Оглавление

Используемые обозначения

В данном пособии используются следующие обозначения для некоторых часто встречающихся множеств:

$\varnothing$ *– пустое множество;*

$\mathbf{N}$ *– множество натуральных чисел;*

$\mathbf{Z}$ *– множество целых чисел;*

$\mathbf{Q}$ *– множество рациональных чисел;*

$\mathbf{Q}^{-0}$ *– множество рациональных чисел, отличных от нуля;*

$\mathbf{Q}^{+}$ *– множество положительных рациональных чисел;*

$\mathbf{R}$ *– множество действительных чисел;*

$\mathbf{R}^{-0}$ *– множество действительных чисел, отличных от нуля;*

$\mathbf{R}^{+}$ *– множество положительных действительных чисел;*

$\mathbf{R}^{n}$ *– множество арифметических n-мерных векторов с действительными компонентами;*

$\mathbf{C}$ *– множество комплексных чисел;*

$\mathbf{C}^{-0}$ *– множество комплексных чисел, отличных от нуля;*

$\mathbf{C}_n = \{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \mid k = \overline{0, n-1}\} = \left\{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\right\}$ *– множество корней n-й степени из единицы;*

$U = \left\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\right\}$ *– множество комплексных чисел, модуль которых равен единице*;

$\mathbf{Z}/m$ *– множество классов вычетов по модулю m*;

$n\mathbf{Z} = \{nx \mid x \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ *– множество целочисленных кратных натурального числа n*;

$\mathbf{Z} + \mathbf{Z}i = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}, i^2 = -1\}$ *– множество целых гауссовых чисел*;

$\{a^z\} = \{x \mid x = a^z, a \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{Z}\}$ – *множество целочисленных степеней натурального числа* a;

S_n – *множество подстановок* n-*й степени (состоит из* n! *элементов);*

Элементы симметрической группы подстановок 3-й степени $S_3 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$:

$$a_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$M_n(K)$ – *множество квадратных матриц* n-*го порядка с коэффициентами из числового множества К, где К – кольцо или поле;*

$K_n = \left\{z \in \mathbf{C} \mid z^n \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{N}\right\}$ – *множество комплексных чисел,* n-*я степень которых является положительным действительным числом.*

ГЛАВА 1. Методические рекомендации по изучению раздела «Алгебраические структуры с одной бинарной операцией»

1.1. Множества, операции над множествами; отображения, виды отображений; бинарные отношения и их свойства

Под *множеством* понимают любую совокупность объектов, называемых *элементами* множества. Множества принято обозначать прописными буквами какого-либо алфавита, а его элементы – строчными буквами того же или другого алфавита.

Для некоторых особо важных множеств приняты *стандартные обозначения*. Так, буквами **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C** обозначают соответственно множество натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

<u>Основные способы задания множеств</u>

1. Множества с конечным числом элементов могут быть описаны путем *перечисления* всех их элементов; обычно эти элементы заключаются в фигурные скобки.

   <u>*Пример 1*</u>. $A = \{1, 2, 4, 8\}$. A – множество степеней двойки, заключенных между 1 и 10.

   Очевидно, что данный способ непригоден для задания множеств с бесконечным числом элементов.

2. Множество можно задать как подмножество какого-либо множества указанием *характеристического свойства* (свойств), присущего только элементам, входящим в состав данного множества.

   <u>*Пример 2*</u>. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2^k, k \in \mathbf{N}, k \in [0,3]\}$. A – множество степеней двойки, заключенных между 1 и 10.

<u>Операции над множествами</u>

1. <u>*Пересечение*</u>.

   П*ересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

   $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ } и \text{ } x \in B\}$.

2. <u>*Объединение*</u>.

   О*бъединением* множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

   $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ } или \text{ } x \in B\}$.

3. <u>*Разность*</u>.

Разностью множеств *A* и *B* называется множество, элементами которого являются элементы множества *A*, не принадлежащие множеству *B*, и только они.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

4. <u>*Декартово произведение*</u>.

Пусть *A* и *B* – произвольные непустые множества. Пару (a,b) элементов $a \in A,\ b \in B$, взятых в данном порядке, будем называть *упорядоченной парой*, считая при этом, что $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$. *Декартовым произведением* двух множеств *A* и *B* называется множество всех упорядоченных пар (a,b):

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Если $A = \varnothing$ или $B = \varnothing$, то $A \times B = \varnothing$.

<u>*Пример 3*</u>. Пусть $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 5\}$. Тогда:

$A \cap B = \{5\};\ A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\};\ A \setminus B = \{1,\ 2\};\ B \setminus A = \{3\}.$

$A \times B = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (5,5)\};$

$B \times A = \{(3,1), (3,2), (3,5), (5,1), (5,2), (5,5)\};$

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,5), (2,1), (2,2), (2,5), (5,1), (5,2), (5,5)\};$

$B \times B = \{(3,3), (3,5), (5,3), (5,5)\}.$

<u>Отображения</u>

Пусть заданы множества *A* и *B* . Говорят, что задано *отображение f* множества *A в* множество *B*, если указано правило, сопоставляющее *каждому* элементу $a \in A$ один вполне определенный элемент *b* множества *B*, называемый *образом* элемента *a* и обозначаемый $b = f(a)$.

Множество *A* называется *областью определения* отображения *f*, а множество *B* – *областью значений* этого отображения.

Символически отображение записывается в виде: $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$.

Образом множества *A* при отображении *f* называется множество $\{f(a) \mid a \in A\}$, которое обозначают $f(A)$. При этом $f(A) \subseteq B$.

Каждый элемент $a \in A$, по определению, имеет единственный образ $b \in f(A)$. Обратное выполнено не всегда.

Элемент $a \in A$ называется прообразом элемента *b*, если $f(a) = b$. Будем обозначать $a = f^{-1}(b)$.

<u>*Пример 4*</u>.

Зададим отображение $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ следующим образом: для $\forall x\in\mathbf{R}$ $f(x)=x^2$.

Очевидно, что $f(\mathbf{R})=\{b\in\mathbf{R}\mid b\ge 0\}$.

Для каждого элемента $b\in f(\mathbf{R})$ можно найти прообраз. Например, число 4 имеет два прообраза: 2 и –2, а число 0 – один – 0.

Виды отображений

Отображение $f:A\to B$ называется *сюръективным*, или *отображением на*, если $f(A)=B$. Другими словами, у каждого элемента $b\in B$ найдется хотя бы один прообраз в множестве *A*.

Отображение $f:A\to B$ называется *инъективным*, когда для любых $a_1,a_2\in A$ из $a_1\ne a_2$ следует $f(a_1)\ne f(a_2)$.

Из определения следует, что отображение будет инъективным, когда из условия $f(a_1)=f(a_2)$ верно, что $a_1=a_2$. На практике чаще всего именно так показывают инъективность отображения.

Отображение $f:A\to B$ называется *биективным*, или *взаимно-однозначным*, когда оно одновременно сюръективно и инъективно.

Пример 5.

Пусть заданы отображения $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$, $h:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, определенные одним и тем же правилом: для $\forall x\in\mathbf{R}$ $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^2$. Все они различны: *f* ни сюръективно, ни инъективно, *g* сюръективно, но не инъективно, а отображение *h* – биективно. Таким образом, задание области определения и области значений – существенная часть определения отображения.

Бинарные отношения

Для любых двух множеств *A* и *B* всякое подмножество $\rho\subset A\times B$ называется *бинарным отношением* между элементами множеств *A* и *B*. Если $\rho\subset A\times A$, то говорят, что ρ есть бинарное отношение на *A*.

Для упорядоченной пары $(a,b)\in\rho$ используют обозначение $a\rho b$ и говорят, что элементы *a* и *b* связаны отношением ρ.

Пример 6.

Пусть $A=\{1,2,5,7\}$, $B=\{-1,2,11\}$.

$A\times B=\{(1,-1),(1,2),(1,11),(2,-1),(2,2),(2,11),(5,-1),(5,2),(5,11),(7,-1),(7,2),(7,11)\}$

Бинарное отношение ρ – «быть меньше» – задает подмножество декартового произведения $A\times B$, а именно: $\{(1,2),(1,11),(2,11),(5,11),(7,11)\}$. Данным отношением связаны только те элементы $a \in A$ и $b \in B$, для которых верно неравенство $a < b$.

<u>*Пример 7*</u>.

Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Бинарное отношение $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in A$ и x делит $y\}$ совпадает со следующим множеством пар: $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

Свойства бинарных отношений

1. Бинарное отношение ρ, заданное на множестве *А*, является *рефлексивным*, если для любого $a \in A$ выполняется условие: $a\rho a$.
2. Бинарное отношение ρ, заданное на множестве *А*, является *симметричным*, если для любых $a, b \in A$ выполняется условие: из того, что $a\rho b$ следует, что $b\rho a$.
3. Бинарное отношение ρ, заданное на множестве *А*, является *транзитивным*, если для любых $a, b, c \in A$ выполняется условие: из того, что $a\rho b$ и $b\rho c$ следует, что $a\rho c$.

Бинарное отношение, заданное на множестве *А*, называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивное, симметричное и транзитивное.

<u>*Пример 8*</u>.

Бинарное отношение ρ, рассмотренное в примере 6, является рефлексивным и транзитивным, но не является симметричным. Поэтому оно не является отношением эквивалентности.

Говорят, что множество *М разбито на классы*, если в нем выделены подмножества, такие, что 1) подмножества не пусты, 2) не пересекаются, 3) в объединении дают все множество *М*.

Если на множестве *А* задано отношение эквивалентности ρ, то множество $K_a = \{b \in A \mid a\rho b\}$ всех элементов, связанных с элементом *а* отношением ρ, называется классом эквивалентности с представителем *а*.

Свойства классов эквивалентности

1. Классы не пусты.
2. Элементы одного класса находятся в данном отношении друг с другом.
3. Элементы, находящиеся в данном отношении, лежат в одном классе.
4. Различные классы не пересекаются.
5. Классы эквивалентности в объединении дают все множество.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Всякое отношение эквивалентности на множестве задает разбиение этого множества на классы.

Теорема 2. Всякое разбиение множества на классы задает на множестве отношение эквивалентности.

Фактормножеством множества M по отношению эквивалентности ρ называется множество, элементами которого являются классы эквивалентности.

Обозначение: $M/\rho = \{K_a, K_b, \ldots\}$.

1.2. Алгебраические бинарные операции и их свойства

Понятие алгебраической бинарной операции является одним из фундаментальных в современной алгебре.

Определение. *Алгебраической бинарной операцией*, заданной на непустом множестве M, называется отображение $M \times M \to M$.

То есть говорят, что на множестве M задана алгебраическая бинарная операция $*$, если указан закон, по которому любой упорядоченной паре a, b элементов из M ставится в соответствие единственный элемент c из того же множества M. Элемент c называется результатом операции. Обозначают: $c = a * b$.

В дальнейшем для краткости вместо слов алгебраическая бинарная операция будем говорить бинарная операция или операция.

Операции могут называться и обозначаться по-разному. Чаще всего рассматриваются операции «сложение», в этом случае c называется *суммой* элементов a и b и обозначается символом $c = a + b$; и «умножение», в этом случае c называется *произведением* элементов a и b и $c = a \cdot b$.

В определении операции содержится требование, чтобы результат операции c также принадлежал множеству M. Это требование носит название замкнутости. Также для упорядоченной пары элементов a и b результат операции c должен быть единственным. Это требование носит название однозначности.

Примеры бинарных операций

1. Операции сложения и умножения на **N**.
2. Операция сложения, вычитания и умножения на **Z**.
3. Операция деления на множествах $\mathbf{Q}^{-0}$ и $\mathbf{R}^{-0}$.
4. Умножение на множестве S_n подстановок n-й степени.
5. Сложение векторов n-мерного арифметического пространства.
6. Векторное умножение векторов трехмерного евклидова пространства.
7. Сложение и умножение квадратных матриц порядка n.
8. Сложение действительных функций действительного переменного.

Алгебраическими бинарными операциями не будут:

1. Операция вычитания на **N**.
2. Операция деления на множествах **N**, **Z**.
3. Операция деления на множествах **Q**, **R** (не является замкнутой, поскольку не определено деление на нуль).
4. Скалярное умножение векторов трехмерного евклидова пространства (результатом операции является число (скаляр), а не вектор).
5. Векторное умножение двумерных векторов евклидовой плоскости (результат операции – вектор – не принадлежит плоскости, в которой лежат векторы-сомножители).

Для бинарных операций могут выполняться следующие *свойства*:

1) Бинарная операция $*$, заданная на множестве *M*, *ассоциативна,* если для любых трех элементов $a,b,c \in M$ выполняется $a*(b*c)=(a*b)*c$.
2) Множество *M* может содержать элемент *e*, такой что для любого элемента $a \in M$ выполняется $a*e=e*a=a$.

Элемент *e* называют *нейтральным* элементом относительно операции $*$.

3) Для элемента $a \in M$ в множестве *M*, на котором определена операция $*$ с нейтральным элементом $e \in M$, может существовать элемент $\tilde{a} \in M$, такой, что $a*\tilde{a}=\tilde{a}*a=e$.

Элемент $\tilde{a}$ называют *нейтрализующим* для элемента *a*.

4) Бинарная операция $*$, заданная на множестве *M*, *коммутативна*, если для любых элементов $a,b \in M$ выполняется $a*b=b*a$.

Примеры.

1. Операция сложения на множестве **N** является ассоциативной и коммутативной, но не содержит нейтрального элемента.
2. Операция умножения на множестве **Z** является ассоциативной и коммутативной. Относительно этой операции множество **Z** имеет нейтральный элемент – число 1, у чисел ± 1 есть нейтрализующие, так как $1 \cdot 1=1$ и $-1 \cdot (-1)=1$. У других целых чисел нейтрализующих по этой операции нет.
3. Операция деления на множестве $\mathbf{Q}^{-0}$ не является ассоциативной, поскольку не для всех чисел a,b,c этого множества верно равенство $a:(b:c)=(a:b):c$. Например, $5:(2:3)\neq(5:2):3$. Эта операция не является также коммутативной.
4. Операция сложения на множестве **R** является ассоциативной и коммутативной. Относительно этой операции множество **R** имеет нейтральный элемент – число 0, у каждого действительного числа *a* есть нейтрализующее число, равное –*a*.

5. Операция умножения на множестве квадратных матриц n-го порядка ($n>1$) с комплексными коэффициентами $M_n(\mathbf{C})$ является ассоциативной, но не является коммутативной. Относительно этой операции множество $M_n(\mathbf{C})$ имеет нейтральный элемент – единичную матрицу. Не каждая матрица имеет нейтрализующую (их имеют только невырожденные матрицы).

1.3. Алгебраические структуры с одной бинарной операцией

<u>Определение 1</u>. *Алгебраическими структурами* называют множества, на которых определены операции и отношения.

Каждую алгебраическую структуру можно записать в виде: $<G, o, \omega>$, где G – множество, называемое носителем структуры, o – множество операций, заданных на G, ω – множество отношений, заданных на G.

Если $\omega = \varnothing$, то есть на структуре не заданы отношения, то алгебраическая структура называется *алгеброй*.

В данном пособии будут рассматриваться алгебры, на которых определена одна бинарная операция.

<u>Определение 2</u>. Непустое множество G с определенной на нем бинарной операцией $*$ называется *группоидом.*

Обозначается $<G,*>$.

<u>*Примеры группоидов*</u>.

1. $<\mathbf{N},+>$, $<\mathbf{Z},+>$, $<\mathbf{Q},+>$, $<\mathbf{R},+>$, $<\mathbf{C},+>$, $<\mathbf{R}^n,+>$, $<M_n(\mathbf{C}),+>$.
2. $<\mathbf{Z},->$, $<\mathbf{Q},->$, $<\mathbf{R},->$, $<\mathbf{C},->$.
3. $<\mathbf{N},\cdot>$, $<\mathbf{Z},\cdot>$, $<\mathbf{Q},\cdot>$, $<\mathbf{R},\cdot>$, $<\mathbf{C},\cdot>$, $<\mathbf{Q}^{-0},\cdot>$, $<\mathbf{R}^{-0},\cdot>$,$<\mathbf{C}^{-0},\cdot>$.
4. $<\mathbf{Q}^{-0},:>$, $<\mathbf{R}^{-0},:>$,$<\mathbf{C}^{-0},:>$.

<u>Определение 3</u>. Группоид $<G,*>$, в котором операция $*$ является ассоциативной, называется *полугруппой*.

<u>*Примеры полугрупп*</u>.

1. $<\mathbf{N},+>$, $<\mathbf{Z},+>$, $<\mathbf{Q},+>$, $<\mathbf{R},+>$, $<\mathbf{C},+>$, $<\mathbf{R}^n,+>$, $<M_n(\mathbf{C}),+>$.
2. $<\mathbf{N},\cdot>$, $<\mathbf{Z},\cdot>$, $<\mathbf{Q},\cdot>$, $<\mathbf{R},\cdot>$, $<\mathbf{C},\cdot>$, $<\mathbf{Q}^{-0},\cdot>$, $<\mathbf{R}^{-0},\cdot>$,$<\mathbf{C}^{-0},\cdot>$.

Полугруппами не будут числовые группоиды (примеры 2 и 4) с операциями вычитания и деления, потому что данные операции не являются ассоциативными.

Замечание. Поскольку в полугруппе выполняется ассоциативность, элемент $a*(b*c)=(a*b)*c$ можно записывать $a*b*c$.

Определение 4. Полугруппа с нейтральным элементом называется *моноидом*.

Примеры моноидов.

1. $<\mathbf{Z},+>$, $<\mathbf{Q},+>$, $<\mathbf{R},+>$, $<\mathbf{C},+>$, $<\mathbf{R}^n,+>$, $<M_n(\mathbf{C}),+>$.
2. $<\mathbf{N},\cdot>$, $<\mathbf{Z},\cdot>$, $<\mathbf{Q},\cdot>$, $<\mathbf{R},\cdot>$, $<\mathbf{C},\cdot>$, $<\mathbf{Q}^{-0},\cdot>$, $<\mathbf{R}^{-0},\cdot>$, $<\mathbf{C}^{-0},\cdot>$.

Определение 5. Моноид, в котором каждый элемент имеет нейтрализующий, называется *группой*.

Определение 6. Непустое множество G с определенной на нем бинарной операцией $*$ называется *группой*, если:

1. Операция $*$ ассоциативна;
2. В G существует нейтральный элемент;
3. Каждый элемент из G имеет нейтрализующий.

Примечание: Иногда алгебру $<G,*>$ обозначают сокращенно, используя при этом только значок, обозначающий множество G. Так поступают в случае, когда из контекста ясно, о какой операции идет речь, или если речь идет о какой-нибудь алгебраической бинарной операции и не важно, о какой именно.

Чаще всего будут рассматриваться группы относительно обычных операций «сложение» и «умножение». В нижеприведенной таблице указаны общепринятые названия для этих групп, а также названия и обозначения нейтральных и нейтрализующих элементов.

Таблица

Бинарная операция	**Название группы**	**Нейтральный элемент**		**Нейтрализующий элемент**	
		Название	*Обозначение*	*Название*	*Обозначение*
+ (Сложение)	Аддитивная	Нулевой элемент	0 или θ	Противоположный элемент	$-a$
. (Умножение)	Мультипликативная	Единичный элемент	1 или e	Обратный элемент	a^{-1}

Определение 7. Если операция $*$ коммутативна, то группа называется *абелевой*.

Определение 8. *Порядком группы G* называют мощность множества G.

Обозначение: $|G|$.

Определение 9. Если группа G состоит из конечного числа элементов, то она называется *конечной* группой. В данном случае *порядок группы* – число ее элементов. $|G| = n$, где n – натуральное число.

Если множество G бесконечное, то группа G *бесконечная* и $|G| = \infty$.

Другими словами, порядок конечной группы – это число ее элементов.

Примеры групп.

I. Числовые группы

1. *Аддитивные группы*

   $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $3\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}i$, $\{0\}$.

2. *Мультипликативные группы*

   $\mathbf{Q}^{-0}$, $\mathbf{R}^{-0}$, $\mathbf{C}^{-0}$, $\{x \mid x = a^t, a \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{Z}\}$, $\{\pm 1\}$.

   В данных примерах все группы, кроме $\{0\}$ и $\{\pm 1\}$, имеют бесконечный порядок. $|\{0\}| = 1$, $|\{\pm 1\}| = 2$.

II. Группы классов вычетов

Пусть $m \in \mathbf{N}$ – модуль, Z_0, Z_1, $Z_2, \ldots, Z_{m-1}$ – классы вычетов по модулю m. Рассмотрим множество, состоящее из классов вычетов $\mathbf{Z}/m = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_{m-1}\}$. На этом множестве определим операцию сложения классов следующим образом: $Z_n + Z_k = \begin{cases} Z_{n+k}, & \text{если } n+k < m, \\ Z_{n+k-m}, & \text{если } n+k \geq m. \end{cases}$. Легко показать, что $\mathbf{Z}/m$ – аддитивная группа классов вычетов. $< \mathbf{Z}/m, + >$. $|\mathbf{Z}/m| = m$.

Пример.

Пусть $m = 6$. Z_0, Z_1, $Z_2, \ldots, Z_5$ – классы вычетов по модулю 6.

Таблица сложения классов:

$+$	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
Z_0	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
Z_1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_0
Z_2	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_0	Z_1
Z_3	Z_3	Z_4	Z_5	Z_0	Z_1	Z_2
Z_4	Z_4	Z_5	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3
Z_5	Z_5	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4

$|Z/6| = 6$.

Введем операцию умножения классов следующим образом:
$$Z_n \cdot Z_k = \begin{cases} Z_{nk}, & \text{если } nk < m, \\ Z_{nk-mt}, & \text{если } nk \ge m, \text{ при этом } t \in N \text{ и } 0 \le nk - mt < m. \end{cases}$$

Рассмотрим классы вычетов Z_1, Z_5.

