



МИНОБРНАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е.К. КОЗЫРЕВА,
П.Е. КИЧАЕВ

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Учебное пособие

Самара
Самарский государственный технический университет
2011

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 531

К 64

Козырева Е.К.

Кичаев П.Е.

К 64 Кинематика и динамика рычажных механизмов: учеб. пособие / Е.К. Козырева, П.Е. Кичаев – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2011. – 86 с.: ил.

ISBN 978-5-06-0043-0

Рассмотрены задачи кинематики и динамики для рычажных трех- и четырехзвенников. Представлены задания для курсовых и расчетно-графических работ.

Для студентов высших технических учебных заведений.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Н.И. Клюев,

УДК 531

К 64

ISBN 978-5-06-0043-0

© Е.К. Козырева, П.Е. Кичаев, 2011

© Самарский государственный

технический университет, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном издании предлагаются комплексные задания по разделам теоретической механики, изучение которых предусмотрено программой. При выполнении задания применяются графические методы, которые реализуются с помощью компьютерной программы КОМПАС 3D.

В настоящем издании размещено 200 вариантов комплексных заданий для кинематического и динамического расчётов рычажных механизмов. Из них 100 вариантов это схемы кривошипно-ползунного механизма и ещё 100 вариантов рычажных четырёхугольников, которые являются схемой для станков-качалок.

Каждое задание состоит из двух частей. Первая часть – это кинематический анализ механической системы по заданному движению ведущего звена и установление кинематических связей между параметрами движения звеньев. Вторая часть - это динамический анализ, при определении усилий во внешних и внутренних связях и управляющих усилий, необходимых для выполнения заданных движений.

Номер задания выбирается по двум последним цифрам номера зачётной книжки: первая цифра означает номер задачи, вторая – вариант.

В первых параграфах методического пособия кратко излагаются теоретические основы кинематики поступательного, вращательного и плоскопараллельного движений твёрдого тела а также содержание динамических принципов механики. Рассматриваются также условия равновесия механической системы в обобщённых координатах.

Затем приводятся варианты заданий и примеры их выполнения.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с введением в высших учебных заведениях двухуровневой системы образования заметно сокращается число часов на общетехнические дисциплины, что затрудняет успешное освоение студентами изучаемого материала. Подобная тенденция коснулась и курса «Теоретическая механика». Одним из выходов в данной ситуации является написание пособий, позволяющих студенту самостоятельно изучить раздел (разделы) предмета и выполнить предложенные по данной тематике практические задания.

Данное издание является методическим пособием для студентов различных специальностей 1-го и 2-го курсов, изучающих теоретическую механику и выполняющих расчётно-графические работы.

Роль и значение теоретической механики в инженерном образовании заключается в том, что она является научной базой очень многих областей современной техники. Знания и умения, получаемые студентами при изучении теоретической механики, позволяют им выполнять сложные расчёты, необходимые при проектировании и эксплуатации различных машин и механизмов.

В данном пособии рассматриваются задачи проектирования плоских рычажных механизмов (кинематический и динамический анализ), которые являются важной частью в изучении «Теории механизмов и машин».

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

1.1 Поступательное движение.

Движение тела называется поступательным, если отрезок прямой, проведённый через две любые точки тела при движении

остаётся параллельным своему первоначальному положению.

При поступательном движении все точки движутся по одинаковым траекториям и имеют равные скорости и ускорения рис.1.1.

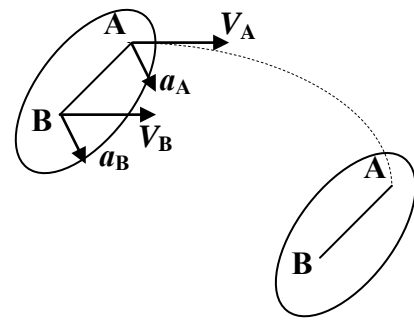


Рис.1.1 Поступательное движение

1.2 Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательное движение на схемах показывается так, как на рис.1.2. (а,б). В случае «а» неподвижная ось вращения z изображена на рисунке, в случае «б» ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через неподвижный шарнир O .

