ вдоль параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,2)$ и далее по дуге окружности $x^2 + y^2 - 4y = 0$ от точки $A(2,2)$ до точки $B(0,4)$.

Задача 6. Вычислить $\oint xdy - ydx$ по контуру, образованному осью OX и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 5.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $y = x^2$; $y = 1$; $z = 0$.

Задача 3. Вычислить объемы частей шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, на которые он делится плоскостью $z = 1$.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_L xdy - ydx$ вдоль первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ от точки $A(2\pi a, 0)$ до точки $O(0,0)$ и далее вдоль прямой от точки $O(0,0)$ до точки $B(-\pi a, 2\pi a)$.

Задача 5. $\oint\limits_C (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$ по контуру, образованному параболой $y = 3(x-1)^2$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(3,12)$, отрезком прямой от точки B до точки $O(0,0)$ и отрезком оси OX от точки O до точки A. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 6.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2}^{3+2x} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - y^2$; $x = 0$; $z = x$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $z = 0$; $x + y + z = 4$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(-1;-3)}^{(3,1)} \dfrac{dx - dy}{(x-y-1)^2}.$

Задача 5. Вычислить $\oint (x+y)dx - (x-y)dy$ вдоль окружности $x^2 + (y-R)^2 = R^2$ в положительном направлении, преобразовать в двойной. Убедиться в равенстве этих интегралов, вычислив тот и другой.

ВАРИАНТ 7.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 1 - x^2$; $z = 1 - y^2$; $z = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z = \sqrt{7}$, $z = 2\sqrt{3}$.

Задача 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(1;1)}^{(5;5)} ye^{-x}dx + (10 - e^{-x})dy$ по формуле Ньютона-Лейбница, отыскав предварительно функцию по её полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5. Вычислить $\oint a^2xdy - b^2ydx$, взятый вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 8.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2/x}^{2x} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4xy$; $z = 0$; $y = 2$; $x + y = 4$, $y > 2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 8 - y^2$; $z = 2x^2 + y^2$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(-1,-1)}^{(0,1)} \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ по двум путям:

а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева;

б)произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_C e^x xydx - e^y(x + y)dy$, взятый вдоль контура квадрата с вершинами в точках $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(-2,0)$, $D(0,-2)$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 9.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = y$, $z^2 = 4 - y$, $x + y = 4$, $x = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ /вне цилиндра/.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_{(0,1)}^{(4,0)} (y^2 + 2)dx + yxdy$ вдоль параболы $y^2 = -\dfrac{1}{2}(x - 2)$ $(y \geq 0)$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(2,0)$ и далее по верхней части окружности $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ до точки $C(4,0)$.

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_C xydx + (x + y)dy$ по контуру, образованному верхней частью астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $(y > 0)$ и отрезком оси OX, проходимому в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 10.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1+\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2-z^2=4$; $x^2+y^2=9$.

Задача 3. Вычислить объем тела ограниченного поверхностями: $z=4-x^2$; $y=0$; $z=y$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(1,3)}^{(5,1)} \frac{dx+dy}{(\frac{x}{2}+y-2)^2}$ вдоль ломаной, отрезки которой параллельны координатным осям.

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_C (x-y)dx+xydy$ вдоль контура, образованного верхней частью астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ и нижней частью окружности $x^2+y^2=a^2$ в положительном направлении с помощью криволинейного интеграла.

ВАРИАНТ 11.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-8/3}^{0} dy \int\limits_{-2(y+1)}^{\sqrt{4+y^2}} f(x,y)dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2=4y$; $x=y$; $x+y=2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=6$; $z=x^2+y^2$ /внутри параболоида/.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(2,2)}^{(1,5)} \left(\frac{y^2-1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dy.$

Задача 5. Вычислить $\oint\_C(-x^2ydx+xy^2dy)$, где C – окружность $(x-1)^2+y^2=1$, пробегаемая против хода часовой стрелки. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 12.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4x-x^2}}^{0} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2$; $z=1-y^2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y=0$; $z=0$; $x+y+z=4$; $2x+z=4$.

Задача 4. Отыскав предварительно функцию по её полному дифференциалу, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(2,3)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{2+x^2+y^2}}$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Задача 5. Вычислить $\oint (x^2+2y)dx-xydy$, взятый вдоль эллипса $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 13.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{y+1}} dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = y$; $y = x^2$; $z = 2 - y$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + (y-2)^2 = 4$; $z = 0$; $z = 6 - x$.

Задача 4. Вычислить площадь части цилиндра $z^2 + x^2 = 1$, расположен внутри гиперболоида: $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$.