Построим для этих классов таблицу умножения:

$\cdot$	Z_1	Z_5
Z_1	Z_1	Z_5
Z_5	Z_5	Z_1

Операция умножения замкнута на данном множестве. Кроме того, непосредственная проверка показывает, что выполняется ассоциативность умножения; элемент Z_1 является единичным; обратным к Z_1 является Z_1, обратным к Z_5 является Z_5 (см. таблицу). Поэтому множество $\{Z_1, Z_5\}$ образует мультипликативную группу.

Можно доказать, что множество классов вычетов, взаимно простых с модулем, образует мультипликативную группу классов вычетов. Порядок этой группы равен $\varphi(m)$ ($\varphi(m)$ *– функция Эйлера, значением которой является количество натуральных чисел, не превышающих натурального числа* m *и взаимно простых с* m*)*.

III. Группы подстановок

S_n – мультипликативная группа подстановок n-й степени. Ее называют *симметрической* группой.

$|S_n| = n!$

A_n – мультипликативная группа четных подстановок n-й степени. Ее называют *знакопеременной* группой.

$|A_n| = \frac{n!}{2}$.

IV. Группы матриц

$< M_n(\mathbf{R}), + >$ – аддитивная группа матриц.

Мультипликативные группы образуют множества невырожденных квадратных матриц размерности $n \times n$ и диагональных матриц с элементами из некоторого поля.

V. Группы в геометрии

1. Группа всех перемещений плоскости (то есть преобразований, сохраняющих расстояния между точками) относительно операции «композиция перемещений».

2. Группа самосовмещений правильного многоугольника.

1.4. Основные свойства групп

Далее для удобства обозначений будем использовать мультипликативную запись, групповую операцию будем называть умножением. Иногда полученные результаты будем формулировать для операции сложения.

Пусть G – группа.

Свойство 1. Если e – единичный элемент группы G, то он единственный.

Доказательство.

Допустим, что существует e_1 – единичный элемент группы G, отличный от e.

Тогда, с одной стороны, $e \cdot e_1 = e_1$, так как e – единичный элемент группы G, с другой стороны, $e \cdot e_1 = e$, так как e_1 – единичный элемент группы G. Получили противоречие, поскольку операция в группе однозначна. Поэтому $e = e_1$.

Свойство 2. Если a^{-1} – элемент, обратный к элементу a в группе G, то он единственный.

Доказательство.

Допустим, что существует a_1^{-1} – элемент, обратный к элементу a, отличный от a^{-1}.

Тогда, с одной стороны, $a^{-1} \cdot a \cdot a_1^{-1} \underset{(ассоц.)}{=} \left(a^{-1} \cdot a\right)a_1^{-1} = e \cdot a_1^{-1} = a_1^{-1}$, так как a^{-1} – элемент, обратный к элементу a, с другой стороны,

$a^{-1} \cdot a \cdot a_1^{-1} \underset{(ассоц.)}{=} a^{-1} \cdot \left(a \cdot a_1^{-1}\right) = a^{-1} \cdot e = a^{-1}$, так как a_1^{-1} – элемент, обратный к элементу a. Получили противоречие, поскольку операция в группе однозначна. Поэтому $a^{-1} = a_1^{-1}$.

Свойство 3. В любой группе G однозначно определено произведение n элементов, взятых в определенном порядке.

То есть если дано произведение вида $\left(a_1\left(a_2a_3\right)\ldots\right)a_n$, где a_i – элемент группы G $\left(i = 1,2,\ldots,n\right)$, то оно не зависит от способа расстановки скобок и потому может обозначаться просто $a_1a_2\ldots a_n$.

Для доказательства достаточно воспользоваться ассоциативностью и методом математической индукции (по числу n).

Свойство 4. В любой группе G однозначно разрешимы уравнения $ax = b$, $yc = d$ для любых $a,b,c,d \in G$.

Доказательство.

Действительно, G – группа, поэтому существуют a^{-1} и c^{-1}. Значит, $x = a^{-1} \cdot b$, $y = dc^{-1}$.

Свойство 5. В любой группе G действуют законы сокращения, то есть для любых элементов $a, b, c \in G$, если $ab = ac$ (1) или $ba = ca$ (2), то $b = c$.

Доказательство.

Действительно, G – группа, поэтому существует a^{-1}. Умножим обе части равенства (1) слева или равенства (2) справа на a^{-1}. В силу ассоциативного закона, получим $b = c$.

Свойство 6. Для любых элементов $a, b \in G$ (G – группа) верно равенство $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Доказательство.

Действительно, $abb^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = a \cdot 1 \cdot a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = aa^{-1} = e$.

Аналогично, $b^{-1}a^{-1}ab = e$. Следовательно, элемент $b^{-1}a^{-1}$ является обратным к элементу ab, что и требовалось доказать.

1.5. Подгруппа группы

Определение. *Подгруппой H* называется непустое подмножество группы *G*, которое само образует группу по заданной операции.

Обозначение: $H \le G$, H – подгруппа *G*.

Пример 1.

Пусть $G = < C, + >$. Тогда, $Z \le G$, $Q \le G$, $C \le G$, $\{0\} \le G$.

Пример 2.

Пусть $G = < \mathbf{C}^{-0}, \cdot >$. Тогда, $\mathbf{Q}^{-0} \le G$, $\mathbf{R}^{-0} \le G$, $\mathbf{C}^{-0} \le G$, $\{1\} \le G$, $\{\pm 1\} \le G$.

Пример 3.

Множество диагональных матриц является подгруппой мультипликативной группы всех невырожденных матриц.

Пример 4.

Подгруппами любой группы *G* являются подгруппа *E*, состоящая из единичного элемента группы *G* (*единичная* подгруппа), и сама группа *G*. Эти подгруппы принято называть *тривиальными*.

Если $H \le G$ и $H \ne G$, то говорят, что *H* – *истинная подгруппа* в *G*. Пишут $H < G$.

Если $E < H < G$, то *H* называют *собственной* (или *нетривиальной*) подгруппой в *G*.

<u>Теорема 1</u>. (**Критерий подгруппы**). Непустое подмножество H группы G является подгруппой группы G ($H \le G$) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $\forall a,b \in H \;\; ab \in H$; 2) $\forall a \in H \quad a^{-1} \in H$.

Доказательство.

I. *Необходимость.* Пусть $H \le G$. Тогда, так как подмножество H образует группу, то H – непустое подмножество G и в H выполняются все условия группы, в том числе 1) и 2).

II. *Достаточность.* Пусть $H \ne \varnothing$, $H \subseteq G$ и выполняются условия 1) и 2). Покажем, что $H \le G$.

Действительно, поскольку выполняется 1), то групповая операция замкнута в H. Ассоциативность в H выполняется, поскольку выполняется в G. Так как для $\forall a,b \in H$ верно, что $ab \in H$ и $a^{-1} \in H$, то $aa^{-1} = e \in H$. Элемент, обратный к a, – $a^{-1} \in H$. Это следует из условия 2). Итак, H – группа, следовательно, $H \le G$.

<u>Теорема 2</u>. Если $H_1 \le G$ и $H_2 \le G$, то $H_1 \bigcap H_2 \le G$.

Доказательство.

Воспользуемся критерием подгруппы.

1) Пусть $a,b \in H_1 \bigcap H_2$. Тогда, $a,b \in H_1$ и $a,b \in H_2$. Т.к. $H_1 \le G$ и $H_2 \le G$, то $ab \in H_1$ и $ab \in H_2$. Следовательно, $ab \in H_1 \bigcap H_2$.
2) Пусть $a \in H_1 \bigcap H_2$. Тогда, $a \in H_1$ и $a \in H_2$. Т.к. $H_1 \le G$ и $H_2 \le G$, то $a^{-1} \in H_1$ и $a^{-1} \in H_2$. Следовательно, $a^{-1} \in H_1 \bigcap H_2$.

Замечание. Если дано не две, а вообще произвольное конечное множество подгрупп группы G, то произведение любых двух элементов из пересечения всех этих подгрупп лежит в каждой из них, а поэтому и в их пересечении. Это же верно и для обратных элементов. Следовательно, *пересечение любого конечного множества подгрупп группы G само является подгруппой этой группы.*

1.6. Порядок элемента группы

Пусть G – группа, a – произвольный элемент группы G.

<u>Определение 1</u>. Произведение n элементов группы G, равных a, называется n-й степенью элемента a и обозначается a^n (то есть $\underbrace{aa\ldots a}_{n} = a^n$). Полагают, что $a^0 = e$ и для $n < 0 \quad a^n = \left(a^{-n}\right)^{-1}$ или $a^n = \left(a^{-1}\right)^{-n}$, что, как легко видеть, одно и то же.

Замечание. Если G – аддитивная группа, то вместо степени a^n рассматривают целочисленные кратные элемента a: если $n>0$, то полагают $na=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n}$, при $n<0$ $na=\underbrace{(-a)+(-a)+\ldots+(-a)}_{-n}$ и при $n=0$ $0\cdot a=\theta$.

<u>Определение 2</u>. Число $m\in\mathbf{N}$ называется *порядком* элемента a, если выполняются следующие условия 1) $a^m=e$, 2) если существует $k\in\mathbf{N}$, $k\neq m$, что $a^k=e$, то $m<k$.

Обозначение: $|a|=m$.

Если такого показателя не существует, то говорят, что a имеет бесконечный порядок: $|a|=\infty$.

<u>Пример 1</u>.

Пусть $G=<\mathbf{C}^{-0},\cdot>$.

$|1|=1$, $|-1|=2$, $|i|=4$, $|-i|=4$, $|2|=\infty$.

<u>Определение 3</u>. Группы, в которых все элементы, кроме единичного, имеют бесконечный порядок, называются группами *без кручения*.

<u>Определение 4</u>. Группы, все элементы в которых имеют конечный порядок, называются *периодическими*.

<u>Определение 5</u>. Группы, в которых есть неединичные элементы как конечного, так и бесконечного порядков, называются *смешанными*.

<u>Пример 1</u>. $G=<\{2^n\mid n\in Z\},\cdot>$ – группа без кручения.

<u>Пример 2</u>. $G=<\{x\mid x\in C, x^4=1\},\cdot>=<\{\pm1,\pm i\},\cdot>$– периодическая группа.

<u>Пример 3</u>. $G=<\mathbf{C}^{-0},\cdot>$ – смешанная группа (см. пример 1).

<u>Пример 4</u>. Любая конечная группа является периодической, так как если бы в конечной группе содержался элемент бесконечного порядка, то группа не была бы конечной, ведь все целочисленные степени этого элемента были бы различны, и их было бы бесконечно много.

<u>Пример 5</u>. Пусть p – фиксированное простое число. В мультипликативной группе $\mathbf{C}^{-0}$ рассмотрим подмножество $C_{p^\infty}=\{g\mid g^{p^n}=1,\ n\in N\}$ – множество всех корней из единицы степеней p^0, $p^1,\ldots,p^n,\ldots$. Проверим, что $C_{p^\infty}\leq\mathbf{C}^{-0}$, $|G|=\infty$.

1) Если $g_1,g_2\in C_{p^\infty}$, то $g_1^{p^{n_1}}=1$, $g_2^{p^{n_2}}=1$. Обозначим $n=\max\{n_1,n_2\}$. Тогда $(g_1g_2)^{p^n}=g_1^{p^n}g_2^{p^n}=\left(g_1^{p^{n_1}}\right)^{p^{n-n_1}}\left(g_2^{p^{n_2}}\right)^{p^{n-n_2}}=1$.

2) Если $g_1 \in C_{p^\infty}$, то $g_1^{p^{n_1}} = 1$. Отсюда $\left(g_1^{-1}\right)^{p^{n_1}} = \left(g_1^{p^{n_1}}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1$, то есть $g_1^{-1} \in C_{p^\infty}$.

По критерию подгруппы, $C_{p^\infty} \le \mathbf{C}^{-0}$.

По определению, каждый элемент группы C_{p^∞} в некоторой натуральной степени равен единице, то есть имеет конечный порядок. Однако сама группа C_{p^∞} бесконечна.

C_{p^∞} – периодическая группа.

Свойства порядков

Свойство 1. Если $|a| = m$, то элементы $a^0, a^1, a^2, .. a^{m-1}$ различны.

Доказательство.

Предположим, что существуют $n, k \in \mathbf{N}$, $0 \le n, k \le m-1$, $n \ne k$ и $a^n = a^k$.

Пусть $n > k$. Тогда из $a^n = a^k$ следует $a^{n-k} = e$. Поскольку $n - k < m$, то это противоречит условию, что m – порядок элемента a.

Аналогично, если $n < k$.

Свойство 2. Если $|a| = m$, то для любого $k \in \mathbf{N}$ верно, что $a^k \in \{a^0, a^1, a^2, .. a^{m-1}\}$.

Доказательство.

По теореме о делении с остатком для чисел $m, k \in \mathbf{N}$ получаем:

$k = mq + r$, $0 \le r < m$.

$a^k = a^{mq+r} = \left(a^m\right)^q a^r = e^q a^r = a^r \in \{a^0, a^1, a^2, .. a^{m-1}\}$.

Свойство 3. Если $|a| = m$ и $a^k = e$, то $k \,\vdots\, m$.

1) При $k = 0$ получаем, что $a^0 = e$ и $0 \,\vdots\, m$.

2) При $k \ne 0$ по теореме о делении с остатком для чисел $m, k \in \mathbf{N}$ получаем:

$k = mq + r$, $0 \le r < m$.

$a^k = a^{mq+r} = \left(a^m\right)^q a^r = e^q a^r = a^r$, $\Rightarrow a^r = e$, поэтому $r = 0$ и $k \,\vdots\, m$.

1.7. Циклическая подгруппа. Циклическая группа

Пусть G – группа, a – произвольный элемент группы G.

Рассмотрим множество $H = \{a^z \mid z \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots\} \subseteq G$.

Для $\forall a^k, a^t \in H$ верно, что 1) $a^k a^t = a^{k+t} \in H$ и 2) $a^{-k} = \left(a^k\right)^{-1} \in H$. По критерию подгруппы, $H \le G$.

Определение 1. Подгруппа, состоящая из целочисленных степеней какого-либо элемента *a* группы *G*, называется *циклической подгруппой*. Элемент *a* называется *порождающим* элементом этой подгруппы.

Обозначение: $H = <a>$. По определению, $H = \{a^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

Замечание. В аддитивной записи циклическая подгруппа, порожденная элементом *a*, состоит из всех целочисленных кратных числа *a*.

$H = <a> = \{na \mid n \in \mathbf{Z}, a \in G\}$.

Теорема 1. Порядок любого элемента *a* группы G равен порядку порожденной им циклической подгруппы $<a>$.

Доказательство.

1. Предположим, что $|a| = \infty$, но $|<a>| = m$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда циклическая подгруппа $<a>$ является группой конечного порядка и не может содержать элементы бесконечного порядка (в этом случае все целочисленные степени этого элемента были бы различны, и их было бы бесконечно много). Итак, в этом случае $|<a>| = \infty$.
2. Если $|a| = m$, $m \in \mathbf{N}$, то циклическая подгруппа, порожденная элементом *a*, по определению, состоит из всевозможных целочисленных степеней элемента *a*. Покажем, что $<a>$ состоит из m элементов. По свойствам порядков элементы $a^0, a^1, \ldots, a^{m-1}$ – различны и для $\forall k \in \mathbf{Z}$ $a^k \in \{a^0, a^1, \ldots, a^{m-1}\}$.

Итак, $<a> = \{a^0, a^1, \ldots, a^{m-1}\}$, т.е. $|<a>| = |a| = m$.

Пример 1. Пусть $G = S_3$ – группа подстановок 3-й степени.

$H_1 = <a_1> = \{a_1\}$, $|H_1| = 1$.

$H_2 = <a_2> = \{a_2, a_2^2 = a_1\}$, $|H_2| = 2$.

$H_3 = <a_3> = \{a_3, a_3^2 = a_1\}$, $|H_3| = 2$.

$H_4 = <a_4> = \{a_4, a_4^2 = a_5, a_4^3 = a_1\}$, $|H_4| = 3$.

$H_5 = <a_5> = \{a_5, a_5^2 = a_4, a_5^3 = a_1\} = H_4$.

$H_6 = <a_6> = \{a_6, a_6^2 = a_1\}$, $|H_6| = 2$.

Пример 2. Пусть $G = 2\mathbf{Z}$ – аддитивная группа четных целых чисел.

$a_1 = 6$, $H_1 = <a_1> = \{6a \mid a \in \mathbf{Z}\}$;

$a_2 = 2$, $H_2 = <a_2> = \{2a \mid a \in \mathbf{Z}\} = G$.

Определение 2. Группа, совпадающая с одной из своих циклических подгрупп, называется *циклической*.

Пример 3. Группа $G = 2\mathbf{Z}$ – циклическая (см. пример 2).

Пример 4. Группа $G = S_3$ не является циклической (она не совпадает ни с одной из своих циклических подгрупп (см. пример 1)).

Пример 5. Группа $G =< \mathbf{Z},+ >=<1>=<-1>$ – циклическая.

Теорема 2. Любая подгруппа циклической группы – циклическая.

Пусть $G =< a >,\ H \le G$. Докажем, что H – циклическая группа.

Доказательство.

Так как $H \subseteq G$, то H также состоит из некоторых степеней элемента a.

Пусть $a^k \in H$ и k – наименьший натуральный показатель из степеней элемента a, принадлежащих H.

Докажем, что $H =< a^k >$.

1) $< a^k >\subseteq H$, т.к. $a^k \in H$ и $H \le G$.

2) Пусть $h \in H$. Тогда $h = a^t$. По теореме о делении с остатком

$t = kq + r,\ 0 \le r < k$.

$h = a^t = a^{kq+r} = a^{kq} \cdot a^r$ и так как $\left(a^k\right)^{-q} = a^{-kq} \in H$, то $a^t \cdot a^{-kq} = a^r \in H$.

Поскольку $r < k$, это возможно лишь при $r = 0$.

Следовательно, $t = kq$ и $h = \left(a^k\right)^q \in< a^k >$, поэтому $H \subseteq< a^k >$.

Из выполнения условий 1) и 2) следует, что $H =< a^k >$.

Для произвольной группы эта теорема неверна.

1.8. Бинарные отношения между элементами группы

Пусть G – группа, $H \le G$.

Введем на множестве G бинарное отношение ρ следующим образом: для элементов $a,b \in G$ будем считать, что $a\rho b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$.

Докажем, что ρ – отношение эквивалентности.

1. Рефлексивность.

$a\rho a$, т.к. $a^{-1}a = e \in H$.

2. Симметричность.

Пусть $a\rho b$. Тогда $a^{-1}b \in H \Rightarrow \left(a^{-1}b\right)^{-1} = b^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1} = b^{-1}a \in H \Rightarrow b\rho a$.

3. Транзитивность.

Пусть $a\rho b$ и $b\rho c$. Тогда $a^{-1}b \in H$ и $b^{-1}c \in H \Rightarrow a^{-1}bb^{-1}c = a^{-1}c \in H \Rightarrow a\rho c$.

Замечание. Если G – аддитивная группа, то отношение ρ задается следующим образом: для элементов $a,b \in G$ $a\rho b \Leftrightarrow -a + b \in H$.

Поскольку всякое отношение эквивалентности задает на множестве разбиение на классы, следовательно, множество элементов группы G может быть разбито на классы эквивалентности. Каждый класс будет состоять из элементов, находящихся в данном отношении с некоторым элементом a – представителем класса.

Определение 1. Класс ${}_aH = \{b \in G \mid a\rho b\}$ называется левым классом эквивалентности.

Свойства левых классов эквивалентности

Для левых классов эквивалентности будут верны все свойства классов эквивалентности (см. § 1.1).

Свойство 1. Классы не пусты ($a \in {}_aH$).

Свойство 2. $a \in {}_xH,\ b \in {}_xH \Leftrightarrow a\rho b$ (элементы принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они находятся в данном отношении ρ).

Свойство 3. Если $b \in {}_aH,$ то ${}_aH = {}_bH$ (в качестве представителя класса может выступать любой его элемент).

Свойство 4. ${}_aH \bigcap {}_bH = \varnothing \Leftrightarrow a\overline{\rho}b$ (левые классы эквивалентности не пересекаются тогда и только тогда, когда элементы a и b не находятся в данном отношении ρ).

Свойство 5. Всякая группа G может быть представлена в виде объединения попарно не пересекающихся всевозможных левых классов эквивалентности: $G = \bigcup {}_aH$, $a \in G$.

Также верны следующие свойства:

Свойство 6. Подгруппа H – левый класс эквивалентности (т. к. $e \in H$, то $H = {}_eH$).

Свойство 7. Если $a \notin H$, то ${}_aH \not\leq G$, т.к. $e \notin {}_aH$.

Аналогично отношению ρ на множестве G зададим бинарное отношение σ следующим образом: для элементов $a,b \in G$ будем считать, что $a\sigma b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$.

Можно доказать, что отношение σ, как и ρ, является отношением эквивалентности. Следовательно, можно построить разбиение группы на классы по отношению σ.

Будем обозначать эти классы $H_a = \{b \in G \mid a\sigma b\}$.

Определение 2. Класс $H_a = \{b \in G \mid a\sigma b\}$ называется *правым классом эквивалентности*.

Для правых классов эквивалентности выполняются все те же свойства, что и для левых классов эквивалентности.

Замечание. Если G – аддитивная группа, то отношение σ задается следующим образом: для элементов $a,b \in G$ $a\sigma b \Leftrightarrow b+(-a) \in H$.

1.9. Смежные классы группы по подгруппе

По определению левый (правый) класс эквивалентности построить сложно, а в бесконечной группе невозможно, поэтому необходимо найти способ построения ${}_aH$ (H_a).

