РОССИЙСКАЯ ОТКРЫТАЯ АКАДЕМИЯ ТРАНСПОРТА

Одобрено кафедрой
«Высшая и прикладная математика»

МАТЕМАТИКА

Задание на контрольные работы № 3-4
с методическими указаниями по выполнению
для студентов-бакалавров 2 курса сокращённой формы обучения
направления: «Технология транспортных процессов»

специализации: «Организация перевозок и управление в единой транспортной системе»

Москва – 2012

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Задачи, включенные в контрольную работу, взяты из сборника задач, подготовленного коллективом преподавателей кафедры «Высшая и прикладная математика» РОАТ МГУПС. Все задачи имеют тройную нумерацию, которая включает номер раздела из программы по математике для соответствующей специальности, уровень сложности задачи и порядковый номер задачи. Студент выполняет те задачи, последняя цифра которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, студент, учебный шифр которого имеет последнюю цифру 5, в контрольной работе №3 решает задачи 17.1.15, 17.2.5, 17.2.35, 17.2.55, 17.3.15; в контрольной работе №4 – 6.2.5, 6.3.15, 7.1.15, 7.1.45, 7.3.5.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с содержанием разделов математических дисциплин, на освоение которых ориентирована выполняемая контрольная работа. Необходимую учебную литературу студент может найти в рабочей программе по математике для своей специальности (в программе указана как основная, так и дополнительная литература).

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр студента, курс, фамилия, имя и отчество студента. На обложке вверху справа указывается фамилия и инициалы преподавателя-рецензента. В конце работы студент ставит свою подпись и дату выполнения работы.

В каждой задаче надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решение каждой задачи должно содержать подробные вычисления, пояснения, ответ, а также, в случае необходимости, и рисунки. После каждой задачи следует оставлять место для замечаний преподавателя-рецензента. В случае невыполнения этих требований преподаватель возвращает работу для доработки без ее проверки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3
Теория вероятностей.

17.1.11-17.1.20

17.1.11. В магазине было 10 покемонов и 15 деджимонов. Покемоны ломаются с вероятностью 0,1, а деджимоны – с вероятностью 0,3. Купленная игрушка сломалась. Какова вероятность, что это деджимон.

17.1.12. Прибор состоит из 6 узлов. Вероятность безотказной работы каждого узла в смену равна 0,9. Найти вероятность того, что за смену откажет ровно 2 узла.

17.1.13. В первом ящике 6 шаров: 1 белый, 2 красных, 3 синих. Во втором ящике 12 шаров: 2 белых, 6 красных, 4 синих. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что среди вынутых шаров нет синих?

17.1.14. В корзине 20 грибов: 15 лисичек, остальные белые. Вероятность того, что лисичка червивая – 0,01, для белого – 0,3. Какова вероятность того, что взятый гриб червивый.

17.1.15. В магазин вошло 7 покупателей. Вероятность совершить покупку для каждого равна 0,4. Найти вероятность того, что покупку совершат трое.

17.1.16. В урне 7 черных шаров и 3 белых. Наугад вынимают один за другим 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

17.1.17. В букете 15 цветов: 5 гвоздик и 10 хризантем. Гвоздики ломаются с вероятностью 0,2, а хризантемы с вероятностью 0,1. Взятый цветок сломан. Какова вероятность, что это гвоздика.

17.1.18. Рабочий обслуживает 5 станков, каждый из которых может выйти из строя в течении смены с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что из строя выйдет только один станок.

17.1.19. В урне 7 черных шаров и 3 белых. Наугад вынимают один шар и возвращают в урну. Шары перемешивают, затем наугад вынимают второй шар. Найти вероятность того, что оба шара белые.

17.1.20. В коробке 40 пельменей: из них 30 больших, остальные маленькие. Большие разваливаются при варке с вероятностью 0,2, а маленькие с вероятностью 0,4. Какова вероятность, что взятая пельмешка развалилась.