Задача 5. Вычислить $\int\limits_{(-2,0)}^{(6,4)} (x^2 + 2y)dx - xydy$ вдоль нижней части окружности $(y \le 0)$ $x^2 + y^2 = 4$ от точки $A(-2,0)$ до точки $B(2,0)$ и далее по прямой от точки $B(2,0)$ до точки $C(6,4)$.

Задача 6. С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами: $I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$ и $I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$, где AmB – отрезок прямой между точками $A(0,0)$ и $B(1,1)$, AnB – дуга параболы $y = x^2$.

ВАРИАНТ 14.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-y^2/2}^{1-y^2} f(x,y)dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 0$; $y = 1$; $y = 2x$; $y = 6 - x$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = x^2 + y^2$; $2z^2 = x^2 + y^2 + 1$.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_{(a,0)}^{(-a,0)} xdx + (x+y)dy$ вдоль астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ от точки $A(a,0)$ до точки $B(0,a)$ и далее по прямой от точки $B(0,a)$ до точки $C(-a,0)$.

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_{C} \sqrt{1+x^2+y^2}dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})]dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

ВАРИАНТ 15.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 2 - x^2$; $z = x$; $y = x$; $y = 2x$, $(x \ge 0, y \ge 0)$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$; $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(-1,-1)}^{(3,2)} \frac{dx - 2dy}{(x - 2y + 2)^2}.$

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_{C} y^2dx - x^2dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x + y = -1$, $x = 0$, $y = 0$ в положительном направлении. Проверить по формуле Грина.

ВАРИАНТ 16.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2-\sqrt{8-(x-2)^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = y^2$; $z = 4$; $y = 3 - x$; $x = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (вне цилиндра).

Задача 4. Вычислить $\int\limits_L 3x^2ydx + y^2dy$ вдоль дуги кривой $y = (1-x)\sqrt{x}$ между точками O и A её пересечения с осью OX и далее по нижней части окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ $(y < 0)$ до точки $B(3,0)$.

Задача 5. Пользуясь формулой Грина, вычислить $\oint\limits_C (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - 1)dy$ по контуру, состоящему из верхней полуокружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ и отрезка оси OX.

ВАРИАНТ 17.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 2x^2 + 2y^2$; $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 0$; $y = 2 + 2x$; $y = x/2 - 1$; $x + y = 2$; $z = 1 + y^2$.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ вдоль четверти эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(y \geq 0)$ от точки $A(a,0)$ до точки $B(0,b)$ и далее вдоль прямой до точки $C(-2a,0)$.

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_L x^2dx + xydy$, взятый вдоль контура, образованного прямыми $x - y = 1$, $2y - x = 1$, $x + y = -1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 18.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}-2} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = x^2 + 2y^2$; $y = x$; $y = 2x$; $x = 1$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 10 - x^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 9$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(2,1)}^{(4,3)} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)dy.$

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_C xdx + (x+y)dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 2x$. Проверить результат по формуле Грина.

ВАРИАНТ 19.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-4}^{-2} dx \int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}} f(x,y)dy + \int_{-2}^{\sqrt{8}} dx \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy.$$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2+2y^2=8$; $y=x-2$; $y=-x-2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=0$; $z=4-x^2-y^2$; $z=2(4-x^2-y^2)$; $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$; $y=\sqrt{3x}$; $(x\geq 0)$; $(y\geq 0)$.

Задача 4. Вычислить: $\displaystyle\int_{(3,2)}^{(5,4)} \frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Задача 5. Используя формулу Грина, вычислить $\displaystyle\oint_L x^2ydx+xy^2dy$ вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ в положительном направлении. Проверить результат, вычисляя интеграл непосредственно.

ВАРИАНТ 20.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x-1}^{(x+1)/2} f(x,y)dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+2y^2$; $z=8-x^2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=\dfrac{2}{y}$; $x+y+z=3$; $z+y-2x=3$.

Задача 4. Вычислить: $\displaystyle\int_{(-1,-1)}^{(1,1)} \frac{dx-dy}{(x-y-1)^2}$.

Задача 5. Вычислить $\displaystyle\oint (x-y^2)dx+2xydy$ вдоль окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью двойного интеграла.

ВАРИАНТ 21.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\displaystyle\int_{-2}^{0} dx \int_{-x-2}^{\sqrt{-x}} f(x,y)dy + \int_0^2 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=4-x^2-y^2$; $z=4-2y$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=4-y^2$; $z=0$, $y=2-x^2$.

Задача 4. Вычислить: $\displaystyle\int_{(-1,0)}^{(1,2)} \frac{3x^2dx}{\sqrt{y-x^3}}-\frac{dy}{\sqrt{y-x^3}}$.