Теорема 1. ${}_aH = aH = \{ah \mid h \in H\}$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in {}_aH \Rightarrow a\rho x$ и $a^{-1}x \in H$. Обозначим $a^{-1}x = h \Rightarrow x = ah \in aH$.
   Следовательно, ${}_aH \subseteq aH$.
2. Пусть $y \in aH \Rightarrow y = ah \Rightarrow a^{-1}y = h$ или $a^{-1}y \in H$. Тогда $a\rho y$, поэтому $y \in {}_aH$. Следовательно, $aH \subseteq {}_aH$.

Из выполнения условий 1 и 2 следует, что ${}_aH = aH$.

Замечание. Можно доказать, что $H_a = Ha$.

Определение 1. Множество $aH = \{ah \mid h \in H\}$ называется *левым смежным классом группы G по подгруппе H*.

Так как ${}_aH = aH$, то свойство 5 принято записывать следующим образом:

$G = H + a_1H + a_2H + \ldots + a_kH$.

Эту запись называют *левосторонним разложением группы G по подгруппе H*. Здесь сложение – лишь удобное обозначение; его не следует рассматривать как операцию.

Пример 1.

Пусть $G = S_3$ – группа подстановок 3-й степени.

$S_3 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.

$H = < a_2 > = \{a_2, a_1\}$.

$a_1H = H$, $a_2H = H$, $a_3H = \{a_3, a_5\}$, $a_4H = \{a_4, a_6\}$, $a_5H = a_3H$, $a_6H = a_4H$.

$S_3 = H + a_3H + a_4H$.

В аддитивной группе левый смежный класс имеет вид:

$a + H = \{a + h \mid h \in H\}$.

Пример 2.

Пусть $G = < \mathbf{Z}, + >$, $H = < 3\mathbf{Z}, + >$, $H \le G$.

Построим левые смежные классы группы G по подгруппе H.

Если $a \in G$ и $a \in H$, то $a + H = H$. Это первый левый смежный класс.

Выберем $a \in G$ так, чтобы $a \notin H$, например, $a = 1$. Тогда второй левый смежный класс будет выглядеть так: $1 + H = \{1 + 3t \mid t \in \mathbf{Z}\}$.

Замечаем, что построены не все классы, поскольку в объединении H и $1+H$ не получаем все целые числа. Поэтому процесс построения смежных классов продолжаем.

Выбираем $a \in G$, $a \notin H$ и $a \notin 1 + H$. Например, $a = 2$. Получаем третий левый смежный класс. Он будет выглядеть так: $2 + H = \{2 + 3t \mid t \in \mathbf{Z}\}$.

Поскольку при делении любого целого числа на 3 может получиться только один из трех различных остатков: 0, 1 или 2, то каждый элемент группы G будет находиться в одном из трех построенных классов.

В результате получаем левостороннее разложение группы G по подгруппе H:

$G = H + (1 + H) + (2 + H)$.

<u>*Пример 3*</u>**.** Пусть $G = <\mathbf{C}, +>$, $H = <\mathbf{R}, +>$, $H \le G$.

Построим левые смежные классы группы G по подгруппе H.

Пусть $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

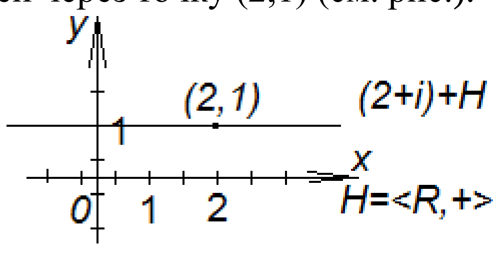
$z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$.

Выясним, из каких элементов группы G будут состоять каждый левый смежный класс. По определению, класс состоит из таких элементов $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, что $z_1 \rho\, z_2 \Leftrightarrow -z_1 + z_2 \in H \Rightarrow -a_1 - b_1 i + a_2 + b_2 i \in \mathbf{R} \Rightarrow b_1 = b_2$.

Итак, $z_1 \rho\, z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Левых смежных классов будет бесконечно много. В каждом классе будет находиться множество комплексных чисел с равными мнимыми частями.

Проиллюстрируем вышесказанное, изобразив множество чисел смежного класса $(2 + i) + H$ в комплексной плоскости. Поскольку у представителя смежного класса мнимая часть равна 1, то и у всех чисел класса она будет такой же. Поэтому все точки, изображающие числа смежного класса $(2 + i) + H$ на комплексной плоскости, будут лежать на прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку (2,1) (см. рис.).



Рисунок

Пример 4. $G = < \mathbf{C}^{-0}, \cdot >$, $H = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$, $H \le G$.

Подгруппа H состоит из комплексных чисел, модули которых равны 1. Каждый левый смежный класс ${}_aH = aH$, где $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in G$. Поскольку при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, то модули всех чисел класса aH будут равны r – модулю числа a. Следовательно, каждый левый класс будет состоять из всех комплексных чисел, модули которых равны между собой.

Например, если $a_0 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{15} + i\sin\dfrac{\pi}{15}\right) \in G$, то $a_0H = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 2\}$. Если изобразить все числа одного смежного класса точками на комплексной плоскости, то они будут находиться на окружности с центром в начале координат и радиусом r. Геометрический образ множества всех левых смежных классов будет представлять собой бесконечное множество концентрических окружностей.

Определение 2. Множество $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ называется *правым смежным классом группы G по подгруппе H*.

Разложение $G = H + Ha_1 + Ha_2 + \ldots$ называется *правосторонним разложением группы G* по подгруппе H.

Замечание. Если G – аддитивная группа, то $H + a$ – правый смежный класс.

Пример 5. Пусть $G = S_3$.

$H = < a_2 > = \{a_2, a_1\}$.

Построим правостороннее разложение группы S_3 по подгруппе H.

$Ha_1 = H = a_1H$, $Ha_2 = H = a_2H$,

$Ha_3 = \{a_3, a_4\} \ne a_3H = \{a_3, a_5\}$, $Ha_4 = \{a_4, a_5\} \ne a_4H = \{a_4, a_6\}$.

$S_3 = H + Ha_3 + Ha_4$.

Замечание. В общем случае правые и левые смежные классы не совпадают, т.е. $aH \ne Ha$ (см. пример 5).

Рассмотрим пример, в котором левые и правые смежные классы совпадают.

Пример 6. Пусть $G = < \mathbf{R}^{-0}, \cdot >$, $H = < \mathbf{R}^{+}, \cdot >$, $a \in G$

$aH = \{ah \mid h \in \mathbf{R}^{+}\}$, $Ha = \{ha \mid h \in \mathbf{R}^{+}\}$.

Очевидно, что $aH = Ha$ для любого $a \in G$.

Определение 3. Число элементов группы G, входящих в левый (правый) смежный класс aH (Ha), называется *порядком* этого смежного класса и обозначается $|aH|$ ($|Ha|$) (как и порядок группы).

<u>Теорема 2</u>. Если H – конечная подгруппа группы G, то все левые смежные классы имеют тот же порядок, что и подгруппа H, т.е. если $|H| = k$, то $|aH| = |bH| = \ldots = k$.

Доказательство.

Зададим отображение $\varphi : H \to aH$ следующим образом: $\forall h \in H \;\; \varphi(h) = ah$.

Покажем, что φ является взаимно однозначным.

Пусть $h_1, h_2 \in H$ и $h_1 = h_2$. Тогда $ah_1 = ah_2$ (следует из однозначности умножения в группе), $ah_1, ah_2 \in aH$. Значит, $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$.

Обратно, если $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ или $ah_1 = ah_2$, тогда $a^{-1}(ah_1) = a^{-1}(ah_2) \Rightarrow h_1 = h_2$.

Итак, между множествами H и aH установлено взаимно однозначное соответствие. Это означает, что $|H| = |aH|$.

Замечание. Теорема 2 верна и для правых смежных классов.

<u>Теорема 3</u>. Число различных левых смежных классов G по H равно числу различных правых смежных классов G по H (в бесконечном случае это означает, что множества левых и правых смежных классов по данной подгруппе имеют одинаковую мощность).

Доказательство.

Рассмотрим множество $(Ha)^{-1}$ элементов, обратных к элементам из Ha, то есть $(Ha)^{-1} = \{(ha)^{-1} \mid h \in H\}$.

Так как $(ha)^{-1} = a^{-1}h^{-1}$ (см. § 1.4), то $(Ha)^{-1} = \{a^{-1}h^{-1} \mid h \in H\}$ (1).

Поскольку H – группа, нетрудно показать, что $H = \{h^{-1} \mid h \in H\}$. Поэтому из (1) получаем: $(Ha)^{-1} = \{a^{-1}h \mid h \in H\} = a^{-1}H$. Поставим теперь в соответствие каждому правому смежному классу Ha группы G по H левый $a^{-1}H$. Покажем, что это соответствие является взаимно однозначным.

Пусть $Ha = Hb$. Тогда $H_a = H_b$ и, следовательно, $a\sigma b$, то есть $ba^{-1} \in H$. Значит, $(ba^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} \cdot b^{-1} \in H$, то есть $a^{-1} \rho \, b^{-1}$, откуда следует, что $a^{-1}H = b^{-1}H$.

Аналогично можно показать, что если $a^{-1}H = b^{-1}H$, то $Ha = Hb$.

Итак, данное соответствие является взаимно однозначным. Это означает, что указанные множества имеют одну и ту же мощность, то есть число различных левых смежных классов G по H равно числу различных правых смежных классов G по H.

Доказанная теорема позволяет ввести следующее определение.

Определение 4. Число различных левых (правых) смежных классов G по H называется *индексом* подгруппы H в группе G и обозначается $|G:H|$ (или $[G:H]$).

1.10. Нормальные делители группы. Теорема Лагранжа

Определение. Подгруппа H группы G называется *нормальной подгруппой*, или *нормальным делителем* группы G, если для любого $a \in G$ правые и левые смежные классы по этой подгруппе совпадают.

Обозначение: $H \trianglelefteq G$.

Итак, $H \trianglelefteq G$, если $H \le G$ и для $\forall a \in G$ верно равенство $aH = Ha$, т.е. для $\forall h_1 \in H$ существует $h_2 \in H$, что $ah_1 = h_2 a$. Элементы h_1 и h_2 могут быть различными, а могут и совпадать.

Пример. Пусть G – мультипликативная группа невырожденных матриц второго порядка вида $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbf{R}^{\mathbf{-0}}, b \in \mathbf{R} \right\}$. Покажем, что подмножество $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{R} \right\}$ является нормальным делителем группы G.

Сначала нужно показать, что $H \le G$. Воспользуемся критерием подгруппы.

Множество H, очевидно, не пусто. Покажем, что:

1) для любых $A, B \in H$ произведение $AB \in H$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 + d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, так как $d_2 + d_1 \in \mathbf{R}$.

2) для любой матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ существует $A^{-1} \in H$.

Поскольку матрица A является невырожденной, то обратная к ней существует. По формуле обратной матрицы находим: $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, что $A^{-1} \in H$. Итак, $H \le G$.

Покажем, что $H \trianglelefteq G$, то есть для любой матрицы $C \in G$ $CH = HC$. Нужно показать, что для каждой матрицы $D_1 \in H$ найдется матрица $D_2 \in H$ такая, что $CD_1 = D_2 C$.

Пусть $C=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $D_1=\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $CD_1=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & ad+b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Будем искать матрицу D_2 в виде $D_2=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$CD_2=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b+xc \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Из условия $CD_1=D_2C$ получаем:

$\begin{pmatrix} a & ad+b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b+xc \\ 0 & c \end{pmatrix}$. $ad+b=b+xc$. Откуда $x=adc^{-1}$ (c^{-1} существует, так как $c\in\mathbf{R}^{-0}$).

Итак, $D_2=\begin{pmatrix} 1 & adc^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, следовательно, H – нормальный делитель.

Как вытекает из определения нормального делителя, левые смежные классы группы G по нормальному делителю H одновременно являются и правыми, и обратно. Это позволяет говорить просто о смежных классах группы G по нормальному делителю H и о разложении G в смежные классы по этому нормальному делителю.

Теорема 1. В абелевой группе любая подгруппа является нормальным делителем.

Пусть G – абелева группа, $H\le G$.

Докажем, что $H\trianglelefteq G$.

Доказательство.

Для $\forall a\in G$ верно равенство $aH=Ha$, т.к. $ah=ha$ для $\forall h\in H$.

Пример 2. В предыдущем параграфе в примерах *2*, *3*, *4* и *6* рассмотренные группы являются абелевыми, поэтому все их подгруппы будут являться нормальными делителями.

Теорема 2. В любой группе G единичная подгруппа и сама группа G являются нормальными делителями.

Доказательство.

1. Пусть $E=\{e\}\le G$.

Для $\forall a\in G$ верно равенство $aE=\{a\cdot e\}=\{e\cdot a\}=Ea$, т.е. $E\trianglelefteq G$.

2. Пусть $G\le G$.

Для $\forall a\in G$ верно равенство $aG=G$, $Ga=G$, $aG=Ga$, т.е. $G\trianglelefteq G$.

Если в группах нет нормальных делителей, кроме G и E, то группа G называется *простой*.

Теорема 3 (Лагранжа). Если H – подгруппа конечной группы G, то имеет место равенство $|G| = |H| \cdot |G : H|$

Доказательство.

Пусть $G = H + a_1H + a_2H + ... + a_{s-1}H$ (1) – левостороннее разложение G по H.

Так как смежные классы не пересекаются, то количество элементов в правой части равенства (1) совпадает с количеством элементов в левой части. По теореме 2 § 1.9 $|a_1H| = |a_2H| = ... = |a_{s-1}H| = |H|$. Поэтому число элементов группы G, входящих в правую часть равенства (1), равно $\underbrace{|H| + |H| + ... + |H|}_{s\ раз} = |H| \cdot s$. Но в левой части равенства $|G|$ элементов. Отсюда следует, что $|G| = |H| \cdot s$. По определению 4 § 1.9 равенство (1) означает, что $s = |G : H|$. Таким образом, $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

Следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1. Порядок и индекс любой подгруппы конечной группы являются делителями порядка группы.

Доказательство.

Так как все числа, входящие в равенство $|G| = |H| \cdot |G : H|$, натуральные, то из него следует, что $|G|$ делится на $|H|$ и $|G|$ делится на индекс $|G : H|$.

Следствие 2. Порядок любого элемента конечной группы является делителем порядка группы.

Пусть $|G| = n,\ a \in G$..

Докажем, что $|a| = k$, где $k \in \mathbf{N}$, и $n \vdots k$.

Доказательство.

1) $|a| \neq \infty$, т.к. в противном случае все целочисленные степени элемента a были бы различны, и группа G была бы бесконечной.
2) Если $a = e$, то $|a| = 1$ и $n \vdots 1$.
3) Если $|a| = k \neq 1$.

Построим циклическую подгруппу $< a >$, порожденную элементом a. По теореме 1 § 1.7 $|< a >| = |a| = k$.

По теореме Лагранжа $|G| = |< a >| \cdot |G :< a >|$. Поскольку $|G| = n,\ |< a >| = k$, то $n = k \cdot |G :< a >|$. Следовательно, $n \vdots k$.

Следствие 3. Группа G простого порядка не содержит подгрупп, отличных от единичной E и группы G.

Доказательство.

Пусть $|G| = p$, где p – простое число.

По теореме Лагранжа $|G| = |H| \cdot |G : H|$. Значит, $p \vdots |H|$, следовательно, либо $|H| = 1$, либо $|H| = p$. В первом случае $H = E$, во втором случае $H = G$.

Замечание. Из следствия 2 следует, что в случае, если $|G| = p$, где p – простое число, все элементы группы G могут иметь порядки, равные 1 или p.

Если $|a| = 1$, то $a = e$; если $|a| = p$, тогда $< a > \leq G$, $|< a >| = p$, поэтому $|< a >| = |G|$, т.е. $G =< a >$.

Таким образом, любая группа простого порядка – циклическая.

1.11. Факторгруппа

Определение 1. Если в группе G даны подмножества A и B, то *произведением* AB этих *множеств* называется множество всех элементов группы G, равных произведению некоторого элемента из A на некоторый элемент из B, то есть $AB = \{c \in G \mid c = ab, \ \ a \in A, \ \ b \in B\}$.

Пусть G – группа, $H \trianglelefteq G$, т.е. $H \leq G$ и для $\forall a \in G$ верно равенство $aH = Ha$.

Построим разбиение группы G на смежные классы и обозначим множество этих классов $G/H = \{H, a_1 H, a_2 H, \ldots\}$.

В разбиении могут участвовать как левые, так и правые смежные классы, поскольку в данном случае они совпадают.

Введем на множестве G/H операцию умножения следующим образом:

$aH \cdot bH = abH$.

Покажем, что это возможно:

$$aH \cdot bH \overset{ассоц.}{=} a(Hb)H \overset{H \trianglelefteq G}{=} a(bH)H \overset{ассоц.}{=} (ab)(HH) = abH.$$

Покажем, что $< G/H, \cdot >$ – группа.

Множество $G/H \neq \varnothing$, так как $H \in G/H$. Операция в G/H выполнима по определению.

1) Ассоциативность: $(aH \cdot bH)cH = abHcH = (ab)cH$ и

$aH(bH \cdot cH) = aHbcH = a(bc)H$. Так как $a, b, c \in G$, то $a(bc) = a(bc)$.

2) Единичный элемент – это подгруппа *H*, так как для $\forall a \in H$ $aH \cdot H = H \cdot aH = aH$.

3) Элемент, обратный к aH – $a^{-1}H$. Он существует, т.к. *G* – группа.

Итак, $< G/H, \cdot >$ – группа.

<u>Определение 2</u>. Группа $< G/H, \cdot >$ называется *факторгруппой* группы *G* по нормальному делителю *H*.

Замечание 1. Факторгруппу можно построить только по нормальному делителю, т.к. для произвольной подгруппы *H* операцию умножения ввести таким образом нельзя ($Hb \neq bH$).

Замечание 2. Если группа *G* аддитивная, то на множестве G/H вводится операция сложения классов по правилу $(a+H)+(b+H)=(a+b)+H$. Группа G/H будет аддитивной.

<u>Теорема 1</u>. Любая факторгруппа абелевой группы – абелева.

Пусть *G* – абелева группа, $H \trianglelefteq G$. Покажем, что G/H – абелева группа.

Доказательство.

Для $\forall a,b \in G$ $aH \cdot bH = abH$ и $bH \cdot aH = baH$. Поскольку G – абелева группа, то $ab = ba$ и поэтому $abH = baH$.

<u>Теорема 2</u>. Любая факторгруппа циклической группы – циклическая.

Пусть $G = < a >$, $H \trianglelefteq G$. Покажем, что G/H – циклическая группа.

Доказательство.

Пусть $bH \in G/H$, $b \in G$. Так как G – циклическая группа, то элемент $b \in G$ можно представить в виде

$$b = a^k \Rightarrow bH = a^k H = a^k H^k = a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot H \cdot H \cdot ... \cdot H =$$

$$a \cdot ... \cdot a(aH)H \cdot ... \cdot H \overset{H \trianglelefteq G}{=} a \cdot ... a(Ha)H \cdot ... \cdot H = (aH)^k.$$

Следовательно, $G/H = < aH >$.

В параграфе 1.7 были построены смежные классы для абелевых групп, в которых каждая подгруппа является нормальным делителем. На основе этих примеров построим факторгруппы и охарактеризуем их элементы.

<u>*Пример 1*</u>. (см. § 1.7, пример *2*). Элементами аддитивной факторгруппы $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ являются классы вычетов по модулю 3. $\left|\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\right| = 3$. Нулевой элемент – класс $3\mathbf{Z}$. В параграфе 1.2 приведен пример построения аддитивной фактор-

группы классов вычетов по модулю 6. Построена таблица сложения элементов факторгруппы.

Пример 2. (см. § 1.7, пример *3*). Геометрическими образами элементов аддитивной факторгруппы $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ являются прямые, параллельные оси абсцисс. Образом суммы элементов факторгруппы будет прямая, отстоящая от оси абсцисс на расстоянии, равном сумме расстояний от оси абсцисс прямых-слагаемых.

Пример 3. (см. § 1.7, пример *4*). Геометрическими образами элементов мультипликативной факторгруппы G/H являются концентрические окружности. При «умножении» образов-окружностей этой группы будем получать окружность, радиус которой равен произведению радиусов окружностей-сомножителей. Образом единичного элемента будет окружность радиуса 1.

1.12. Изоморфизм и гомоморфизм групп

Пусть каждому элементу a алгебры $< G_1,* >$ поставлен в соответствие вполне определенный элемент b алгебры $< G_2,\circ >$, который принято обозначать $b = \varphi(a)$. Совокупность всех полученных таким образом элементов $b = \varphi(a)$ обозначим через $\varphi(G_1)$. Мы говорим, что имеем отображение φ алгебры G_1 в G_2, а именно: на множество $\varphi(G_1) \subseteq G_2$.

Определение 1. Отображение φ алгебры G_1 в G_2 называется *гомоморфным (гомоморфизмом)*, если для $\forall a,b \in G_1$ выполнено условие $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. Это условие называется «*сохранение операции*».

Теорема 1. Если φ есть гомоморфное отображение группы $< G_1,* >$ в группу $< G_2,\circ >$, то множество $\varphi(G_1) \subseteq G_2$ есть группа.

Доказательство.

Достаточно доказать, что множество $\varphi(G_1)$ есть подгруппа группы G_2, т.е. выполняются условия:

1) для $\forall b_1, b_2 \in \varphi(G_1)$ $b_1 \circ b_2 \in \varphi(G_1)$;

2) для $\forall b \in \varphi(G_1)$ $b^{-1} \in \varphi(G_1)$.

1) Пусть $b_1, b_2 \in \varphi(G_1)$, тогда существуют $a_1, a_2 \in G_1$, что $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$.