17.2.1-17.2.10

17.2.1. X – число выпадения герба при двух бросаниях монеты. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.2. X – число выпадения надписи при двух бросаниях монеты. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.3. В урне находится 2 белых и 3 черных шара. Наудачу извлекается 2 шара. X – число белых шаров среди отобранных. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.4. X – число выпадений пятерки на игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.5. Вероятность того, что прибор исправен равна 0,8. X – число исправных приборов из двух выбранных. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.6. В коробке 5 кубиков пронумерованных от 1 до 5. Мальчик произвольным образом вынимает 2 кубика. X – число кубиков с нечетным номером среди двух выбранных. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.7. Станок-автомат производит 90% изделий первого сорта, 7% второго, а остальные третьего. X – число изделий первого сорта среди двух выбранных. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.8. Вероятность того, что в пакетике с чипсами попадется призовой купон равна 0,1. X – число пакетиков с купонами среди двух выбранных. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.9. В группе из шести человек два отличника. Наугад выбрали двух человек. X – число отличников из выбранных. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.10. 5% лотерейных билетов – выигрышные. X – число выигрышных билетов среди двух выбранных. Найти дисперсию случайной величины X.

17.2.31–17.2.40. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2 причем $x_1 < x_2$**.** Известны вероятность p_1 возможного значения x математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения этой случайной величины.

17.2.31. $p_1 = 0,1$; $M(X)=3,9$; $D(X)=0,09$.
17.2.32. $p_1 = 0,3$; $M(X)=3,7$; $D(X)=0,21$.
17.2.33. $p_1=0,5$; $M(X)=3,5$; $D(X)=0,25$.
17.2.34. $p_1=0,7$; $M(X)=3,3$; $D(X)=0,21$.
17.2.35. $p_1=0,9$; $M(X)=3,1$; $D(X)=0,09$.
17.2.36. $p_1=0,9$; $M(X)=2,2$; $D(X)=0,36$.
17.2.37. $p_1=0,8$; $M(X)=3,2$; $D(X)=0,16$.
17.2.38. $p_1=0,6$; $M(X)=3,4$; $D(X)=0,24$.
17.2.39. $p_1=0,4$; $M(X)=3,6$; $D(X)=0,24$.
17.2.40. $p_1=0,2$; $M(X)=3,8$; $D(X)=0,16$.

17.2.51–17.2.55. Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения вероятностей $f(x)$. Требуется:

1) определить коэффициент A;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;

5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a, b).

17.2.51.

$$f(x)=\begin{cases} A\cos 2x & \text{при} \quad -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{при} \quad |x|>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$a=\frac{\pi}{6}, \quad b=2.$$

17.2.52.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ Ae^{-x} & \text{при} \quad x>0. \end{cases}$$

$$a=1, \quad b=+\infty$$

17.2.53.

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2 & \text{при} \quad |x|\le 3, \\ 0 & \text{при} \quad |x|>3. \end{cases}$$

$$a=1, \quad b=2$$

17.2.54.

$$f(x)=\begin{cases} A\sin 2x & \text{при} \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad x>\frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad x<0. \end{cases}$$

$$a=-\frac{\pi}{6}, \quad b=\frac{\pi}{6}$$

17.2.55.

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{x} & \text{при} \quad x\le 0, \\ 0 & \text{при} \quad x>0. \end{cases}$$

$$a=-\infty, \quad b=-1$$

17.2.56–17.2.60. Задана непрерывная случайная величина X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

1) определить коэффициент A;

2) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;

3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;

5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала (a, b).

17.2.56.

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ Ax^3 & при \quad 0\le x\le 3,\\ 1 & при \quad x>3.\end{cases}$$

$$a=1, \quad b=2$$

17.2.57.

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ 1+Ae^{-x} & при \quad x\ge 0.\end{cases}$$

$$a=1, \quad b=+\infty$$

17.2.58.

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ A\cos x+1 & при \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1 & при \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$a=\frac{\pi}{3}, \quad b=\pi$$

17.2.59.

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ A\sin 2x & при \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 1 & при \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

$$a=0, \quad b=\frac{\pi}{6}$$

17.2.60.

$$F(x)=\begin{cases} Ae^{x} & при \quad x\le 0, \\ 1 & при \quad x>0. \end{cases}$$

$$a=-\infty, \quad b=-1$$

17.3.11–17.3.20. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами a (математическое ожидание) и σ (среднее квадратическое отклонение). Требуется:

а) написать плотность вероятности и схематически изобразить ее график;

б) найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\ \beta)$;

в) найти вероятность того, что X отклонится (по модулю) от a не более чем на δ;

г) применяя правило "трех сигм" найти границы интервала, содержащего соответствующие значения случайной величины X.

17.3.11. $a = 7$, $\sigma = 2$, $\alpha = 6$, $\beta = 10$, $\delta = 3$.