Задача 5. Доказать, что интеграл $\displaystyle\int_L (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ не зависит от пути интегрирования. Найти значение интеграла, интегрируя сначала по ломаной AOB от точки $A(-a,\sqrt{2}b)$ до точки $B(a,\sqrt{2}b)$, а затем по прямой, соединяющей эти точки.

ВАРИАНТ 22.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-2+\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - x^2$; $y + z = 4$; $z = 0$; $y = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 6$; $z = 10 - x^2 - y^2$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(-1,-1)}^{(1,1)} \dfrac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$ по двум путям:

а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева;
б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 5. Вычислить $\oint 2ydx + xydy$ вдоль контура, образованного прямыми $x + y = 3$, $x = 1$, $y = 1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 23.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{(0)}^{(8/3)} dx \int\limits_{2x-2}^{\sqrt{4+x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 8 - x^2$; $z = 3y$; $z = 8 - y$; $y = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 5 - x^2 - y^2$; $z = 1$.

Задача 4. Отыскав предварительно с помощью криволинейного интеграла функцию по её полному дифференциалу, вычислить: $\int\limits_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} (y\cos xy)dx + x\cos(xy)dy.$

Задача 5. Используя формулу Грина, вычислить

$$\oint \frac{3x - y^3\sqrt{1+x^2+4y^3}dx + (18y^2 + x^3\sqrt{1+x^2+4y^3})dy}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}$$

вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$.

ВАРИАНТ 24.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y-1}^{(y+1)/2} f(x,y)\,dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $4z = x^2$; $y = 0$; $y + z = 4$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 1$; $z = 4$.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_L (y+x)dx + (y-x)dy$ вдоль верхней части эллипса $\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ $(y \geq 0)$ от точки $A(6,0)$ до точки $B(2,0)$ и далее по прямой до точки $C(0,2)$.

Задача 5. Вычислить $\oint \dfrac{y}{x}dx + x^2dy$ вдоль контура, образованного кривой $y = \ln x$, участком оси OX и прямой $x = e$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью двойного интеграла.

ВАРИАНТ 25.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-x}}^{2-x} f(x,y)dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y+z=2$; $z=0$; $4z+2y+x=8$; $2z+x+y=4$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$;$z=2x$.

Задача 4. Вычислить: $\int\limits_{(1,2)}^{(4,5)} \dfrac{xdx-ydy}{\sqrt{y^2-x^2}}$.

Задача 5. Вычислить: $\oint\limits_{L} y^2dx+xydy$ вдоль окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ в положительном направлении.

ВАРИАНТ 26.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=\sqrt{4-x}$; $y^2=4-x$; $z=0$; $x=0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$; $z=4$; $y=1$, $(y>1)$.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_{L} xydy+ydx$ вдоль параболы $y=x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$ и далее по окружности $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2;2)$.

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_{C} y^2dx+xdy$ по контуру, образованному кривой $y=\sqrt{x-1}$, прямой $y=2$ и отрезками осей OX и OY, проходимому в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

ВАРИАНТ 27.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x+z=1$; $x=0$; $y=0$; $x+y=1$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+z^2=5a^2$; $x^2-y^2+z^2=4a^2$.

Задача 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(-4,3)}^{(4,0)} (x^3-3y)dx+(y^2-3x)dy$ по формуле Ньютона-Лейбница, предварительно отыскав функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5. Вычислить интеграл $\oint (x^2+y)dx-(y^2+x)dy$ вдоль контура, образованного верхней частью окружности $x^2+y^2=1$ и участком прямых $x-y=1$ и $x+y=-1$ в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

ВАРИАНТ 28.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{y+1}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = y^2$; $z = y$; $y = x$; $x = 1$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 9 - x^2 - y^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$ (вне цилиндра).

Задача 4. Вычислить $\int\limits_L (x+y)dx + (y-x)dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 4$ от точки $A(0;2)$ до точки $B(2;0)$, а далее по прямой, соединяющей точку $B(2;0)$ и точку $C(4;2)$.

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_C (2x-y)dx + (x-1)dy$ вдоль контура, образованного $y = 2x$, $y = \dfrac{2}{x}$, $x = 2$ в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

ВАРИАНТ 29.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{-2+\frac{1}{2}(x-2)^2}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = -y^2 + 2$; $z = y$; $y = x$; $x = 0$, $z = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = 4a^2$.

Задача 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(1;1)}^{(8;4)} \left(\sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) dx + \left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dy$ по формуле Ньютона-Лейбница, отыскав предварительно функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5. Вычислить $\oint\limits_C 2xdy - (x-y)dx$ вдоль контура, образованного линиями $y = x + 1$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.