В силу гомоморфности отображения φ имеем:

$\varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1) \circ \varphi(a_2) = b_1 \circ b_2$. Следовательно, $b_1 \circ b_2$ есть образ элемента $a_1 * a_2 \in G_1$ при отображении φ. Поэтому $b_1 \circ b_2 \in \varphi(G_1)$.

2) Пусть e_1 – нейтральный элемент группы G_1. Тогда для $\forall a \in G_1$ $\varphi(a * e_1) = \varphi(e_1 * a) = \varphi(a)$.

Поскольку отображение φ является гомоморфным, то $\varphi(a) \circ \varphi(e_1) = \varphi(e_1) \circ \varphi(a) = \varphi(a)$. Поэтому $\varphi(e_1)$ есть нейтральный элемент группы G_2.

Пусть $b \in \varphi(G_1)$. Тогда существует $a \in G_1$ такой, что $\varphi(a) = b$. Обозначим через b' элемент $\varphi(a^{-1})$ множества $\varphi(G_1)$. Докажем, что $b' = b^{-1}$.

В самом деле, $e_2 = \varphi(e_1) = \varphi(a * a^{-1}) = \varphi(a) \circ \varphi(a^{-1}) = b \circ b'$, где e_2 – нейтральный элемент группы G_2. Аналогично, $e_2 = b' \circ b$. Поэтому $b' = b^{-1}$, что и требовалось доказать.

Замечание. В только что проделанных рассуждениях содержится доказательство двух важных утверждений, справедливых для всякого гомоморфного отображения φ группы G_1 в группу G_2:

$\varphi(e_1) = e_2$ и $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$. Таким образом, при любом гомоморфизме группы нейтральный элемент переходит в нейтральный, нейтрализующий к элементу a – в нейтрализующий к его образу $\varphi(a)$.

Определение 2. Гомоморфное взаимно однозначное отображение φ называется *изоморфизмом (изоморфным отображением)*.

Если алгебра G_1 изоморфна алгебре G_2, то это обозначается так: $G_1 \cong G_2$.

Пример 1. Пусть $G_1 = < \mathbf{Z}, + >$, $G_2 = < \{\pm 1\}, \cdot >$. Зададим соответствие $\varphi : G_1 \to G_2$ следующим образом: $\varphi(2n) = 1$, $\varphi(2n+1) = -1$ (каждому четному целому числу поставим в соответствие 1, каждому нечетному -1). Проверим сохранение операции: 1) $\varphi(2n + 2k) = \varphi(2(n+k)) = 1$, $\varphi(2n) \cdot \varphi(2k) = 1 \cdot 1 = 1$, $1 = 1$;

2) $\varphi(2n + (2k+1)) = \varphi(2(n+k)+1) = -1$, $\varphi(2n) \cdot \varphi(2k+1) = 1 \cdot (-1) = -1$, $-1 = -1$; 3) $\varphi((2n+1) + (2k+1)) = \varphi(2(n+k+1)) = 1$, $\varphi(2n+1) \cdot \varphi(2k+1) = -1 \cdot (-1) = -1$, $1 = 1$. Итак, φ – гомоморфизм. φ не является изоморфизмом, потому что не является взаимно однозначным отображением.

Пример 2. $G_1 = < \mathbf{R}^{-0}, \cdot >$, $G_2 = < \mathbf{R}^{+}, \cdot >$. Зададим соответствие $\varphi : G_1 \to G_2$ следующим образом: $\forall a \in \mathbf{R}^{-0}$ $\varphi(a) = a^2$. Проверим сохранение операции: $\varphi(ab) = (ab)^2 = a^2 b^2 = \varphi(a)\varphi(b)$. Итак, φ – гомоморфизм. Поскольку φ не является взаимно однозначным, то φ – не изоморфизм.

Пример 3. $G_1 = < \mathbf{R}^{+}, \cdot >$, $G_2 = < \mathbf{R}, + >$. Зададим соответствие $\varphi : G_1 \to G_2$ следующим образом: $\forall a \in \mathbf{R}^{+}$ $\varphi(a) = \ln a$. Проверим сохранение операции:

$\varphi(ab)=\ln(ab)=\ln a+\ln b=\varphi(a)+\varphi(b)$. Итак, φ – гомоморфизм. Поскольку φ является взаимно однозначным, то φ – изоморфизм.

Теорема 2. Изоморфный образ группы является группой.

Пусть $<G_1,*>$ – группа, существует изоморфизм $\varphi: G_1 \to G_2$.

Докажем, что $<G_2,\circ>$ – группа.

Доказательство.

Покажем, что в G_2 выполняется операция. Пусть $b_1,b_2 \in G_2$. Докажем, что $b_1 \circ b_2 \in G_2$.

Поскольку φ – изоморфизм, то найдутся $a_1,a_2 \in G_1$ такие, что $\varphi(a_1)=b_1$, $\varphi(a_2)=b_2$. Так как G_1 – группа, то $a_1 * a_2 \in G_1$,

$b_1 \circ b_2 = \varphi(a_1)\circ\varphi(a_2)=\varphi(a_1 * a_2)\in G_2$.

1) Покажем, что операция в G_2 является ассоциативной.

Пусть $b_1,b_2,b_3 \in G_2$. Докажем, что $(b_1 \circ b_2)\circ b_3 = b_1 \circ (b_2 \circ b_3)$.

Поскольку φ – изоморфизм, то найдутся $a_1,a_2,a_3 \in G_1$ такие, что $\varphi(a_1)=b_1$, $\varphi(a_2)=b_2$, $\varphi(a_3)=b_3$.

$$(b_1 \circ b_2)\circ b_3 = (\varphi(a_1)\circ\varphi(a_2))\circ\varphi(a_3) \overset{\varphi-изоморф}{=} \varphi(a_1 * a_2)\circ\varphi(a_3)=\varphi((a_1 * a_2)*a_3) \overset{G_1-группа}{=}$$
$$=\varphi(a_1 *(a_2 * a_3))=\varphi(a_1)\circ\varphi(a_2 * a_3)=\varphi(a_1)\circ(\varphi(a_2)\circ\varphi(a_3))=b_1\circ(b_2\circ b_3).$$

2) Докажем существование нейтрального элемента в G_2.

Пусть e – нейтральный элемент в группе G_1. Покажем, что $\varphi(e)$ – нейтральный элемент в группе G_2, то есть что для $\forall b \in G_2$ выполняются равенства: $b\circ\varphi(e)=\varphi(e)\circ b=b$. Так как φ – изоморфизм, то найдется $a \in G_1$, что $\varphi(a)=b$.

$b\circ\varphi(e)=\varphi(a)\circ\varphi(e)=\varphi(a * e)=\varphi(a)=b$. Аналогично, $\varphi(e)\circ b=b$.

3) Докажем существование нейтрализующего у каждого элемента из G_2.

Покажем, что для $\forall b \in G_2$ существует $b' \in G_2$ такой, что $b\circ b'=b'\circ b=\varphi(e)$. Пусть $a\in G_1$, $\varphi(a)=b$. Докажем, что $b'=\varphi(a')$, где $a'\in G_1$ – нейтрализующий к a.

$b\circ\varphi(a')=\varphi(a)\circ\varphi(a')=\varphi(a * a')=\varphi(e)$. Аналогично, $\varphi(a')\circ b=\varphi(e)$. Значит, $b'=\varphi(a')$.

Замечание.

При доказательстве не была использована взаимная однозначность отображения φ, т.е. теорема верна, когда φ – гомоморфизм.

Теорема 3. Любая бесконечная циклическая группа изоморфна аддитивной группе целых чисел.

Пусть $G=<a>$, $|G|=|a|=\infty$, $<\mathbf{Z},+>$.

Доказать, что $G\cong\mathbf{Z}$.

Доказательство.

Зададим отображение $\varphi:G\to\mathbf{Z}$ следующим образом: $\forall g\in G$, $g=a^k$, $\varphi(a^k)=k$. Покажем, что φ – изоморфизм.

1) Взаимная однозначность φ.

Пусть $a^{k_1}=a^{k_2}\Rightarrow a^{k_1-k_2}=e$. Так как $|a|=\infty$, это возможно только при $k_1=k_2$.

Обратно, если $k_1=k_2\Rightarrow a^{k_1}=a^{k_2}$ (следует из однозначности операции умножения в группе G).

2) Сохранение операции. Покажем, что образ произведения равен сумме образов.

$\varphi(a^{k_1}\cdot a^{k_2})=\varphi(a^{k_1+k_2})=k_1+k_2=\varphi(a^{k_1})+\varphi(a^{k_2})$.

Теорема 4. Любая конечная циклическая группа порядка *n* изоморфна аддитивной группе классов вычетов по модулю *n*.

Дано: $G=<a>$, $|G|=|a|=n$, $<\mathbf{Z}/n,+>$.

Доказать: $G\cong\mathbf{Z}/n$.

Доказательство.

Зададим отображение $\varphi:G\to\mathbf{Z}/n$ следующим образом: $\forall g\in G$, $g=a^k$, $\varphi(a^k)=Z_k$. Покажем, что φ – изоморфизм.

1) Взаимная однозначность φ.

Пусть $a^{k_1}=a^{k_2}\Rightarrow a^{k_1-k_2}=e\overset{(\text{по свойству порядков})}{\Rightarrow}(k_1-k_2)\vdots n\Rightarrow k_1\equiv k_2(\operatorname{mod}n)\Rightarrow Z_{k_1}=Z_{k_2}$.

Обратно, если $Z_{k_1}=Z_{k_2}\Rightarrow k_1\equiv k_2(\operatorname{mod}n)$, значит, $(k_1-k_2)\vdots n$,

то есть $k_1=k_2+nt, t\in\mathbf{Z}$.

Тогда $a^{k_1}=a^{k_2+nt}$ или $a^{k_1}=a^{k_2}\cdot(a^n)^t=a^{k_2}\cdot e=a^{k_2}$ ($a^n=e$, так как $|a|=n$).

2) Сохранение операции. Покажем, что образ произведения равен сумме образов.

$\varphi(a^{k_1}\cdot a^{k_2})=\varphi(a^{k_1+k_2})=Z_{k_1+k_2}=Z_{k_1}+Z_{k_2}=\varphi(a^{k_1})+\varphi(a^{k_2})$.

Теорема 5. Любая конечная циклическая группа порядка *n* изоморфна мультипликативной группе корней *n*-й степени из единицы.

Дано: $G=<a>$, $|G|=n$.

Доказать: $G \cong C_n$.

Доказательство.

$C_n = \{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \mid k = \overline{0, n-1}\}$, $G = <a> = \{a^0, a^1, ..., a^{n-1}\}$.

Зададим отображение $\varphi : G \to C_n$ следующим образом: $\forall g \in G$, $g = a^m$, $\varphi(a^m) = \cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n}$. Покажем, что φ – изоморфизм.

1) Взаимная однозначность φ.

Пусть $a^{m_1} = a^{m_2} \Rightarrow a^{m_1 - m_2} = e \overset{(\text{по свойству порядков})}{\Rightarrow} (m_1 - m_2) \vdots n \Rightarrow m_1 = m_2 + nt,\ t \in \mathbf{Z}$.

$$\varphi(a^{m_1}) = \cos\frac{2\pi m_1}{n} + i\sin\frac{2\pi m_1}{n} = \cos\frac{2\pi(m_2 + nt)}{n} + i\sin\frac{2\pi(m_2 + nt)}{n} =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi m_2}{n} + 2\pi t\right) + i\sin\left(\frac{2\pi m_2}{n} + 2\pi t\right) = \cos\frac{2\pi m_2}{n} + i\sin\frac{2\pi m_2}{n} = \varphi(a^{m_2}).$$

Обратно, если $\varphi(a^{m_1}) = \varphi(a^{m_2})$, то есть

$\cos\frac{2\pi m_1}{n} + i\sin\frac{2\pi m_1}{n} = \cos\frac{2\pi m_2}{n} + i\sin\frac{2\pi m_2}{n}$, значит,

$$\frac{2\pi m_1}{n} = \frac{2\pi m_2}{n} + 2\pi t \Rightarrow m_1 = m_2 + nt \Rightarrow a^{m_1} = a^{m_2 + nt} = a^{m_2} \cdot (a^n)^t = a^{m_2}.$$

2) Сохранение операции. Покажем, что образ произведения равен произведению образов.

$$\varphi(a^{m_1} \cdot a^{m_2}) = \varphi(a^{m_1 + m_2}) = \cos\frac{2\pi(m_1 + m_2)}{n} + i\sin\frac{2\pi(m_1 + m_2)}{n} =$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi m_1}{n} + i\sin\frac{2\pi m_1}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi m_2}{n} + i\sin\frac{2\pi m_2}{n}\right) = \varphi(a^{m_1})\varphi(a^{m_2}).$$

Замечание. Из теорем *3*, *4* и *5* следует, что циклические группы одного и того же порядка изоморфны.

<u>Теорема 6</u>. (**Кэли**). Любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе подстановок n-й степени.

Дано: G – группа, $|G| = n$.

Доказать: $\exists H \le S_n$, $G \cong H$.

Доказательство.

$G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, где a_1 – нейтральный элемент. Выберем из G произвольный элемент a_i. Рассмотрим произведения: $a_1 a_i, a_2 a_i, ..., a_n a_i \in G$. Все эти произведения будут различными. Обозначим: $a_1 a_i = a_{\alpha_1}$, $a_2 a_i = a_{\alpha_2}$, ... , $a_n a_i = a_{\alpha_n}$.

$\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n$ – некоторый набор чисел от 1 до *n*.

Элементу a_i поставим в соответствие подстановку $P_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ (1).

Этим каждому из элементов группы G ставится в соответствие вполне определенная подстановка *n*-й степени. Таким образом, мы имеем отображение φ группы G на некоторое подмножество H симметрической группы S_n.

Двум различным элементам a_i и a_j соответствуют различные подстановки, так как в подстановке P_i под элементом a_1 расположен $a_1 a_i = a_i$, а в подстановке P_j под элементом a_1 расположен $a_1 a_j = a_j$, $a_i \neq a_j$.

Итак, имеем взаимно однозначное соответствие между элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$ группы G и подстановками $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Найдем подстановку, соответствующую произведению $a_i a_j$. Если элементу a_j соответствует подстановка $P_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$ (2), то есть $a_{\alpha_i} a_j = a_{\beta_i}$, то из $a_k(a_i a_j) = (a_k a_i)a_j = a_{\alpha_k} a_j = a_{\beta_k}$ $(k = \overline{0, n-1})$ следует, что элементу $a_i a_j$ соответствует подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$, являющаяся, очевидно, произведением подстановки (1) на подстановку (2). Таким образом, множество H является замкнутым относительно операции умножения.

Проверим, что отображение φ сохраняет операцию.

Для доказательства подстановку $P_i = \varphi(a_i)$ принято записывать следующим образом: $P_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 a_i & a_2 a_i & \dots & a_n a_i \end{pmatrix}$. Тогда

$$\varphi(a_i)\varphi(a_j) = P_i P_j = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 a_i & a_2 a_i & \dots & a_n a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 a_j & a_2 a_j & \dots & a_n a_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ (a_1 a_i)a_j & (a_2 a_i)a_j & \dots & (a_n a_i)a_j \end{pmatrix},\quad \varphi(a_i a_j) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1(a_i a_j) & a_2(a_i a_j) & \dots & a_n(a_i a_j) \end{pmatrix}.$$

Полученные подстановки совпадают в силу ассоциативного закона в группе G.

Итак, φ – изоморфизм группы G на множество *H*. По теореме 1 множество *H* является группой – подгруппой группы S_n.

1.13. Ядро гомоморфизма

Пусть φ – гомоморфизм группы G_1 в группу G_2.

Определение 1. Ядром гомоморфизма φ называется множество элементов группы G_1, которые отображаются в нейтральный элемент группы G_2.

Обозначение: $Ker\varphi$. По определению, $Ker\varphi = \{a \in G_1 \mid \varphi(a) = e \in G_2\}$.

Теорема 1. Ядро гомоморфизма является нормальным делителем группы.

Пусть G – группа, $H = Ker\varphi$, где φ – гомоморфизм группы G в группу G_1.

Доказать: $H \trianglelefteq G$.

Доказательство:

1. Покажем, что $H \leq G$.

Воспользуемся критерием подгруппы.

а) для $\forall a, b \in H$ покажем, что $ab \in H$.

Действительно, $a, b \in H \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) = e_1 \in G_1$.

Найдем $\varphi(ab) \overset{\varphi - гомоморф.}{=} \varphi(a)\varphi(b) = e_1 e_1 = e_1 \in G_1$. Поэтому $ab \in H$.

2. Покажем, что $H \trianglelefteq G$, т.е. для $\forall a \in G \;\; aH = Ha$.

Пусть $ah \in aH$. Покажем, что $\exists h_1 a \in Ha$ такой, что $ah = h_1 a$.

Рассмотрим элемент $aha^{-1} \in G$. Найдем его образ при гомоморфном отображении φ:

$\varphi(aha^{-1}) = \varphi(a)\varphi(h)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)e_1\varphi(a^{-1}) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(e) = e_1 \;\Rightarrow\; aha^{-1} \in H$ или $aha^{-1} = h_1 \;\Rightarrow\; ah = h_1 a$. Таким образом, $aH \subseteq Ha$. Аналогично, $Ha \subseteq aH$, следовательно, $aH = Ha$.

Теорема 2. Любая нормальная подгруппа группы G является ядром некоторого гомоморфизма.

Доказательство.

Пусть $H \trianglelefteq G$.

Построим факторгруппу $G/H = \langle H,\; g_1 H,\; g_2 H, \ldots \rangle$.

Зададим отображение $\varphi : G \to G/H$ так, что для $\forall g \in G \quad \varphi(g) = gH$.

Покажем, что φ сохраняет операцию.

Для $\forall g_1, g_2 \in G \quad \varphi(g_1 g_2) = g_1 g_2 H$.

Так как $H \trianglelefteq G$, то $g_1 g_2 H = g_1 H g_2 H = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$.

Таким образом, φ – гомоморфизм.

Покажем, что $H = Ker\varphi$.

Пусть $\forall h \in H \Rightarrow \varphi(h) = hH = H$. Так как H – нейтральный элемент группы G/H, то $H \subseteq Ker\varphi$.

Обратно, пусть $\forall h \in Ker\varphi$. Тогда $\varphi(h) = H$ или $hH = H \Rightarrow h \in H$. Следовательно, $Ker\varphi \subseteq H$.

Значит, $H = Ker\varphi$.

<u>Определение 2</u>. Гомоморфизм $G \to G/H$ называется *естественным гомоморфизмом* группы G.

<u>**Теорема 3**</u>. Гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе по ядру этого гомоморфизма.

Дано: $\varphi : G \to G_1$, φ – гомоморфизм. $H = Ker\varphi$.

Доказать: $G/H \cong G_1$.

Доказательство.

Рассмотрим отображение $\psi : G/H \to G_1$ такое, что $\forall gH \in G/H$ $\psi(gH) = \varphi(g)$. Так как $g \in G$, то $\varphi(g) \in G_1$.

Покажем, что ψ – изоморфизм.

1) Взаимная однозначность ψ.

Пусть $g_1H = g_2H \Rightarrow g_2^{-1}g_1H = H \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in H$.

Так как $H = Ker\varphi$, то $\varphi(g_2^{-1}g_1) = e \in G_1$.

Так как φ – гомоморфизм, то $\varphi(g_2^{-1})\varphi(g_1) = e$ или $(\varphi(g_2))^{-1}\varphi(g_1) = e \Rightarrow \varphi(g_2) = \varphi(g_1)$, то есть $\psi(g_1H) = \psi(g_2H)$.

Обратно: пусть $\psi(g_1H) = \psi(g_2H)$ или $\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Rightarrow (\varphi(g_2))^{-1}\varphi(g_1) = e \in G_1$ $\Rightarrow \varphi(g_2^{-1}g_1) = e \in G_1 \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in H$ или $g_1H = g_2H$.

2) Покажем, что отображение ψ сохраняет операцию.

$\psi(g_1Hg_2H) = \psi(g_1g_2H) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1H)\psi(g_2H)$.

Итак, ψ – изоморфизм.

Замечание. Из теоремы 3 получаем, что любой гомоморфизм группы может быть заменен последовательным выполнением естественного гомоморфизма и какого-либо изоморфизма. Таким образом, имеет смысл изучать только естественные гомоморфизмы и изоморфизмы групп.

ГЛАВА 2. Организация контроля знаний и самостоятельной работы студентов по разделу «Алгебраические структуры с одной бинарной операцией»

2.1. Практические задания для аудиторных занятий и домашних работ

Тема 1. Алгебраическая бинарная операция, ее свойства

1. Определите, какие из операций – сложение, вычитание, умножение, деление – являются алгебраическими на следующих множествах:

   1) $\mathbf{N}$; 2) $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$; 3) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; 4) $\mathbf{Q}$; 5) $\mathbf{Q}^{-0}$; 6) $\{0\}$; 7) $\{0,1\}$; 8) $\{1\}$; 9) $\{1,-1\}$; 10) $\{1,-1,0\}$; 11) $\{2n+1 \mid n \in \mathbf{N}\}$.
2. Укажите, какие из следующих операций являются алгебраическими в трехмерном евклидовом пространстве:
   1) умножение вектора на скаляр;
   2) скалярное произведение векторов;
   3) векторное произведение векторов.
3. В n-мерном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ рассматриваются подмножества M_1, M_2, M_3, M_4:

   $M_1 = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_i \in \mathbf{N}, i = \overline{1,n}\}$; $M_2 = \{(0, a_2, \ldots a_{n-1}, 1) \mid a_i \in \mathbf{Q}, i = \overline{2,n-1}\}$;

   $M_3 = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{2,n}, a_1 \in 2\mathbf{Z}\}$;

   $M_4 = \{(0, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, i = \overline{2,n-1}, a_n \in 2\mathbf{Z}+1\}$.