17.3.12. $a = 6$, $\sigma = 1$, $\alpha = 4$, $\beta = 7$, $\delta = 1$.

17.3.13. $a = 5$, $\sigma = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$, $\delta = 2$.

17.3.14. $a = 4$, $\sigma = 2$, $\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\delta = 4$.

17.3.15. $a = 3$, $\sigma = 1$, $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $\delta = 2$.

17.3.16. $a = 2$, $\sigma = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\delta = 2$.

17.3.17. $a = 10$, $\sigma = 4$, $\alpha = 5$, $\beta = 12$, $\delta = 2$.

17.3.18. $a = 9$, $\sigma = 5$, $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\delta = 2{,}5$.

17.3.19. $a = 8$, $\sigma = 2$, $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $\delta = 3$.

17.3.20. $a = 7$, $\sigma = 3$, $\alpha = 4$, $\beta = 8$, $\delta = 2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Модели случайных процессов. Элементы теории массового обслуживания. Математическая статистика.

17.3.21–17.3.30. Задана матрица P_1 вероятностей перехода цепи Маркова из состояния i (i = l, 2) в состояние j (j = 1, 2) за один шаг. Найти матрицу P_2 перехода из состояния i в состояние j за два шага.

17.3.21. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$;

17.3.22. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$;

17.3.23. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$;

17.3.24. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$;

17.3.25. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$;

17.3.26. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$;

17.3.27. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$;

17.3.28. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$;

17.3.29. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$;

17.3.30. $P_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

18.1.1–18.1.10. АТС имеет k линий связи. Поток вызовов – простейший с интенсивностью λ вызовов в минуту. Среднее время переговоров составляет t мин. Время переговоров распределено по показательному закону. Найти: 1) абсолютную и относительную пропускные способности АТС; 2) вероятность того, что все линии связи заняты; 3) среднее число занятых линий связи; 4) определить, имеет ли АТС число линий связи, достаточное для того, чтобы вероятность отказа не превышала α.

18.1.1. $k = 5$, $\lambda = 0,6$, $t = 3,5$, $\alpha = 0,06$.
18.1.2. $k = 5$, $\lambda = 0,8$, $t = 2,9$, $\alpha = 0,05$.
18.1.3. $k = 6$, $\lambda = 0,7$, $t = 2,7$, $\alpha = 0,01$.
18.1.4. $k = 5$, $\lambda = 0,7$, $t = 3,5$, $\alpha = 0,05$.
18.1.5. $k = 5$, $\lambda = 0,9$, $t = 2,5$, $\alpha = 0,06$.
18.1.6. $k = 4$, $\lambda = 0,9$, $t = 2,1$, $\alpha = 0,01$.
18.1.7. $k = 6$, $\lambda = 0,8$, $t = 2,2$, $\alpha = 0,01$.
18.1.8. $k = 3$, $\lambda = 0,7$, $t = 3,1$, $\alpha = 0,06$.
18.1.9. $k = 5$, $\lambda = 0,8$, $t = 2,6$, $\alpha = 0,06$.
18.1.10. $k = 5$, $\lambda = 0,9$, $t = 2,8$, $\alpha = 0,05$.

19.1.1–19.1.10. На заводе имеется N токарных заготовок. Результаты выборочной проверки массы 500 заготовок приведены ниже:

Масса заготовок (кг)	29–30	30–31	31–32	32–33	33–34	**Итого**
Количество (штук)	6	38	202	198	56	500

Выборка собственно случайная бесповторная. Найти доверительный интервал для оценки средней массы заготовок при уровне доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$.

Указание: среднеквадратическую ошибку $\tilde{\sigma}$ для бесповторной выборки определяют по формуле $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma_B^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$, где σ_B – выборочное среднеквадратическое отклонение; $n = 500$.

19.1.1. $N = 10000$. 19.1.2. $N = 9000$.
19.1.3. $N = 8000$. 19.1.4. $N = 7000$.
19.1.5. $N = 6000$. 19.1.6. $N = 5000$.
19.1.7. $N = 11000$. 19.1.8. $N = 12000$.
19.1.9. $N = 13000$. 19.1.10. $N = 14000$.

19.2.1–19.2.10. Данные наблюдений над двумерной случайной величиной (X, Y) представлены в корреляционной таблице. Методом наименьших квадратов найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X. Построить график уравнения регрессии и показать точки $(x; \bar{y}_x)$, рассчитанные по таблице данных.