   На каких из них операция сложения векторов является алгебраической?

   На каких из множеств M_1, M_2, M_3, M_4 операция умножения векторов, заданная следующим образом: для любых векторов $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$, где $\alpha = (a_1, a_2, \ldots a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\alpha\beta = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n)$, является алгебраической?
4. Определите, является ли операция $*$ алгебраической на множестве $\mathbf{R}^+$; какими свойствами она обладает:

   1) $a * b = \dfrac{a+b}{2}$; 2) $a * b = a \cdot b^2$; 3) $a * b = a + b - 1$; 4) $a * b = a^b$;

5) $a*b=\sqrt{a\cdot b}$; 6) $a*b=\log_b a$; 7) $a*b=\max\{a,b\}$; 8) $a*b=|a-b|$.

5. На некотором множестве M задана алгебраическая бинарная операция φ. Будет ли эта операция алгебраической на множестве K, если: 1) $M\subset K$, 2) $K\subset M$. Приведите примеры.
6. Является ли алгебраической операцией умножение матриц на следующих множествах квадратных матриц:

а) диагональных матриц второго порядка $M_1=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a\in\mathbf{R}\right\}$;

б) матриц второго порядка $M_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbf{R}\right\}$;

в) матриц второго порядка $M_3=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbf{R}\right\}$;

г) треугольных матриц третьего порядка

$$M_4=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{ij}\in\mathbf{R}\ \left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}\right)\right\}?$$

Тема 2. Полугруппа, моноид, группа

1. Докажите, что множество $\mathbf{N}$ со следующими операциями является полугруппой:

   а) $a*b=НОД(a,b)$; б) $a*b=НОК(a,b)$; в) $a*b=a$; г) $a*b=1$. Какие из полугрупп являются моноидами?
2. Укажите, какие из следующих подмножеств полугруппы $<\mathbf{C},\cdot>$, являются полугруппами:

   а) $\{2^n \mid n\in\mathbf{Z}\}$; б) $\{2^n \mid n=-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$; в) $\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbf{Z}, a^2+b^2\neq 0\}$;

   г) $\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbf{Q}, a^2+b^2\neq 0\}$; д) $\{z \mid |z|=1\}$; е) $\{z \mid |z|\leq 1\}$; ж) $\{z \mid |z|<1\}$;

   з) $\{z \mid |z|\geq 1\}$; и) $\{z \mid |z|>1\}$; к) $\{z \mid |z|=2\}$; л) $\{z \mid |z|\leq 2\}$; м) $\{z \mid |z|<2\}$;

н) $\{z \mid |z| \geq 2\}$; о) $\{z \mid |z| > 2\}$; п) $\left\{z \mid |z| = \frac{1}{2}\right\}$; р) $\left\{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\right\}$; с) $\left\{z \mid |z| < \frac{1}{2}\right\}$.

Какие из полугрупп являются моноидами? Найдите все обратимые элементы моноидов.

3. Докажите, что множество $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ по операции умножения образует моноид. Найдите все обратимые элементы. Является ли M группой?
4. Образует ли аддитивную группу множество:

   а) $2\mathbf{Z}$; б) $2\mathbf{Z}+1$; в) $\mathbf{Z} \setminus (\mathbf{N} \cup \{0\})$; г) $\mathbf{N} \cup \{0\}$; д) $n\mathbf{Z}$?
5. Образует ли мультипликативную группу множество:

   а) $n\mathbf{Z}$; б) $\mathbf{Q}^+$; в) $\{a^z\}$?
6. Докажите, что каждое из следующих множеств с операцией $\circ$, заданной таблицей Кэли, является группой:

   а) $\{e, a\}$

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

   б) $\{e, a, b\}$

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

7. Определите, является ли множество функций

   $F = \left\{ f_0 = x, f_1 = -x, f_2 = \frac{1}{x}, f_3 = -\frac{1}{x} \right\}$, заданных на $\mathbf{R}^{-0}$, группой относительно операции последовательного выполнения преобразований над переменной x, определяемых этими функциями. Составьте таблицу Кэли.
8. Образует ли алгебра группу:

   а) $<\mathbf{Z}, ->$; б) $<\mathbf{R}^+, \otimes>$, где $a \otimes b = a^b$; в) $<\mathbf{R}^+, \otimes>$, где $a \otimes b = a^2 b^2$; г) $<\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \otimes>$, где $(a,b) \otimes (c,d) = (ac, ad + b)$; д) $<\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}, +>$.
9. Пусть G – группа и $G^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in G\}$. Докажите, что $G^{-1} = G$.

10. Образует ли мультипликативную группу множество квадратных матриц

а) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}^{-0} \right\}$; б) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}^{-0}, b \in \mathbf{R} \right\}$;

в) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}$; г) $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$?

В каком случае группа является абелевой?

Тема 3. Подгруппа группы

1. Докажите, что множество четных чисел является подгруппой аддитивной группы **Z** целых чисел. Является ли множество нечетных чисел подгруппой группы **Z**?
2. Являются ли подгруппами группы $<\mathbf{C}^{-0}, \cdot>$ следующие множества:

   а) **R**; б) $\mathbf{R}^{-0}$; в) $\mathbf{Q}^{-0}$; г) $\mathbf{Z}^{-0}$; д) множество мнимых чисел; е) множество чисел, модуль которых равен 2; ж) все множества задачи 2 темы 2.
3. Известно, что $H_1 \leq G$, $H_2 \leq H_1$. Доказать, что $H_2 \leq G$.
4. Докажите, что для любых подгрупп *A* и *B* абелевой группы *G* произведение $AB=\{ab \mid a \in A, b \in B\}$ есть подгруппа группы *G*.
5. Докажите теорему:

   Непустое подмножество *H* мультипликативной группы *G* образует подгруппу этой группы тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in H$ $a \cdot b^{-1} \in H$.

   Сформулируйте эту теорему для аддитивной группы.
6. Докажите, что если *H* – непустое конечное множество элементов группы *G* и произведение двух любых элементов из *H* принадлежит *H*, то $H \leq G$.
7. Является ли подгруппой группы $<\mathbf{C}^{-0}, \cdot>$ множество

   $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ 1 \right\}$?

Тема 4. Порядок элемента группы. Циклическая подгруппа, циклическая группа

1. В группе невырожденных комплексных матриц 2-го порядка определите порядки следующих элементов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

2. Выпишите все подгруппы группы S_3 (Воспользуйтесь задачей 6 темы 3). Выберите такие подгруппы A и B, что их произведение AB не является ее подгруппой.

3. Мультипликативная группа $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbf{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$невырожденных матриц второго порядка с целыми элементами и определителем, равным 1, содержит матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ порядков 4 и 3 соответственно. Покажите, что $< AB >$ – бесконечная циклическая подгруппа данной группы. Таким образом, произведение двух элементов конечного порядка в группе G не обязано быть элементом конечного порядка. А как обстоит дело в абелевой группе?

4. В мультипликативной группе S_4 найдите циклическую подгруппу, порожденную элементом $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Определите порядок этой подгруппы.

5. В аддитивной группе целых чисел постройте циклическую подгруппу, порожденную числом 7.

6. В группе $\langle C^{-0}, \cdot \rangle$ запишите циклические подгруппы, порожденные элементами а) i, б) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, в) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$. Определите порядки подгрупп.

7. G=<a>. $|a| = 10$. Выпишите все подгруппы группы G.

8. Докажите, что порядки элементов ab и ba мультипликативной группы G равны.

Тема 5. Смежные классы группы по подгруппе
Нормальный делитель, факторгруппа

1. Постройте правый смежный класс группы $G = < \{2^k \mid k \in \mathbf{Z}\}, \cdot >$ по подгруппе $H = < \{4^k \mid k \in \mathbf{Z}\}, \cdot >$, порожденный элементом 2. Запишите общий вид элементов этого класса. Найдите $|G : H|$.
2. Даны: группа подстановок S_3 и ее подгруппа $H = \{a_1, a_2\}$. Связаны ли между собой элементы a_3 и a_4 группы S_3 бинарным отношением ρ относительно подгруппы H? Связаны ли они отношением σ?
3. Постройте смежные классы аддитивной группы $\mathbf{Z}$ по подгруппе $H = 5\mathbf{Z}$. Лежат ли элементы 11 и 134 в одном классе? Приведите пример элементов группы, лежащих в том же классе, что и элемент 23.
4. Постройте левые смежные классы группы самосовмещений правильного треугольника: а) по подгруппе M поворотов треугольника; б) по подгруппе $A = \{e, a\}$, где A – одна из симметрий.
5. Найдите левостороннее разложение знакопеременной группы A_4 по подгруппе $H = \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$. Является ли подгруппа H нормальным делителем?
6. Докажите, что подмножество матриц $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a,\ b \in \mathbf{R},\ a \neq 0 \right\}$ является нормальным делителем мультипликативной группы матриц $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,\ b,\ c \in \mathbf{R},\ a \cdot c \neq 0 \right\}$.
7. Постройте факторгруппу аддитивной группы целых чисел по подгруппе целых чисел, кратных 5. Составьте таблицу сложения элементов факторгруп-

пы. Определите нулевой элемент факторгруппы. Для каждого элемента факторгруппы найдите противоположный.

8. Сколько элементов будет содержать факторгруппа аддитивной группы целых чисел по подгруппе целых чисел, кратных натуральному числу n?
9. Найдите смежные классы аддитивной группы векторов плоскости, выходящих из фиксированной точки O по подгруппе векторов, лежащих на фиксированной прямой, проходящей через точку O. Изобразите классы на плоскости.
10. $G = C_4$, $H \le G$, $H = C_2$. Докажите, что подгруппа H является нормальным делителем группы G. Разложить G по H. Постройте таблицу умножения элементов факторгруппы G/H.
11. Постройте левосторонние и правосторонние разложения группы S_3 по подгруппам $H_1=\{a_1, a_3\}$ и $H_2=\{a_1, a_4, a_5\}$. В каком случае подгруппа является нормальным делителем? Постройте факторгруппу группы S_3 по нормальному делителю. Составьте таблицу умножения элементов факторгруппы.
12. Постройте факторгруппу группы $G=<\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbf{Z}\},+>$ по подгруппе $H=<\{\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}, a,b \in \mathbf{Z}\},+>$. Составьте таблицу сложения элементов факторгруппы. Для каждого элемента факторгруппы найдите противоположный.
13. Постройте факторгруппу группы $G=<\{a + b\sqrt{2}, a,b \in \mathbf{Z}\},+>$ по подгруппе $H=<\{a + b\sqrt{2}, a,b \in 2\mathbf{Z}\},+>$. Составьте таблицу сложения элементов факторгруппы.

Тема 6. Гомоморфизм, изоморфизм групп

1. Даны группы $G_1=<\mathbf{C}^{-0},\times>$, $G_2=<\mathbf{R}^{-0},\times>$. Будет ли отображение φ: $G_1 \to G_2$ гомоморфизмом, если:

а) $\varphi(z)=|z|$; б) $\varphi(z)=|z|+1$; в) $\varphi(z)=1$; г) $\varphi(z)=2$.

2. Дана мультипликативная полугруппа натуральных чисел. Рассматривается отображение φ, при котором образом любого натурального x является число $2x$. Является ли φ изоморфизмом полугруппы натуральных чисел на себя?
3. Даны: множество целых чисел **Z** с операцией умножения и конечное множество $\{-1;0;1\}$ также с операцией умножения. Поставим в соответствие каждому целому положительному числу число 1, каждому отрицательному – число -1, числу 0 – число 0. Будет ли отображение, заданное по этому правилу, являться гомоморфизмом?
4. Задано отображение φ аддитивной группы **Z** на знакопеременную группу $A_3 = \left\{ e, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ следующим образом: для $\forall z \in \mathbf{Z}$: $\varphi(z) = e$, если $z = 3t$, $\varphi(z) = a$, если $z = 3t + 1$, $\varphi(z) = b$, если $z = 3t + 2$, $t \in \mathbf{Z}$. Докажите, что данное отображение будет гомоморфизмом группы **Z** на группу A_3. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Даны группы $G_1 = < M_n(\mathbf{C}), \cdot >$ квадратных невырожденных матриц порядка $n > 1$ и $G_2 = < \mathbf{C}^{-0}, \cdot >$. Будет ли отображение φ: $G_1 \to G_2$ гомоморфизмом, если:

   а) $\varphi(A) = |A|$; б) $\varphi(A) = a_{11}$ (a_{11} – элемент 1-й строки и 1-го столбца матрицы A); в) $\varphi(A) = 1$.
   Если φ – гомоморфизм, найдите его ядро. Будет ли φ изоморфизмом?
6. Докажите, что отображение φ, заданное правилом $\varphi(x) = |x|$, является гомоморфизмом мультипликативной группы $\mathbf{R}^{-0}$ на мультипликативную группу $\mathbf{R}^{+}$. Найдите ядро этого гомоморфизма.
7. Докажите изоморфизм групп:

   а) $5\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}$; б) $< \mathbf{C}^{-0}, \cdot >$ и $<\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \neq 0\}, \cdot >$;

   б) $< \{1\}, \cdot >$ и $<\{0\}, + >$;

   в) $<\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}, a \neq 0\}>$ и $< \mathbf{R}^{-0}, \cdot >$.

2.2. Задачи для организации самостоятельной работы студентов

2.2.1. Алгебраическая бинарная операция, ее свойства. Полугруппа, моноид, группа

1. Докажите, что бинарная операция на множестве **R** действительных чисел, задаваемая формулой $a \mathrm{o} b=(a+b)^2$, является коммутативной, но не ассоциативной.
2. На множестве **R** действительных чисел операция задается формулой: $aob=b$. Имеет ли **R** нейтральный элемент относительно этой операции? Будет ли эта операция ассоциативной?
3. Пусть a и b – фиксированные рациональные числа. Покажите, что операция $\circ$, заданная формулой $x \circ y = ax + by$, где $x, y \in \mathbf{Q}$, является алгебраической бинарной ассоциативной операцией на множестве **Q**.
4. В множестве {1, 2, 3, 4, 5} рассматривается операция обычного вычитания. Составьте таблицу Кэли. Будет ли данная операция являться алгебраической?
5. В множестве, состоящим из элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, операция $x_i o\ x_j$ задана таблицей Кэли:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	x_2	-	-	x_4	x_5	x_6
x_2	x_2	x_2	x_5	x_2	x_1	-
x_3	-	x_3	x_3	x_3	x_3	-
x_4	x_1	x_5	x_2	x_5	x_1	x_1
x_5	x_5	x_5	-	x_2	x_3	x_1
x_6	x_6	x_6	x_2	-	-	x_1

Выясните, для каких x_i определены оба результата $(x_i o x_i) o x_i$ и $x_i o (x_i o x_i)$.

6. Можно ли построить такую таблицу Кэли для множества $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, чтобы $z_i o z_i$ было определено для всех z_i, кроме z_1, для которого $z_1 o z_1$ не определено, и чтобы ни $(z_i o z_j) o z_k$, ни $z_i o (z_j o z_k)$ не были определены ни для какой тройки z_i, z_j, z_k $(i, j, k=1, 2, 3, 4)$? Найдите общий вид такой таблицы.

7. Определите, является ли алгебраической на множестве натуральных чисел операция $aob=\dfrac{a(a+1)+b(b+1)}{2}$.
8. Определите, является ли алгебраической на множестве натуральных чисел операция $aob=a^2–2ab+b^2$?
9. В множестве $\mathbf{R}^+$ задана операция нахождения среднего геометрического, т.е. для $a,\ b\ \in\mathbf{R}^+$ результат aob всегда определен и равен арифметическому значению корня $\sqrt{a\cdot b}$. Выясните, какие из свойств имеют место: 1) коммутативность, 2) ассоциативность, 3) наличие нейтрального и нейтрализующих элементов?
10. Составьте таблицы для операции композиция на следующих группах вращений (поворотов) плоскости, совмещающих с собой:
    а) правильный треугольник;
    б) квадрат;
    в) правильный пятиугольник;
    г) правильный шестиугольник.
11. Пусть P есть совокупность всех подмножеств некоторого непустого множества Ω (в частности, в P включается и пустое множество). Выясните, какими свойствами: 1) коммутативность, 2) ассоциативность, 3) наличие нейтрального и нейтрализующих элементов обладает в P операция а) объединения, б) пересечения, в) разность множеств.
12. Пусть A – группоид с операцией $\circ$. Докажите, что:
    а) если $u,v\in A$ – такие элементы, что для любого $a\in A$ $u\circ a=a$ и $a\circ v=a$, то $u=v$.
    б) если $u,v\in A$ – такие элементы, что для любого $a\in A$ $u\circ a=u$ и $a\circ v=v$, то $u=v$.
13. В мультипликативном моноиде M выбирается произвольный элемент t и вводится новая операция $*$: для $\forall x,y\in M \quad x*y=x\,t$. Покажите, что $<M,*>$ – полугруппа и что обратимость элемента t в M – необходимое и достаточное условие, при выполнении которого $<M,*>$ – моноид с нейтральным элементом t^{-1}.
14. Покажите, что множество $\mathbf{Z}$ с операцией $*$: для $\forall x,y\in\mathbf{Z} \quad x*y=x+y+xy$ является коммутативным моноидом. Что служит в $<\mathbf{Z},*>$ нейтральным элементом? Найдите в $<\mathbf{Z},*>$ все обратимые элементы.
15. В множестве K, состоящем из восьми элементов: 1, -1, i, j, k, -i, -j, -k (здесь знак минус в данный момент не играет никакой другой роли, кроме того, что

служит различительным знаком при задании некоторых элементов), задана операция умножения при помощи таблицы:

$\cdot$	*1*	*-1*	*-i*	*i*	*-j*	*j*	*-k*	*k*
1	*1*	*-1*	*-i*	*i*	*-j*	*j*	*-k*	*k*
-1	*-1*	*1*	*i*	*-i*	*j*	*-j*	*k*	*-k*
i	*i*	*-i*	*1*	*-1*	*-k*	*k*	*j*	*-j*
-i	*-i*	*i*	*-1*	*1*	*k*	*-k*	*-j*	*j*
j	*j*	*-j*	*k*	*-k*	*1*	*-1*	*-i*	*i*
-j	*-j*	*j*	*-k*	*k*	*-1*	*1*	*i*	*-i*
k	*k*	*-k*	*-j*	*j*	*i*	*-i*	*1*	*-1*
-k	*-k*	*k*	*j*	*-j*	*-i*	*i*	*-1*	*1*

Докажите, что *К* является группой.

16. Пусть G – множество всевозможных троек целых чисел вида $(k_1, k_2, 1)$ и $(k_1, k_2,, -1)$. В G определена операция умножения по правилу:

    $(k_1, k_2,, 1)(l_1, l_2,, \varepsilon)=(k_1 + l_1, k_2 + l_2, \varepsilon)$,

    $(k_1, k_2,, -1)(l_1, l_2,, \varepsilon)=(k_1 + l_2,, k_2 + l_1, -\varepsilon)$,

    где $\varepsilon = \pm 1$.

    Докажите, что G является группой.
17. Докажите, что если $a^2=e$ для любого элемента a из группы G, то эта группа абелева.
18. Определите, является ли множество функций

    $F = \left\{ f_0 = x,\, f_1 = \dfrac{1}{x},\, f_2 = 1-x,\, f_3 = \dfrac{x}{x-1},\, f_4 = \dfrac{x-1}{x},\, f_5 = \dfrac{1}{1-x} \right\}$, заданных на $\mathbf{R}^{-0}$,

    группой относительно операции последовательного выполнения преобразований над переменной x, определяемых этими функциями. Составьте таблицу Кэли.
19. Покажите, что множество иррациональностей вида $a + b\sqrt{3}$, $a,b \in \mathbf{Q}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, образует мультипликативную группу.
20. Проверьте, что множество K кватернионов 1, i, j, k с операцией умножения, заданной по правилам:

    $i^2=-1$, $j^2=-1$, $k^2=-1$, $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$, $ji=-k$, $kj=-i$, $ik=-j$, образует группу. Запишите эту группу с помощью таблицы Кэли.

21. Докажите, что всякая группа с четырьмя или меньшим числом элементов абелева.

2.2.2. Подгруппа группы. Порядок элемента группы, циклические подгруппы, циклические группы

1. Докажите, что если все элементы множества H группы G имеют конечные порядки и произведение двух любых элементов из H снова лежит в H, то H будет подгруппой группы G.
2. Пусть A – непустое подмножество мультипликативной группы G. Докажите, что множество $H = \{a \in G \mid aA = Aa\}$ – подгруппа группы G.
3. Пусть $H \leq G$ и $K \leq G$. Докажите, что множество $KH = \{xy \mid x \in K, y \in H\}$ будет подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $KH = HK$.
4. Найдите все подгруппы группы K (см. задачу 15 § 2.1.1).
5. Докажите, что всякая группа 3-го порядка является циклической.
6. Докажите, что группа подстановок третьей степени не является циклической.
7. Докажите, что для любых двух элементов g_1 и g_2 группы G порядки подгрупп $<g_1g_2>$ и $<g_2g_1>$ равны.
8. Докажите, что для любых элементов a, b, c группы G элементы abc, bca и cab имеют одинаковый порядок.
9. Докажите, что элементы a и a^{-1} группы G имеют одинаковые порядки.
10. Докажите, что для любых элементов a и b группы G элементы a и $b^{-1}ab$ имеют одинаковые порядки.
11. Докажите, что если порядок элемента a группы G равен n, то порядок степени a^k тогда равен n, когда $(n,k)=1$.

12. В мультипликативной группе невырожденных квадратных матриц второго порядка с рациональными элементами найдите порядки элементов x, y, $x \cdot t$, $y \cdot z$, $y \cdot t$, где $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
13. В мультипликативной группе невырожденных квадратных матриц второго порядка с комплексными элементами определите порядки следующих элементов:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2+3i & -2+2i \\ 1-i & 3-2i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
14. Найдите все подгруппы циклической группы порядка 24.
15. Пусть x – элемент бесконечного порядка некоторой группы. Докажите, что при любых целых числах $n \neq m$ имеет место $x^n \neq x^m$.
16. Пусть n – порядок конечной группы G. Докажите, что $g^n = e$ для любого $g \in G$.
17. Найдите все подгруппы группы G порядка 8, все элементы которой, кроме единицы e, имеют порядок 2.
18. В аддитивной группе целых чисел постройте циклическую подгруппу, порожденную числом 3.
19. В мультипликативной группе S_4 постройте циклическую подгруппу, порожденную элементом $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Определите порядок этой подгруппы.

2.2.3. Смежные классы, нормальный делитель, факторгруппа

1. Найдите левые смежные классы мультипликативной группы комплексных чисел по подгруппе положительных действительных чисел. Что геометрически представляет собой каждый класс? Будет ли данная подгруппа нормальным делителем?

2. Найдите левые смежные классы мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе положительных действительных чисел. Что геометрически представляет собой каждый класс? Будет ли данная подгруппа нормальным делителем?
3. Докажите, что каждая подгруппа индекса 2 нормальна.
4. Докажите, что $H \trianglelefteq G$ тогда и только тогда, когда при любом $a \in G$ $a^{-1}Ha \subseteq H$.
5. Найдите факторгруппу аддитивной группы целых чисел, кратных 4, по подгруппе чисел, кратных 24.
6. Пусть L –левый смежный класс группы G по подгруппе H. Докажите, что $R = \{g^{-1} \mid g \in L\}$ – правый смежный класс группы G по подгруппе H.
7. Докажите, что если произведение любых двух левых смежных классов группы G по подгруппе H является левым смежным классом, то $H \trianglelefteq G$.
8. Найдите смежные классы группы $G = < \mathbf{R} \times \mathbf{R}, + >$ по подгруппе $H = \{(r,0) \mid r \in \mathbf{R}\}$ и по подгруппе $K = \{(0,r) \mid r \in \mathbf{R}\}$.
9. Докажите, что если $H \trianglelefteq G$, $x, y \in G$ и $xy \in H$, то и $yx \in H$.
10. Докажите, что если $H \trianglelefteq G$, K – произвольная подгруппа группы G, то $KH = HK$ и множество $KH \leq G$.
11. Докажите, что если $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ и $K \cap H = \{e\}$, то $xy = yx$ для $\forall x \in K$ и $\forall y \in H$.
12. Докажите, что если $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, то $H \cap K \trianglelefteq G$ и $HK \trianglelefteq G$.
13. Задано множество G квадратных матриц второго порядка, имеющих вид:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, g_3 \in G_3, g_4 \in G_4 \right\},$$ и подмножество

H, устроенное по тому же принципу (то есть некоторое множество матриц второго порядка).

Покажите, что:

а) G – мультипликативная группа; б) H – нормальный делитель группы G.

Постройте факторгруппу G/H.

1) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{R}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} \mid a\in\mathbf{R}^{-0}\right\};$

2) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{R}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \mid a\in\mathbf{R}^{-0}, b\in\mathbf{R}\right\};$

3) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{R}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{R}\\ 0 & \mathbf{C}_2\end{pmatrix};$

4) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

5) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_2\end{pmatrix};$

6) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_2\end{pmatrix};$

7) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{U}\end{pmatrix};$

8) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix};$

9) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_\mathbf{n} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{U}\end{pmatrix};$

10) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{U}\end{pmatrix};$

11) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{U}\end{pmatrix};$

12) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}_\mathbf{n}\end{pmatrix};$

13) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_2 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

14) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

15) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}_\mathbf{n}\end{pmatrix};$

16) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

26) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{K}_4\end{pmatrix};$

27) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{R}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{R}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

28) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

29) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_2\end{pmatrix};$

30) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_2\end{pmatrix};$

31) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

32) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

33) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_\mathbf{n}\end{pmatrix};$

34) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_\mathbf{n} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_\mathbf{n}\end{pmatrix};$

35) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

36) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_\mathbf{n} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

37) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{U}\end{pmatrix};$

38) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_2 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{U}\end{pmatrix};$

39) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_2 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix};$

40) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{R} & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_2 & 0\\ \mathbf{R} & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

41) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_4\end{pmatrix};$

17) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix};$

18) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}_4\end{pmatrix};$

19) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix};$

20) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_n\end{pmatrix};$

21) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix};$

22) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}_4\end{pmatrix};$

23) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_2\end{pmatrix};$

24) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_n & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

25) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_n & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

42) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

43) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_4 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

44) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{+} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

45) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{-0}\end{pmatrix};$

46) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_4 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}^{-0}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

47) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{R}^{+}\end{pmatrix};$

48) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{U}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_2 & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}_n\end{pmatrix};$

49) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-0} & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{U}\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}\\ 0 & \mathbf{C}_n\end{pmatrix};$

50) $G=\begin{pmatrix}\mathbf{U} & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{K}_4\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_n & 0\\ \mathbf{C} & \mathbf{C}_2\end{pmatrix}.$

2.2.4. Гомоморфизм, изоморфизм групп

1. Покажите, что алгебра положительных чисел с операцией сложения неизоморфна алгебре неотрицательных чисел с операцией сложения.
2. Докажите, что отображение любой группы G на одноэлементную группу G' сохраняет операцию, то есть является гомоморфизмом.
3. Пусть g_0 – некоторый элемент группы G. Поставим в соответствие каждому элементу $g \in G$ снова элемент из G, равный gg_0: $g \to gg_0$. Покажите, что это соответствие задает взаимно однозначное отображение группы G на себя. Покажите также, что если элемент g_0 отличен от единицы группы G, то данное отображение не будет гомоморфизмом.

4. Докажите, что если каждому элементу g группы G поставить в соответствие элемент $g_0^{-1}gg_0$ (g_0 – фиксированный элемент из G), то получится изоморфное отображение группы G на себя.
5. В множестве $M_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ операция $*$ определена таблицей Кэли:

$*$	α	β	γ	δ	ε
α	α	α	α	α	α
β	α	β	γ	α	ε
γ	α	γ	β	β	ε
δ	δ	δ	δ	δ	δ
ε	ε	ε	ε	ε	ε

   На множестве $M_2 = \{-1, 0, 1\}$ рассматривается операция умножения.

   Существуют ли подмножества множества M_1, которые относительно операции, определяемой вышеприведенной таблицей, изоморфны M_2? Каково число таких подмножеств?
6. В множестве $M \subset M_2(\mathbf{R})$, состоящем из всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $x \in \mathbf{R}$, рассматривается операция умножения матриц. Докажите, что относительно этой операции M изоморфно аддитивной группе действительных чисел.
7. Пусть $M_1 = \{x \in Z \mid x > 0\}$, на котором определена операция умножения, $M_2 = \{0; 1\}$. Докажите, что отображение φ множества M_1 на M_2, согласно которому $\varphi(1)=1$, $\varphi(n)=0$ $(n > 1)$, является гомоморфизмом.
8. Пусть M – множество всех ненулевых многочленов с комплексными коэффициентами, рассматриваемое относительно операции умножения многочленов, $\mathbf{C}$ – множество комплексных чисел с операцией умножения. Для нижеследующих отображений φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 множества M в $\mathbf{C}$ выясните, какие из них будут гомоморфизмами:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \ (a_0 \neq 0),$$

1) $\varphi_1(f(x))=a_0$;

2) $\varphi_2(f(x))=\overline{a}_0$ (где $\overline{a}_0$ - комплексное число, сопряженное с a_0);

3) $\varphi_3(f(x))=a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n$;

4) $\varphi_4(f(x))=a_0+a_n$;

5) $\varphi_5(f(x))=|a_n|$;

6) $\varphi_6(f(x))=c^n$ (где c – произвольное отличное от нуля действительное число).

9. Докажите, что изоморфны между собой: 1) $<\mathbf{Z},+>$; 2) $<2\mathbf{Z},+>$; 3) $<n\mathbf{Z},+>$; 4) $<\{a^n \mid a\in\mathbf{R}, a\notin\{0,\pm1\}, n\in\mathbf{Z}\},\cdot>$.

10. Докажите, что группа $<\mathbf{R}^+,\cdot>$ изоморфна группе $<\mathbf{R},+>$.

11. Докажите, что группа $<\mathbf{Q}^+,\cdot>$ не изоморфна группе $<\mathbf{Q},+>$.

12. Докажите, что существуют лишь две неизоморфные группы 4-го порядка и что обе они абелевы.

13. Дана группа $<\{\pm1\},\cdot>$. Проверьте, что на эту группу второго порядка гомоморфно отображаются:

а) аддитивная группа целых чисел;
б) мультипликативная группа действительных чисел.

14. Докажите изоморфизм между аддитивной группой комплексных чисел и аддитивной группой векторов плоскости.

15. Докажите, что мультипликативная группа комплексных чисел изоморфна мультипликативной группе действительных невырожденных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

16. Докажите, что мультипликативная группа $\mathbf{Q}^+$ гомоморфна аддитивной группе $\mathbf{Z}^+$.

17. Докажите, что аддитивная группа $\mathbf{Q}$ неизоморфна мультипликативной группе $\mathbf{Q}$.

2.3. Индивидуальные задания для студентов

Вариант 1

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M=\{-1,\ 1\}$, где для $\forall a,b \in M \quad a*b=a^b$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $M=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbf{R}, a\neq 0\}$, на котором операция умножения задана правилом: $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,ad+b)$, образует мультипликативную группу.
3. Постройте циклическую подгруппу H группы подстановок $G=<S_4,\cdot>$, порожденную элементом $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$, и смежные классы Hb и bH, где $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$.
4. Докажите, что множество $M=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix} \,|\, a\in\mathbf{R}^{-0}\right\}$ образует мультипликативную группу, и что эта группа изоморфна мультипликативной группе действительных чисел.
5. Докажите, что множество векторов плоскости, выходящих из начала координат, образует аддитивную группу, а множество векторов, лежащих на оси ординат – подгруппу этой группы. Найдите смежные классы группы по этой подгруппе.
6. Выясните, является ли подмножество $H=\{6t\,|\,t\in\mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы $G=<\{2t\,|\,t\in\mathbf{Z}\},+>$. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Дана группа $G=<\mathbf{Z},+>$. $H=\{6t\,|\,t\in\mathbf{Z}\}$, $H\leq G$. Найдите множество всех элементов группы G, находящихся в отношении σ с числом $a=5$ относительно подгруппы H.

Вариант 2

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, где для $\forall\alpha=(a,b),\beta=(c,d)\in M \quad \alpha*\beta=(a,b)*(c,d)=(a,c)$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.

2. Докажите, что множество $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$, образует мультипликативную группу.

   Образует ли множество $H = \{a + b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbf{Z}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ подгруппу этой группы?
3. Постройте циклическую подгруппу H группы подстановок $G =< S_4, \cdot >$, порожденную элементом $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, и смежный класс Hb, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Укажите $|a|$.
4. Докажите, что множество $M = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$, на котором операция умножения задана правилом: $(a,b)\cdot(c,d) = (ac + 2bd, ad + bc)$, образует мультипликативную группу, и что эта группа изоморфна мультипликативной группе $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$.
5. Докажите, что подмножество $H = \{15t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ – нормальный делитель группы $G =< \{3t \mid t \in \mathbf{Z}\}, + >$. Разложите группу G по подгруппе H.
6. Постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный, где G – аддитивная группа целых чисел, нормальный делитель $H = \{3t \mid t \in \mathbf{Z}\}$.
7. Даны группа $G =< S_3, \cdot >$ и ее подгруппа $H = \{a_5, a_4, a_1\}$.

   Найдите множество элементов группы G, находящихся в отношении σ с элементом a_2.

<u>Вариант 3</u>

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $\mathbf{C}$, где для $\forall a,b \in \mathbf{C}$ $a * b = c$, где c – корень уравнения $ax + b = 0$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbf{R}, |A| \neq 0 \right\}$, образует мультипликативную группу.

   Образует ли подмножество $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}^{-0} \right\}$ подгруппу этой группы?

3. Найдите порядок элемента $a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\in S_4$, постройте циклическую подгруппу H группы подстановок $G=<S_4,\cdot>$, порожденную элементом a, и левый смежный класс bH, где $b=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.
4. Докажите, что множество $M=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$, на котором операция сложения задана правилом: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, образует аддитивную группу, и что эта группа гомоморфна аддитивной группе диагональных матриц $G=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbf{Q}\right\}$.
5. Даны группа $G=<\mathbf{Z},+>$ и ее подгруппа $H=\{6t\mid t\in\mathbf{Z}\}$. Находятся ли элементы a и b в отношении ρ, если: 1) $a=-35,\ b=72$, 2) $a=48,\ b=-12$, 3) $a=35,\ b=-7$.
6. Выясните, является ли подмножество $H=\{9t\mid t\in\mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы $G=<\{3t\mid t\in\mathbf{Z}\},+>$. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Даны группа $G=<S_3,\cdot>$ и ее подгруппа $H=\{a_5,a_4,a_1\}$. Находятся ли элементы 1) a_1,a_2; 2) a_2,a_3; 3) a_6,a_4 в отношении ρ?

<u>Вариант 4</u>

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M=\{(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\mid\alpha,\beta\in\mathbf{Z},\gamma\in 2\mathbf{Z}\}$, где для $\forall a=(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1), b=(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)\in M$ $a*b=(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)*(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)=(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2,\ \gamma_1\gamma_2)$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество квадратных невырожденных матриц n-го порядка с действительными элементами образует мультипликативную группу. Образует ли подмножество квадратных невырожденных матриц n-го порядка с целыми элементами подгруппу этой группы?
3. Найдите порядок элемента $a_4\in S_3$, постройте циклическую подгруппу H группы подстановок $G=<S_3,\cdot>$, порожденную элементом a_4, и смежные классы a_6H и Ha_6.

4. Докажите, что отображение $\varphi :< \mathbf{R}^3,+ > \to < \mathbf{R}^3,+ >$, при котором для $\forall x = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ $\varphi(x) = (a_1, 0, a_3)$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Дана группа $G =< \mathbf{Q}^{-0}, \cdot >$. Докажите, что подмножество $H = \{2^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ является подгруппой группы G. Постройте смежные классы bH и Hb, где $b = \frac{1}{5}$.
6. Выясните, является ли подмножество $H = \{18t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы $G =< \{3t \mid t \in \mathbf{Z}\}, + >$. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Даны группа $G =< S_4, \cdot >$ и ее подгруппа $H = \{e, a\}$, где $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

   Находятся ли элементы 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ в отношении ρ?

Вариант 5

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M = \{(\alpha, \quad \beta, \quad 0) \mid \alpha \in \mathbf{Z}, \beta \in 2\mathbf{Z}+1\}$, где для
   $\forall a = (\alpha_1, \quad \beta_1, \quad 0), b = (\alpha_2, \quad \beta_2, \quad 0) \in M$
   $a * b = (\alpha_1, \quad \beta_1, \quad 0) * (\alpha_2, \quad \beta_2, \quad 0) = (\alpha_1\alpha_2, \quad \beta_1 + \beta_2 - 1, \quad 0)$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ образует аддитивную группу.

   Образуют ли подмножества $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{Z} \right\}$ и $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{Z} \right\}$ подгруппы этой группы?

3. Найдите порядок элемента ε_2 мультипликативной группы C_8. Постройте циклическую подгруппу H, порожденную этим элементом и смежный класс $\varepsilon_3 H$.
4. Пусть $M = \{2^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Докажите, что отображение $\varphi : < \mathbf{Z}, + > \to < M, \cdot >$, при котором для $\forall a \in \mathbf{Z}$ $\varphi(a) = 2^a$, является изоморфизмом.
5. Докажите, что $H = \{a_1, a_2\}$ – подгруппа группы $G =< S_3, \cdot >$. Постройте смежные классы Ha_4 и $a_4 H$.
6. Выясните, является ли подмножество $H = \{10t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы $G =< \{5t \mid t \in \mathbf{Z}\}, + >$. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Пусть G – аддитивная группа целых чисел, $H = \{8t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ – ее подгруппа. Находятся ли элементы 1) -146 и 82, 2) 97 и 161, 3) -28 и 67 в отношении ρ?

Вариант 6

1. Является ли операция умножения матриц алгебраической бинарной на множестве $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N} \right\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. На множестве $M = \{a, b, c, d\}$ операция умножения задана таблицей:

.	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

Докажите, что $< M, \cdot >$ – группа. Найдите все подгруппы этой группы.

3. Найдите порядок элемента $a_4 \in S_3$. Постройте циклическую подгруппу H, порожденную этим элементом, и смежные классы Ha_5 и $a_5 H$.
4. Докажите, что отображение $\varphi : < \mathbf{R}^3, + > \to < \mathbf{R}^2, + >$, при котором для $\forall x = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ $\varphi(x) = (a_1, a_3)$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что $H = \{\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6\}$ – подгруппа группы $G =< C_8, \cdot >$.

6. Докажите, что множество $G=\{2t \mid t\in \mathbf{Z}\}$ образует аддитивную группу. Выясните, является ли подмножество $H=\{4t \mid t\in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем данной группы. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Пусть G – аддитивная группа целых чисел, $H=\{3t \mid t\in \mathbf{Z}\}$ – ее подгруппа. Находятся ли элементы 1) -68 и -32 , 2) 35 и -58 , 3) 213 и 27 в отношении σ?

Вариант 7

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M=\{(\alpha,\ \ \beta,\ \ 1) \mid \alpha\in \mathbf{Z}, \beta\in 2\mathbf{Z}\}$, где для $\forall a=(\alpha_1,\ \ \beta_1,\ \ 1), b=(\alpha_2,\ \ \beta_2,\ \ 1)\in M$ $a*b=(\alpha_1,\ \ \beta_1,\ \ 1)*(\alpha_2,\ \ \beta_2,\ \ 1)=(\alpha_1\alpha_2,\ \ \beta_1+\beta_2+2,\ \ 1)$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Z}\right\}$ образует аддитивную группу. Образует ли подмножество $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in 3\mathbf{Z}\right\}$ подгруппу этой группы?
3. Найдите порядок элемента $a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\in S_4$, постройте циклическую подгруппу H группы подстановок $G=<S_4,\cdot>$, порожденную элементом a, и смежный класс bH, где $b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$.
4. Пусть $M=\{ax+b \mid a,b\in \mathbf{R}\}$.
   Докажите, что отображение $\varphi :<M,+>\to<\mathbf{R},+>$, при котором для $\forall \alpha\in M$, где $\alpha=ax+b$, $\varphi(\alpha)=b$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что подмножество $H=\{a_5, a_4, a_1\}$ – подгруппа группы $G=<S_3,\cdot>$. Постройте смежные классы Ha_3 и a_2H .
6. Докажите, что $G=<\{5t \mid t\in \mathbf{Z}\},+>$ – группа. Выясните, является ли подмножество $H=\{20t \mid t\in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы G. Если является, то

постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.

7. Пусть G – аддитивная группа целых чисел, $H=\{4t \mid t\in \mathbf{Z}\}$ – ее подгруппа. Находятся ли элементы 1) -67 и -12, 2) 32 и -52, 3) 211 и -27 в отношении σ?

Вариант 8

1. Является ли операция сложения алгебраической бинарной на множестве $M=\{-1,\ 1,\ 0\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{Z}\right\}$ образует аддитивную группу. Образует ли подмножество $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in 2\mathbf{Z}\right\}$ подгруппу этой группы?
3. Найдите порядок элемента ε_4 мультипликативной группы C_{12}. Постройте циклическую подгруппу H, порожденную этим элементом, и смежный класс $\varepsilon_5 H$.
4. Докажите, что отображение $\varphi: <\mathbf{R}^4,+> \to <\mathbf{R}^2,+>$, при котором для $\forall x=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in \mathbf{R}^4$ $\varphi(x)=(a_1,a_3)$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что подмножество $H=\{a_2,a_1\}$ – подгруппа группы $G=<S_3,\cdot>$. Постройте левый смежный класс $a_4 H$.
6. Дана группа $G=<\{4t \mid t\in \mathbf{Z}\},+>$. Выясните, является ли подмножество $H=\{8t \mid t\in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы G. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. Пусть G – аддитивная группа целых чисел, $H=\{7t \mid t\in \mathbf{Z}\}$ – ее подгруппа. Найдите множество чисел, находящихся в отношении ρ с числом $a=4$ относительно подгруппы H.

Вариант 9

1. Является ли операция умножения алгебраической бинарной на множестве $M=\{-1,\ 1,\ 0\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.

2. Докажите, что множество $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ образует аддитивную группу. Образует ли подмножество $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{Q} \right\}$ подгруппу этой группы?
3. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную элементом *a*, и смежный класс bH, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Пусть $G = < M, + >$ – аддитивная группа, где $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$. Докажите, что отображение $\varphi : G \to G$, при котором для $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$, $\varphi(A) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что подмножество $H = \{1, -1\}$ образует подгруппу мультипликативной группы действительных чисел. Постройте смежный класс aH, где $a = 5$.
6. Дана группа $G = < \{2t \mid t \in \mathbf{Z}\}, + >$. Выясните, является ли подмножество $H = \{12t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы *G*. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. Пусть G – аддитивная группа целых чисел, $H = \{7t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ – ее подгруппа. Находятся ли числа а) -61 и -32, б) 40 и -58, в) 14 и 27 в бинарном отношении σ?

Вариант 10

1. Является ли операция умножения матриц алгебраической бинарной на множестве $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \mid a \in 2\mathbf{Z}, b \in 2\mathbf{Z} + 1 \right\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.