19.2.1.

X	**Y**						n_x
	23	**25**	**27**	**29**	**31**	**33**	
1	-	-	-	-	1	2	3
3	-	-	-	5	4	1	10
5	-	1	7	10	2	-	20
7	-	2	13	7	-	-	22
9	1	4	15	2	-	-	22
11	2	1	-	-	-	-	3
n_y	3	8	35	24	7	3	80

19.2.2.

X	**Y**					n_x
	10	**20**	**30**	**40**	**50**	
3	7	-	-	-	-	7
8	11	5	-	-	-	16
13	-	19	15	5	-	39
18	-	3	15	6	1	25
23	-	-	2	4	4	10
28	-	-	-	-	3	3
n_y	18	27	32	15	8	100

19.2.3.

X	Y				n_x
	9,6	**9,8**	**10,0**	**10,2**	
19,5	2	1	-	-	3
20,0	6	3	2	-	11
20,5	-	4	5	1	10
21,0	-	5	8	5	18
21,5	-	-	2	5	7
22,0	-	-	-	1	1
n_y	8	13	17	12	50

19.2.4.

X	Y					n_x
	34	**38**	**42**	**46**	**50**	
20	4	-	-	-	-	4
25	2	5	-	-	-	7
30	-	3	5	2	-	10
35	-	-	45	8	4	57
40	-	-	5	7	7	19
45	-	-	-	-	3	3
n_y	6	8	55	17	14	100

19.2.5.

X	Y					n_x
	20	**30**	**40**	**50**	**60**	
20	7	3	-	-	-	10
30	52	110	13	1	-	176
40	1	14	23	2	-	40
50	-	1	4	6	1	12
60	-	-	-	3	6	9
70	-	-	-	-	3	3
n_y	60	128	40	12	10	250

19.2.6.

X	Y					n_x
	90	**100**	**110**	**120**	**130**	
2	22	8	-	-	-	30
4	18	15	6	-	1	40
6	12	17	18	14	3	64
8	-	4	19	17	4	44
10	-	-	7	9	6	22
n_y	52	44	50	40	14	200

19.2.7.

X	Y					n_x
	45	**55**	**65**	**75**	**85**	
10	-	-	-	2	3	5
20	-	-	7	5	7	19
30	-	3	9	12	3	27
40	4	7	13	8	-	32
50	9	8	-	-	-	17
n_y	13	18	29	27	13	100

19.2.8.

X	Y					n_x
	2,15	**3,85**	**5,55**	**7,25**	**8,95**	
1,95	16	11	-	-	-	27
3,45	13	15	-	-	-	28
4,95	-	9	12	5	5	31
6,45	-	-	-	8	6	14
n_y	29	35	12	13	11	100

19.2.9.

X	Y							n_x
	20	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	
4	-	-	-	-	-	4	6	10
10	-	-	-	6	6	8	-	20
16	-	1	2	14	3	-	-	20
22	1	5	18	2	-	-	-	26
28	-	4	10	2	-	-	-	16
34	1	5	2	-	-	-	-	8
n_y	2	15	32	24	9	12	6	100

19.2.10.

X	Y					n_x
	17	**19**	**21**	**23**	**25**	
6,75	3	7	-	-	-	10
8,25	-	9	11	-	-	20
9,75	-	-	33	4	8	45
11,25	-	-	3	10	6	19
12,75	-	-	-	5	1	6
n_y	3	16	47	19	15	100

19.3.1–19.3.10. Известно эмпирическое распределение выборки объема n случайной величины X. Проверить гипотезу о распределении по закону Пуассона генеральной совокупности этой величины. Использовать критерий согласия Пирсона (хи-квадрат) при уровне значимости α = 0,05.

Номер	x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	n
19.3.1	n_i	400	380	165	50	3	2	1000
19.3.2	n_i	240	119	32	6	2	11	400
19.3.3	n_i	270	166	49	10	3	2	500
19.3.4	n_i	337	179	71	9	3	1	600
19.3.5	n_i	200	181	78	31	8	2	500
19.3.6	n_i	114	62	17	4	2	1	200
19.3.7	n_i	500	330	130	29	9	2	1000
19.3.8	n_i	115	62	17	4	1	1	200
19.3.9	n_i	408	365	175	42	6	4	1000
19.3.10	n_i	420	370	146	51	9	4	1000