2. Докажите, что множество $M=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{Q}, a^2+b^2\neq 0\}$, на котором операция умножения задана правилом: $(a,b)\cdot(c,d)=(ac+3bd, ad+bc)$, образует мультипликативную группу.
3. Найдите порядок элемента ε_3 мультипликативной группы C_{12}. Постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную этим элементом, и смежный класс $\varepsilon_6 H$.
4. Докажите, что отображение $\varphi :< \mathbf{R}^4, + > \to < \mathbf{R}^2, + >$, при котором для $\forall x=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbf{R}^4$ $\varphi(x)=(a_2,a_3)$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что подмножество $H=\{a_1,a_3\}$ – подгруппа группы $G=< S_3, \cdot >$. Постройте смежный класс $a_4 H$.
6. Выясните, является ли подмножество $H=\{15t\mid t\in\mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы $G=<\{5t\mid t\in\mathbf{Z}\},+>$. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. $G=<\mathbf{Z},+>$, $H=\{6t\mid t\in\mathbf{Z}\}$, $H\leq G$. Найдите множество всех элементов группы *G*, находящихся в отношении ρ с числом $a=3$ относительно подгруппы *H*.

Вариант 11

1. Является ли операция умножения алгебраической бинарной на множестве $M=\{a+b\sqrt{7}\mid a\in 2\mathbf{Z}+1, b\in 2\mathbf{Z}\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Является ли множество *H* всех мнимых чисел подгруппой а) аддитивной, б) мультипликативной группы комплексных чисел?
3. Найдите порядок элемента $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную элементом *a*, и смежный класс Hb, где $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$.
4. Пусть $M=\{3^k\mid k\in\mathbf{Z}\}$. Докажите, что отображение $\varphi :<\mathbf{Z},+>\to< M,\cdot >$, при котором для $\forall a\in\mathbf{Z}$ $\varphi(a)=3^a$, является изоморфизмом.

5. Докажите, что множество $H = \{(a,0) \mid a \in \mathbf{Z}\}$ образует подгруппу группы $G =< \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z}\},+ >$, где операция сложения задана правилом: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$. Постройте смежный класс $\alpha + H$, где $\alpha = (1,1)$.
6. Дана группа $G =< \{5t \mid t \in \mathbf{Z}\},+ >$. Выясните, является ли подмножество $H = \{25t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы G. Если является, то постройте факторгруппу G/H.
7. $G =< S_3, \cdot >$, $H = \{a_2, a_1\}$ – подгруппа группы G. Находятся ли элементы 1) a_1 и a_4 , 2) a_2 и a_5 в отношении ρ?

<u>Вариант 12</u>

1. Является ли операция умножения подстановок алгебраической бинарной на множестве $K = \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subset S_4$.

   Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество квадратных невырожденных матриц n-го порядка с действительными элементами образует мультипликативную группу. Образует ли подмножество квадратных невырожденных матриц n-го порядка с действительными элементами, определители которых равны 1, подгруппу этой группы?
3. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H,* порожденную элементом *a.* Чему равен порядок этой группы?
4. Пусть G – мультипликативная абелева группа. Докажите, что отображение $\varphi : G \to G$, при котором для $\forall x \in G \quad \varphi(x) = x^{-1}$, является изоморфизмом группы G на себя.
5. Докажите, что множество $H = \{5t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ является подгруппой аддитивной группы целых чисел. Постройте левый смежный класс $-7 + H$. Разложите группу $< \mathbf{Z},+ >$ по подгруппе *H.*
6. Выясните, является ли подмножество $H = \{6t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы $G =< \{3t \mid t \in \mathbf{Z}\},+ >$. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. $G =< S_3, \cdot >$, $H = \{a_2, a_1\}$, $H \le G$. Найдите множество всех элементов группы G, находящихся в отношении ρ с элементом a_4 относительно подгруппы *H.*

Вариант 13

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M = \{(\alpha, \quad \beta, \quad \gamma) \mid \alpha, \gamma \in \mathbf{Z}, \beta \in 2\mathbf{Z}\}$,
   где для $\forall a = (\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1), b = (\alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2) \in M$
   $a * b = (\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1) * (\alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2) = \left(\alpha_1 - \alpha_2, \quad \dfrac{\beta_1\beta_2}{2}, \quad \gamma_1 + \gamma_2\right)$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z}\right\}$ образует аддитивную группу. Найдите какие-либо подгруппы этой группы, отличные от M и нулевой подгруппы. Постройте циклическую подгруппу, порожденную элементом $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найдите порядок элемента ε_4 мультипликативной группы C_{12}. Постройте циклическую подгруппу H, порожденную этим элементом.
4. Пусть a и b – действительные числа. Рассматривается множество линейных функций $M = \{ax + b \mid x \in \mathbf{R}\}$. Докажите, что отображение $\varphi :< M, + > \to < \mathbf{R}, + >$, при котором для $\forall \alpha \in M$, где $\alpha = ax + b$, $\varphi(\alpha) = a$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что подмножество $H = \{(a_1, 0, a_3) \mid a_1, a_3 \in \mathbf{R}\}$ образует подгруппу группы $< \mathbf{R}^3, + >$. Постройте смежный класс $x + H$, где $x = (3, 1, -4)$.
6. Дана группа $G =< \{2t \mid t \in \mathbf{Z}\}, + >$. Выясните, является ли подмножество $H = \{8t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы G. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. $G =< S_3, \cdot >$, $H = \{a_2, a_1\}$ – подгруппа группы G. Находятся ли элементы 1) a_1 и a_3, 2) a_5 и a_4, 3) a_3 и a_4 в отношении ρ?

Вариант 14

1. Является ли операция вычитания алгебраической бинарной на множестве $M = \{-4, -3, -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Найдите все подгруппы мультипликативной группы C_8.

3. Найдите порядок элемента $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H,* порожденную элементом *a,* и смежные классы Hb и bH, где $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$.
4. Пусть $M=(a,b)|\,a,b\in\mathbf{Z}\}$ и операция сложения задана правилом: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$. Докажите, что $<M,+>$ – группа, и что она изоморфна аддитивной группе диагональных матриц $<Z_2,+>$, где $Z_2=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}|\,a,b\in\mathbf{Z}\right\}$.
5. Докажите, что подмножество $H=\{a_2,a_1\}$ – подгруппа группы $G=<S_3,\cdot>$. Постройте смежные классы a_4H и Ha_4.
6. Выясните, является ли подмножество $H=\{12t\,|\,t\in\mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы $G=<\{3t\,|\,t\in\mathbf{Z}\},+>$. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Дана группа $G=<\mathbf{Z},+>$. $H=\{6t\,|\,t\in\mathbf{Z}\}$, $H\le G$. Находятся ли числа а) 37 и -28, б) 105 и 39, в) -76 и -43 в бинарном отношении ρ?

Вариант 15

1. Является ли операция матричного умножения алгебраической бинарной на множестве $M=\left\{\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}|\,a\in 2\mathbf{Z}\right\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество *M* линейных функций вида $ax+b$, где $a,b\in\mathbf{R}$, образуют аддитивную группу. Докажите, что множество $H=\{ax\,|\,a\in\mathbf{R}\}$ образует подгруппу этой группы.
3. Найдите порядок элемента ε_2 мультипликативной группы C_6. Постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную этим элементом и смежный класс ε_3H.
4. Докажите, что множество $M=\{5^k\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$ образует мультипликативную группу. Докажите, что отображение $\varphi:<\mathbf{Z},+>\to<M,\cdot>$, при котором для $\forall a\in\mathbf{Z}$ $\varphi(a)=5^a$, является изоморфизмом.

5. Докажите, что множество $H=\{7t\mid t\in\mathbf{Z}\}$ является подгруппой аддитивной группы целых чисел. Постройте левый смежный класс $-3+H$.
6. Дана группа $G=<\{2t\mid t\in\mathbf{Z}\},+>$. Выясните, является ли подмножество $H=\{10t\mid t\in\mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы *G*. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. Дана группа $G=<S_3,\cdot>$. $H=\{a_1,a_3\}$, $H\le G$. Находятся ли элементы 1) a_3 и a_4, 2) a_5 и a_6, 3) a_2 и a_4 в отношении σ?

<u>Вариант 16</u>

1. Является ли операция нахождения наибольшего общего делителя двух чисел алгебраической бинарной на множестве нечетных натуральных чисел? Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbf{Z}\right\}$ образует аддитивную группу, а подмножество $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}\mid a\in 2\mathbf{Z}, b\in 3\mathbf{Z}\right\}$ – подгруппа этой группы.
3. Найдите порядок элемента ε_4 мультипликативной группы C_{12}. Постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную этим элементом, и смежный класс $\varepsilon_7 H$.
4. Докажите, что отображение $\varphi:<\mathbf{R}^4,+>\to<\mathbf{R}^2,+>$, при котором для $\forall x=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbf{R}^4$ $\varphi(x)=(a_2,a_4)$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что подмножество $H=\{a_2,a_1\}$ – подгруппа группы $G=<S_3,\cdot>$. Постройте смежные классы a_5H и Ha_5.
6. Дана группа $G=<\{4t\mid t\in\mathbf{Z}\},+>$. Выясните, является ли подмножество $H=\{12t\mid t\in\mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы *G*. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. Даны мультипликативная группа $G=C_{12}$ и $H=\{\varepsilon_0,\varepsilon_4,\varepsilon_8\}$ – ее подгруппа. Находятся ли элементы 1) ε_7 и ε_3, 2) ε_2 и ε_5, 3) ε_{11} и ε_7 в отношении ρ?

Вариант 17

1. Является ли операция умножения матриц алгебраической бинарной на множестве $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{Z} \right\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $M = \{2^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ образует мультипликативную группу. Найдите какую-либо подгруппу этой группы, отличную от единичной и самой группы.
3. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H,* порожденную элементом *a,* и смежные классы Hb и bH, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Докажите, что подмножество $H = \{1\}$ образует подгруппу мультипликативной группы действительных чисел, постройте левый смежный класс $3H$.
5. Докажите, что отображение $\varphi : < \mathbf{R}^+, \cdot > \to < \mathbf{R}, + >$, при котором для $\forall x \in \mathbf{R}^+$ $\varphi(x) = \lg x$, является изоморфизмом.
6. Докажите, что множество $G = \{4t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ образует аддитивную группу. Выясните, является ли подмножество $H = \{16t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем данной группы. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Пусть G – аддитивная группа целых чисел, $H = \{7t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ – ее подгруппа. Находятся ли элементы 1) 22 и -48 , 2) -37 и 26 , 3) 125 и 55 в отношении ρ?

Вариант 18

1. Является ли операция умножения матриц алгебраической бинарной на множестве $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbf{Z} \right\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что $< \mathbf{C}^{-0}, \cdot >$ – абелева группа, а подмножество $H = \{1, -1, i, -i\}$ – подгруппа этой группы.

3. Найдите порядок элемента ε_4 мультипликативной группы C_{12}. Постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную этим элементом, и смежный класс $H\varepsilon_9$.
4. Докажите, что отображение $\varphi :< \mathbf{R}^2,+> \to < \mathbf{R}^3,+>$, при котором для $\forall x = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \varphi(x) = (a_1, 0, a_2)$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что подмножество $H = \{a_1, a_2\}$, где $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ – подгруппа группы $G =< S_4, \cdot >$. Постройте смежные классы bH и Hb, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Дана группа $G =< \{4t \mid t \in \mathbf{Z}\},+>$. Выясните, является ли подмножество $H = \{20t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы *G*. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. Дана группа $G =< S_3, \cdot >$. $H = \{a_5, a_4, a_1\}$, $H \le G$. Находятся ли элементы 1) a_3, a_4, 2) a_6, a_2, 3) a_3, a_2 в отношении ρ?

<u>Вариант 19</u>

1. Является ли операция умножения алгебраической бинарной на множестве $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in 2\mathbf{Z}, b \in 2\mathbf{Z} + 1\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Образует ли мультипликативную группу а) множество квадратных невырожденных матриц *n*-го порядка с целыми элементами; б) множество квадратных невырожденных матриц *n*-го порядка с целыми элементами, определитель которых равен 1.
3. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную элементом *a*, и смежные классы Hb и bH, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Докажите, что отображение $\varphi :< \mathbf{Z},+ > \to < \mathbf{Z},+ >$, при котором для $\forall x \in \mathbf{Z}$ $\varphi(x) = -x$, является изоморфизмом.
5. Докажите, что подмножество $H = \{a_2, a_1\}$ – подгруппа группы $G =< S_3,\cdot >$. Постройте левостороннее разложение группы *G* по подгруппе *H*.
6. Докажите, что множество $G = \{7t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ образует аддитивную группу. Выясните, является ли подмножество $H = \{21t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем данной группы. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Пусть G – аддитивная группа целых чисел, $H = \{5t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ – ее подгруппа. Находятся ли элементы 1) 27 и -48 , 2) 85 и 17 , 3) -13 и 82 в отношении ρ?

Вариант 20

1. Является ли операция умножения матриц алгебраической бинарной на множестве $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix} \mid a_{21}, a_{31}, a_{32} \in \mathbf{Z} \right\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $M = \{a + b\sqrt{5} \mid a,b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$, образует мультипликативную группу.

   Образует ли множество $H = \{a + b\sqrt{5} \mid a,b \in \mathbf{Q}^+, a^2 + b^2 \neq 0\}$ подгруппу этой группы?
3. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H,* порожденную элементом *a,* и смежный класс bH, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Является ли отображение $\varphi :< \mathbf{Z},+ > \to < 3\mathbf{Z},+ >$, при котором для $\forall x \in \mathbf{Z}$ $\varphi(x) = 3x$, изоморфизмом?
5. Докажите, что множество $H = \{(0,a) \mid a \in \mathbf{Z}\}$ образует подгруппу группы $G =< \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z}\},+ >$, где операция сложения задана правилом: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$. Постройте левый смежный класс $\alpha + H$, где $\alpha = (-2,4)$.

6. Докажите, что множество $G = \{10t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ образует аддитивную группу. Выясните, является ли подмножество $H = \{30t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем данной группы. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Дана группа $G = < \mathbf{R}^{-0}, \cdot >$. $H = \mathbf{Q}^{-0}$, $H \le G$. Найдите множество действительных чисел, находящихся в отношении ρ с числом $a = 2\sqrt{3}$.

Вариант 21

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M = \{(\alpha, \quad \beta, \quad \gamma) \mid \alpha \in \mathbf{N}, \beta \in \mathbf{Z}, \gamma \in \mathbf{Q}\}$, где для $\forall a = (\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1), b = (\alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2) \in M$ $a * b = (\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1) * (\alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_1\beta_2, \quad \gamma_1 - \gamma_2)$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$, состоящее из подстановок $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ образует мультипликативную абелеву группу. Составьте таблицу умножения элементов группы. Выпишите все подгруппы этой группы.
3. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H,* порожденную элементом *a,* и смежные классы Hb и bH, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Докажите, что отображение $\varphi : < \mathbf{R}^{-0}, \cdot > \to < \mathbf{R}^{+}, \cdot >$, при котором для $\forall x \in \mathbf{R}^{-0}$ $\varphi(x) = |x|$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что множество целых степеней числа 3 является подгруппой мультипликативной группы $\mathbf{Q}^{-0}$. Является ли она циклической? Каков порядок элемента, порождающего эту группу?
6. Дана группа $G = < \{8t \mid t \in \mathbf{Z}\}, + >$. Выясните, является ли подмножество $H = \{24t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы *G*. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов фактор-

группы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.

7. Дана группа $G = < 3\mathbf{Z}, + >$. $H = \{9t \mid t \in \mathbf{Z}\}$, $H \leq G$. Найдите множество всех элементов группы *G*, находящихся в отношении σ с числом $a = 6$ относительно подгруппы *H*.

<u>Вариант 22</u>

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{C}\}$, где для $\forall a = (\alpha_1, \beta_1), b = (\alpha_2, \beta_2) \in M$ $a * b = (\alpha_1, \beta_1) * (\alpha_2, \beta_2) = (|\alpha_2 \cdot \beta_2|, \alpha_1 + \beta_1 i)$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. На множестве $\mathbf{Q}^{-0}$ операция $\circ$ задана следующим образом: для $\forall a, b \in \mathbf{Q}^{-0}$ $a \circ b = \dfrac{a \cdot b}{2}$. Докажите, что $\mathbf{Q}^{-0}$ относительно операции $\circ$ образует группу. Является ли подгруппой этой группы $\mathbf{Z}^{-0}$?
3. В аддитивной группе кольца классов вычетов по модулю 24 найдите порядок элемента $\mathbf{Z}_3$. Постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную этим элементом, и смежный класс $\mathbf{Z}_5 + H$.
4. Будет ли отображение $\varphi :< \mathbf{R}^4, + > \to < \mathbf{R}, + >$, при котором для $\forall x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4$ $\varphi(x) = a_1 \cdot a_2$, являться гомоморфизмом?
5. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$. Постройте циклическую подгруппу *H* группы S_6, порожденную этим элементом.
6. Дана группа $G = < \{6t \mid t \in \mathbf{Z}\}, + >$. Выясните, является ли подмножество $H = \{24t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы *G*. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. Даны мультипликативная группа комплексных чисел и ее подгруппа $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$. Находятся ли элементы 1) $2\sqrt{3}$ и $-3\sqrt{6}$, 2) 1 и $2\sqrt{5}$, 3) $3 - \sqrt{2}$ и $-2 + \sqrt{3}$ в отношении ρ?

<u>Вариант 23</u>

1. Является ли операция умножения матриц алгебраической бинарной на множестве $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество $M = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$, образует мультипликативную группу. Образует ли множество $H = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbf{Z}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ подгруппу этой группы?
3. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$, постройте циклическую подгруппу *H,* порожденную элементом *a,* и смежные классы Hb и bH, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Пусть $G =< M, + >$ – аддитивная группа, где $M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z} \right\}$. Докажите, что отображение $\varphi :< \mathbf{R}^3, + > \to < M, + >$, при котором для $\forall x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{R}^3$ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, является изоморфизмом.
5. Докажите, что $H = \{\varepsilon_0, \varepsilon_3, \varepsilon_6, \varepsilon_9\}$ – подгруппа группы $G =< C_{12}, \cdot >$.
6. Дана группа $G =< \{7t \mid t \in \mathbf{Z}\}, + >$. Выясните, является ли подмножество $H = \{28t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы *G*. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. Даны мультипликативная группа комплексных чисел и ее подгруппа – мультипликативная группа действительных чисел. Находятся ли элементы 1) $\frac{-2-i}{5}$ и $1+2i$, 2) $1-3i$ и $\frac{2i}{7}$, в отношении ρ?

Вариант 24

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M = \{x_1, x_2, x_3\}$, где $x_1 * x_2 = x_3$, $x_2 * x_3 = x_1$, $x_1 * x_3 = x_2$, $x_1 * x_1 = x_1$, $x_2 * x_2 = x_2$, $x_3 * x_3 = x_3$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.

2. Докажите, что множество квадратных матриц второго порядка $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}^{-0}, b \in \mathbf{C}, c \in \mathbf{U} \right\}$ образует мультипликативную группу.
3. Найдите порядок элемента ε_8 мультипликативной группы C_{12}. Постройте циклическую подгруппу *H*, порожденную этим элементом, и смежный класс $H\varepsilon_2$.
4. Пусть $M = \{-1;\ 1\}$. Докажите, что отображение $\varphi :< \mathbf{R}^{-0}, \cdot > \to < M, \cdot >$, при котором для $\forall x \in \mathbf{R}^{-0}$ $\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x > 0; \\ -1, \text{если } x < 0 \end{cases}$, является гомоморфизмом. Найдите ядро этого гомоморфизма.
5. Докажите, что множество, состоящее из матриц $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, является подгруппой мультипликативной группы невырожденных матриц второго порядка. Является ли эта подгруппа абелевой? Циклической? Найдите все подгруппы этой группы.
6. Докажите, что множество $G = \{9t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ образует аддитивную группу. Выясните, является ли подмножество $H = \{27t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем данной группы. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.
7. Даны аддитивная группа комплексных чисел и ее подгруппа – аддитивная группа действительных чисел. Находятся ли элементы 1) $2+3i$ и $-3-3i$, 2) $7+5i$ и $2+5i$, 3) $2-2i$ и $2-2i$, в отношении σ?

<u>Вариант 25</u>

1. Является ли операция нахождения наименьшего общего кратного двух чисел алгебраической бинарной на множестве четных натуральных чисел? Если да, то определите, какими свойствами она обладает.
2. Докажите, что множество квадратных матриц второго порядка $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}^{-0}, b \in \mathbf{C}, c \in \mathbf{R}^{-0} \right\}$ образует мультипликативную группу.
3. В аддитивной группе кольца классов вычетов по модулю 15 найдите порядок элемента $\mathbf{Z}_4$. Постройте циклическую подгруппу H, порожденную этим элементом, и смежный класс $\mathbf{Z}_7 + H$.

4. Докажите, что множество $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a\in\mathbf{R}^{-0}\right\}$ образует мультипликативную группу, и что эта группа изоморфна мультипликативной группе действительных чисел.
5. Докажите, что множество целых степеней числа 7 является подгруппой мультипликативной группы $\mathbf{R}^{-0}$. Является ли она циклической? Каков порядок элемента, порождающего эту группу?
6. Дана группа $G=<\{6t \mid t\in\mathbf{Z}\},+>$. Выясните, является ли подмножество $H=\{30t \mid t\in\mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы G. Если является, то постройте факторгруппу G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента ему противоположный.
7. Даны аддитивная группа комплексных чисел и ее подгруппа – аддитивная группа рациональных чисел. Находятся ли элементы 1) $\frac{\sqrt{2}}{3}-2i$ и $\frac{1}{3}-2i$, 2) $\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{7}{9}i$ и $-\frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{9}i$, 3) $\frac{2}{7}-i$ и $\frac{3}{10}-i$, в отношении σ?

2.4. Пример оформления варианта индивидуальных заданий

1. Является ли операция $*$ алгебраической бинарной на множестве $M=\{(a,b) \mid a\in 3\mathbf{Z}, b\in\mathbf{Z}\}$, где для $\forall\alpha=(a,b),\beta=(c,d)\in M$ $\alpha*\beta=(a,b)*(c,d)=\left(\frac{ac}{3},b+d\right)$. Если да, то определите, какими свойствами она обладает.

   Решение.

   Обозначим $\gamma=\alpha*\beta=\left(\frac{ac}{3},b+d\right)$. По определению операции $*$, результат

γ существует и определяется однозначно для любых $\alpha,\beta\in M$ (в силу однозначности операций сложения и умножения целых чисел). Выясним, принадлежит ли γ множеству M.

Так как $a\,\vdots\,3$ и $c\,\vdots\,3$, то $ac\,\vdots\,9$, поэтому $\frac{ac}{3}\,\vdots\,3$ и $\frac{ac}{3}\in 3\mathbf{Z}$. Так как $b,d\in\mathbf{Z}$, то $b+d\in\mathbf{Z}$. Следовательно, $\gamma\in M$.

Итак, операция $*$ является алгебраической бинарной на множестве M.

Проверим, какими свойствами она обладает.

1) Ассоциативность. Для $\forall\alpha=(a,b),\beta=(c,d),\gamma=(f,g)\in M$

$$\alpha*(\beta*\gamma)=(a,b)*((c,d)*(f,g))=(a,b)*\left(\frac{cf}{3},d+g\right)=\left(\frac{a\frac{cf}{3}}{3},b+(d+g)\right)=$$

$$\left(\frac{a(cf)}{9},b+(d+g)\right)=\left(\frac{(ac)f}{9},(b+d)+g\right)=\left(\frac{\frac{(ac)}{3}f}{3},(b+d)+g\right)=$$

$$\left(\frac{ac}{3},b+d\right)*(f,g)=((a,b)*(c,d))*(f,g)=(\alpha*\beta)*\gamma.$$

2) Коммутативность. Для $\forall\alpha=(a,b),\beta=(c,d)\in M$

$$\alpha*\beta=(a,b)*(c,d)=\left(\frac{ac}{3},b+d\right)=\left(\frac{ca}{3},d+b\right)=(c,d)*(a,b)=\beta*\alpha.$$

3) Наличие нейтрального элемента.

Будем искать его в виде $\varepsilon=(x,y)$. По определению, для $\forall\alpha=(a,b)\in M$

$\alpha*\varepsilon=\varepsilon*\alpha=\alpha$, то есть $\left(\frac{ax}{3},b+y\right)=\left(\frac{xa}{3},y+b\right)=(a,b)$. Откуда получаем, что $\begin{cases}\frac{ax}{3}=\frac{xa}{3}=a;\\ b+y=y+b=b.\end{cases}$ Находим, что элемент $\varepsilon=(3,0)$ является нейтральным.

4) Нейтрализующие элементы. Для элемента $\alpha=(a,b)\in M$ будем искать нейтрализующий элемент в виде $\tilde{\alpha}=(x,y)$. По определению, $\alpha*\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}*\alpha=\varepsilon$, то есть $\left(\frac{ax}{3},b+y\right)=\left(\frac{xa}{3},y+b\right)=(3,0)$. Откуда получаем, что $\begin{cases}\frac{ax}{3}=\frac{xa}{3}=3;\\ b+y=y+b=0.\end{cases}$

Находим, что $y=-b$, а число $x=\frac{9}{a}$. Так как должно выполняться условие: $x\in 3\mathbf{Z}$, то нейтрализующие будут не у всех элементов $\alpha=(a,b)\in M$, а только у пар вида $(\pm 3,b)$.

2. Докажите, что множество $\mathbf{Z}$ образует группу относительно операции $\circ$, заданной формулой $a\circ b=\begin{cases}a+b, & \text{если}\, a\in 2\mathbf{Z}, b\in\mathbf{Z},\\ a-b, & \text{если}\, a\in 2\mathbf{Z}+1, b\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

Решение.

Данная операция $\circ$ является алгебраической бинарной на множестве **Z**, так как сложение и вычитание элементов из **Z** дает в результате элемент из **Z**. Результат операции находится однозначно в силу однозначности сложения и вычитания целых чисел и того, что целое число не может быть одновременно четным и нечетным.

Проверим выполнение аксиом группы.

1) Ассоциативность.

Проанализируем возможные случаи:

а) если $a, b \in 2\mathbf{Z}, c \in \mathbf{Z}$, то

$a \circ (b \circ c) = a + (b + c)$, $(a \circ b) \circ c = (a + b) + c = a + (b + c)$;

б) если $a \in 2\mathbf{Z}, b \in 2\mathbf{Z}+1, c \in \mathbf{Z}$, то

$a \circ (b \circ c) = a + (b - c)$, $(a \circ b) \circ c = (a + b) - c = a + (b - c)$;

в) если $a \in 2\mathbf{Z}+1, b \in 2\mathbf{Z}, c \in \mathbf{Z}$, то

$a \circ (b \circ c) = a - (b + c) = (a - b) - c$, $(a \circ b) \circ c = (a - b) - c$;

г) если $a, b \in 2\mathbf{Z}+1, c \in \mathbf{Z}$, то

$a \circ (b \circ c) = a - (b - c) = (a - b) + c$, $(a \circ b) \circ c = (a - b) + c$.

Итак, операция $\circ$ является ассоциативной на множестве **Z**.

2) Нейтральный элемент.

Так как 0 – четное число, то $0 \circ a = 0 + a = a$. Если $a \in 2\mathbf{Z}$, $a \circ 0 = a + 0 = a$. Если же $a \in 2\mathbf{Z}+1$, то $a \circ 0 = a - 0 = a$.

Итак, $0 \circ a = 0 \circ a = a$ для $\forall a \in Z$, то есть 0 является в **Z** нейтральным элементом относительно заданной операции.

3) Нейтрализующие элементы.

Для любого элемента $a \in \mathbf{Z}$ в **Z** существует нейтрализующий элемент: для четного a нейтрализующим будет число $-a$, так как $a \circ (-a) = a + (-a) = 0$; для нечетного a нейтрализующим будет само число a, так как $a \circ a = a - a = 0$.

Итак, **Z** является группой относительно заданной операции.

3. Найдите порядок элемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$, постройте циклическую подгруппу H, порожденную элементом a, и смежный класс bH, где $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Находим:

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$ Поэтому $|a| = 3$.

Циклическая подгруппа *H*, порожденная элементом *a,* состоит из элементов:

$$H = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

По теореме (см.§1.8), левый смежный класс bH, состоит из элементов $bH = \{ba, ba^2, be\}$.

$$ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$ba^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$be = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $bH = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$

4. Докажите, что множество целых четных чисел $2\mathbf{Z}$ образует аддитивную группу, и что эта группа изоморфна мультипликативной группе целых степеней числа 2: $M = \{2^z\}$.

Решение.

Поскольку $2\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$, а множество целых чисел $\mathbf{Z}$ образует аддитивную группу, то достаточно показать, что множество целых четных чисел является подгруппой этой группы. Очевидно, что $2\mathbf{Z} \neq \varnothing$. Воспользуемся критерием подгруппы:

1) Для любых $a, b \in 2\mathbf{Z}$ $a + b \in 2\mathbf{Z}$, так как сумма целых четных чисел является целым четным числом.

2) Для любого $a \in 2\mathbf{Z}$ $-a \in 2\mathbf{Z}$.

Итак, множество целых четных чисел образует аддитивную группу.

Зададим соответствие $\varphi : 2\mathbf{Z} \to M$ следующим образом: для $\forall a \in 2\mathbf{Z}$ $\varphi(a) = 2^{\frac{a}{2}}$.

Докажем, что φ – изоморфизм.

1) Покажем, что соответствие φ является отображением. Для $\forall a \in 2\mathbf{Z}$ $\varphi(a) = 2^{\frac{a}{2}}$ (по определению φ). Поскольку $a \in 2\mathbf{Z}$, то $\dfrac{a}{2} \in \mathbf{Z}$, поэтому $\varphi(a) \in M$. Пусть $a, b \in 2\mathbf{Z}$ и $a = b$. Тогда $2^{\frac{a}{2}} = 2^{\frac{b}{2}}$, поэтому $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Итак, для $\forall a \in 2\mathbf{Z}$ существует единственный $\varphi(a) = 2^{\frac{a}{2}} \in M$.

2) Покажем, что у любого элемента $\alpha = 2^k \in M$ существует прообраз $a \in 2\mathbf{Z}$, то есть отображение φ является сюръективным. Очевидно, что $a = 2k$.

3) Покажем, что если $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $a = b$, то есть отображение φ является инъективным. Действительно, если $\varphi(a) = \varphi(b)$, то есть $2^{\frac{a}{2}} = 2^{\frac{b}{2}}$, следовательно, $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{2}$ и $a = b$.

Итак, φ – взаимно однозначное отображение.

Покажем, что φ сохраняет операцию, то есть $\varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ (образ суммы равен произведению образов).

$\varphi(a+b) = 2^{\frac{a+b}{2}} = 2^{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}} = 2^{\frac{a}{2}} \cdot 2^{\frac{b}{2}} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Итак, φ – изоморфизм.

5. Докажите, что множество A целых чисел, кратных трем, есть подгруппа аддитивной группы **Z**. Постройте левый смежный класс $2+A$.

Решение.

Имеем: $A = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}, A \subset \mathbf{Z}$.

Очевидно, что $A \neq \varnothing$. Воспользуемся критерием подгруппы.

1) Пусть $\forall x_1, x_2 \in A$, то есть $x_1 = 3k_1$, $x_2 = 3k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

Так как $\mathbf{Z}$ есть аддитивная группа, то $k_1 + k_2 \in \mathbf{Z}$ и потому $x_1 + x_2 = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) \in A$.

2) Пусть $\forall x = 3k \in A$. Следовательно, $k \in \mathbf{Z}$. Тогда $-k \in \mathbf{Z}$, а потому $-x = -3k = 3 \cdot (-k) \in A$.

Итак, $A \leq \mathbf{Z}$.

Левый смежный класс для аддитивной группы имеет вид: $2 + A = \{2 + a \mid a \in A\}$. Итак, $2 + A = \{2 + 3k \mid 3k \in A\}$. В данном классе находятся целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2.

6. Выясните, является ли подмножество $H = \{40t \mid t \in \mathbf{Z}\}$ нормальным делителем группы $G = <\{8t \mid t \in \mathbf{Z}\}, +>$. Если является, то постройте факторгруппу

G/H, составьте таблицу сложения элементов факторгруппы, укажите нулевой элемент и для каждого элемента – ему противоположный.

Решение.

Подмножество *H* является нормальным делителем группы *G*, если 1) $H \le G$ и 2) для любого $a \in G$ правые и левые смежные классы по этой подгруппе совпадают.

То, что $H \le G$, доказывается аналогично предыдущей задаче.

$H \trianglelefteq G$, потому что в абелевой группе любая подгруппа является нормальным делителем (см. теорему 1, §1.10).

Для того, чтобы построить факторгруппу G/H, нужно построить классы эквивалентности. В качестве первого класса берем подгруппу *H*. Возьмем любой элемент $a \in G$, не вошедший в первый класс, например, $a = 8$. Построим смежный класс $8 + H$. Получим: $8 + H = \{40t + 8 \mid t \in \mathbf{Z}\}$. Далее возьмем из группы *G* элемент, который не вошел в два построенных смежных класса, например, $a = 16$. Построим смежный класс $16 + H$. Получим: $16 + H = \{40t + 16 \mid t \in \mathbf{Z}\}$. Аналогично строим еще два смежных класса: $24 + H = \{40t + 24 \mid t \in \mathbf{Z}\}$ и $32 + H = \{40t + 32 \mid t \in \mathbf{Z}\}$. В построенные классы вошли все элементы группы *G*, то есть $G = H + (8 + H) + (16 + H) + (24 + H) + (32 + H)$. Факторгруппа состоит из пяти элементов.

Составим таблицу сложения элементов факторгруппы:

+	H	$8+H$	$16+H$	$24+H$	$32+H$
H	H	$8+H$	$16+H$	$24+H$	$32+H$
$8+H$	$8+H$	$16+H$	$24+H$	$32+H$	H
$16+H$	$16+H$	$24+H$	$32+H$	H	$8+H$
$24+H$	$24+H$	$32+H$	H	$8+H$	$16+H$
$32+H$	$32+H$	H	$8+H$	$16+H$	$24+H$

Из таблицы видно, что элемент *H* является нулевым элементом факторгруппы. Противоположные элементы:

у элемента $8+H$ – элемент $32+H$;

у элемента $16+H$ – элемент $24+H$;

у элемента $24+H$ – элемент $16+H$;

у элемента $32+H$ – элемент $8+H$;

у элемента H – элемент H.

7. Дана группа $G = < S_3, \cdot >$, $H = \{a_1, a_2\}$ – подгруппа группы *G*. Находятся ли элементы 1) a_3 и a_4 , 2) a_6 и a_4 в отношении ρ?

Решение.

По определению, для двух элементов $a,b \in G \quad a\rho b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$.

1) Нужно найти элемент, обратный к a_3, и проверить, лежит ли в H произведение $a_3^{-1}a_4$.

$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Находим $\quad a_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$a_3^{-1} \cdot a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = a_6 \notin H$. Поэтому $a_3 \overline{\rho} a_4$.

2) Аналогично находим: $a_6^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$a_6^{-1} \cdot a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = a_2 \in H$. Поэтому $a_6 \rho a_4$.

2.5. Примерный вариант итогового теста

После изучения раздела «Алгебраические структуры с одной бинарной операцией» студенты выполняют итоговый тест. Ниже приведен примерный вариант итогового теста, в заданиях которого предлагается 4 варианта ответов. Верными могут быть один или несколько из них.

Задание 1. На множестве **Q** алгебраической бинарной операцией не является:

А) сложение; Б) вычитание; В) умножение; Г) деление.

Задание 2. Алгебраическая бинарная операция $*$, заданная на множестве М, ассоциативна, если:

А) для $\forall a,b \in M \quad a*b = b*a$;

Б) для $\forall a,b,c \in M \quad a*(b*c) = (a*b)*c$;

В) $\exists a,b,c \in M \quad a*(b*c) = (a*b)*c$;

Г) для $\forall a \in M \ \exists! b \in M$ такой, что для $\forall x \in M \ ax = b$.

Задание 3. Элемент e называется нейтральным относительно операции $*$, если:

А) для $\forall a \in M \ \exists e \in M$ такой, что $a*e = e*a = a$;

Б) $\exists e \in M$ такой, что для $\forall a \in M \ a*e = e*a = e$;

В) для $\forall a \in M \ \exists e \in M$ такой, что $a*e = e*a = e$;

Г) $\exists e \in M$ такой, что для $\forall a \in M \ a*e = e*a = a$.

Задание 4. Моноидами являются все

А) ассоциативные группоиды; Б) группоиды с нейтральным элементом;

В) полугруппы с нейтральным элементом; Г) группы.

Задание 5. Порядок элемента ab мультипликативной группы

$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a,b,c,d \in \mathbf{R},\ ad - bc \neq 0 \right\}$, где $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, равен

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

Задание 6. Обратным к элементу $a = -2$ группы $< \mathbf{C}^{-0}, \cdot >$ является

А) 1; Б) 2; В) $\frac{1}{2}$; Г) $-\frac{1}{2}$.

Задание 7. В смежном классе подгруппы $H = \mathbf{Q}^{-0}$ мультипликативной группы $G = \mathbf{C}^{-0}$, порожденном элементом $a = \sqrt{3}$, содержится элемент

А) $\frac{6\sqrt{3} - 6}{3 + \sqrt{3}}$; Б) $\frac{6\sqrt{3} + 6}{3 - \sqrt{3}}$; В) $\frac{6\sqrt{3} - 6}{3 - \sqrt{3}}$; Г) $\frac{6 - 6\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$.

Задание 8. G – аддитивная группа, $H \leq G$. Левый класс эквивалентности ${}_aH$, порожденный элементом $a \in G$, есть множество элементов вида

А) $h \in H$; Б) $ah,\ h \in H$; В) $a + h,\ h \in H$; Г) $a + h,\ h \in G$.

Задание 9. Если G – группа, $H \trianglelefteq G$ и $a \in G$, то $aH = H$ тогда и только тогда, когда

А) $a = e$, где e – нейтральный элемент группы G; Б) $a \in H$;

В) $a^{-1} \notin H$; Г) $\exists h_1, h_2 \in H$ такие, что $ah_1 = h_2 a$.

Задание 10. Существуют группы, в которых операция не обладает этим свойством:

А) ассоциативность; Б) коммутативность;

В) наличие нейтрального элемента; Г) наличие нейтрализующих элементов.

Задание 11. К свойствам гомоморфного отображения группы G_1 в группу G_2 не относится

А) образ нейтрального элемента G_1 есть нейтральный элемент G_2;

Б) образ элемента, являющегося нейтрализующим к a из G_1 есть нейтрализующий элемент образа элемента a;

В) любой элемент из G_2 имеет хотя бы один прообраз в G_1;

Г) Ядро данного гомоморфизма не пусто.

Задание 12. Циклической группой не является

А) $< S_3, \cdot >$; Б) $< \mathbf{Z}, + >$; В) $< \{2^n \mid n \in \mathbf{Z}\}, \cdot >$ Г) $< \{-1;1\}, \cdot >$.

Задание 13. Для любой подгруппы *H* группы *G* верно

А) для $\forall a \in H$ и $\forall b \in G$ $ab \in G$ и $ab \notin H$;

Б) для $\forall a, b \in H$ $ab \in H$;

В) для $\forall a, b \in H$ $ab = ba$;

Г) для $\forall a \in H$ $\exists b \in G$ такой, что $ab \notin H$.

Задание 14. Множество, на котором определена алгебраическая операция и эта операция ассоциативна, называется

А) группоидом

Б) полугруппой

В) моноидом

Г) группой

Задание 15. Если φ – отображение группы G_1 в G_2, то верно, что

А) для $\forall a \in G_1$ $\exists! \varphi(a) \in G_2$;

Б) для $\forall b \in G_2$ $\exists a \in G_1$ такой, что $\varphi(a) = b$;

В) для $\forall b \in G_2$ $\exists! a \in G_1$ такой, что $\varphi(a) = b$;

Г) $\exists b \in G_2$ такой, что для $\forall a \in G_1$ $\varphi(a) \neq b$.

Задание 16. Следующие алгебры

1) множество целых чисел с операцией умножения

2) множество натуральных чисел с операцией сложения

3) множество действительных чисел без нуля с операцией умножения

4) множество квадратных невырожденных матриц с операцией умножения

образуют

А) полугруппу

Б) моноид

В) группу

Г) абелеву группу

Ответы на тест:

1. Г)	5. Б)	9. Б)	13. Б)
2. Б)	6. Г)	10. Б)	14. Б)
3. Г)	7. В)	11. В)	15. А)
4. В), Г)	8. В)	12. А)	16. 1 – Б), 2 – А), 3 – Г), 4 – В).

2.6. Список рекомендуемой литературы

Основной

1. *Варпаховский, Ф.Л.* Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения: учебное пособие для студентов-заочников /Ф.Л. Варпаховский, А.С. Солодовников, И.В. Стеллецкий. – М., Просвещение, 1978. – 144с.
2. *Кострикин, А.И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры / А.И. Кострикин. – М.: Физматлит, 2000. – 272с.
3. *Кострикин, А.И.* Сборник задач по алгебре / А.И. Кострикин. – М., Физматлит, 2001. – 464с.
4. *Куликов, Л.Я.* Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для педагогических институтов /Л.Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559с.
5. *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – 17-е изд., стер. – М.: Наука, 2008. – 432с.
6. *Курош, А.Г.* Теория групп / А.Г. Курош. – 4-е изд., стер.– М.: Физматлит, 2005. – 648с.
7. Методические указания к разделу «Алгебры» / сост. В.С. Морозова; Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 1987. – 53с.
8. *Нечаев, В.А.* Задачник-практикум по алгебре. Группы. Кольца. Поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения: учебное пособие для студентов-заочников /В.А. Нечаев. – М.: Просвещение, 1983. – 120с.
9. *Фаддеев, Д.К.* Задачи по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – 16-е изд., стер. – М., 2007. – 288с.

Дополнительный

1. *Александров, П.С.* Введение в теорию групп /П.С. Александров. – М.: Бюро Квантум, 2008. – 160 с. (Библиотечка «Квант»; вып. 108. Приложение к журналу «Квант» № 4/2008).
2. *Белоногов, В.А.* Задачник по теории групп /В.А. Белоногов. – М.: Наука, 2000. – 239с.
3. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра / Б.Л. Ван дер Варден. – 3-е изд. – М., 2004. – 624с.
4. Введение в теорию групп. Ч. 2: Методическая разработка / сост. Я.Д. Половицкий; Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2002. – 36с.

5. Введение в теорию групп. Ч. 1: методическая разработка / сост. Я.Д. Половицкий; Перм. гос. ун-т. – Пермь, 1981. – 31с.
6. *Каргаполов, М.И.* Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – 3-е изд., перераб. и доп.. – М.: Наука, 1982. – 288с.
7. *Кострикин, А.И.* Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры /А.И. Кострикин. – М.: Физматлит, 2004. – 272с.
8. *Тронин, С.Н.* Введение в теорию групп. Задачи и теоремы. Ч. 1.: учебное пособие / С.Н. Тронин. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2006. – 100с.
9. *Холл, М.* Теория групп /М. Холл. – М.: изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 468 с.