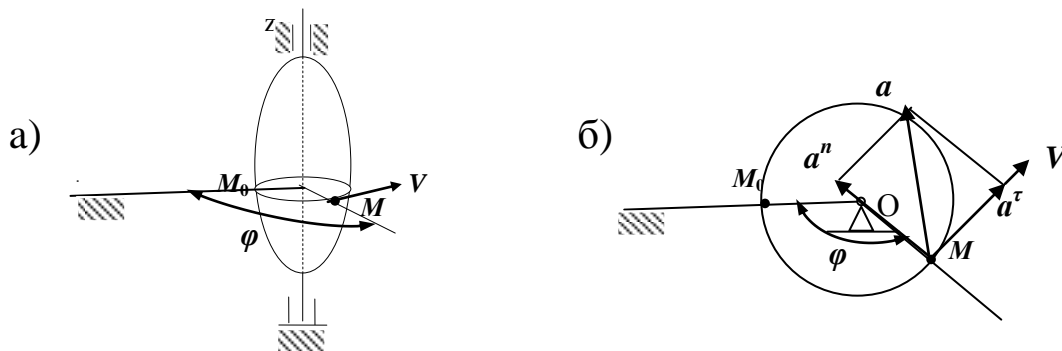


Рис.1.2 Вращательное движение

И в том и в другом случае закон движение задаётся углом поворота

$$\varphi = \varphi(t) \text{ (рад)},$$

где $\varphi(t)$ – известная функция от времени. Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твёрдого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε .

Угловая скорость характеризует быстроту изменения угла поворота тела и вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi} \text{ (1/c)} \quad (1.1)$$

Таким образом, *числовое значение угловой скорости в данный момент времени равно первой производной по времени от угла поворота*. Знак ω определяет направление вращения «+» - в сторону возрастания угла, «-» - в сторону убывания. Размерность угловой скорости рад/с или, что то же, $1/\text{с}$ (с^{-1}).

Угловое ускорение ε характеризует изменение угловой скорости по времени и определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (1.2)$$

Таким образом, *числовое значение углового ускорения в данный момент времени равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной от угла поворота*. Размерность углового ускорения рад/с^2 или $1/\text{с}^2$ (с^{-2}).

Скорости точек тела. Каждая точка тела движется по окружности, радиус которой равен кратчайшему расстоянию от точки до оси вращения h . *Скорость точки твёрдого тела равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения* (рис.1.2. б)

$$V = \omega h. \quad (1.3)$$

Направлен вектор скорости по касательной к окружности, которую описывает точка или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку.

Ускорение точки тела. Вектор ускорения точки тела равен векторной сумме касательного и нормального ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}^t + \vec{a}^n. \quad (1.4)$$

Касательная составляющая ускорения точки, вектор \vec{a}^t направлен по касательной к траектории и перпендикулярно радиусу h (в сторону вращения при ускоренном вращении и в обратную сторону при замедленном) и равен по величине

$$a^r = \varepsilon h. \quad (1.5)$$

Нормальная составляющая ускорения направлена по радиусу окружности к оси вращения (рис.1.2) и равна

$$a^n = \omega^2 \cdot h. \quad (1.6)$$

Полное ускорение точки будет равно

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.7)$$

1.3 . Плоскопараллельное движение твёрдого тела.

Плоскопараллельное движение определяется движением одного плоского сечения тела в своей плоскости. Все остальные параллельные ему сечения движутся точно так же как рассматриваемое.

Плоское движение сечения является составным и складывается из двух движений: поступательного вместе с произвольно выбранной точкой – полюсом, вращательного движения вокруг оси, проходящей через полюс. Например, на рис.1.3. а) показано сечение, которое движется поступательно вместе с полюсом A и одновременно вращается вокруг оси z , проходящей через точку A .

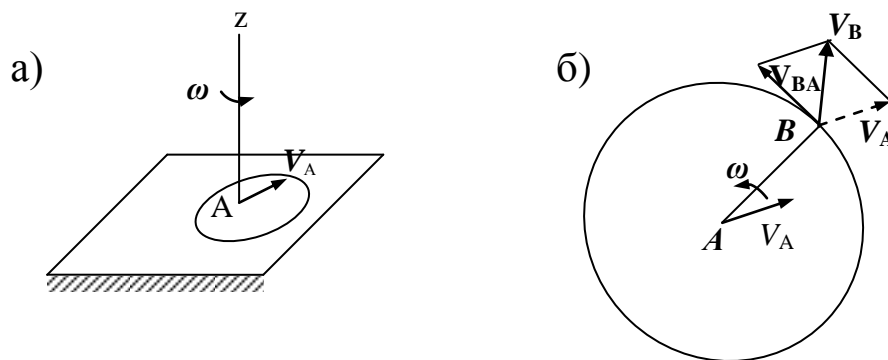


Рис.1.3 Плоскопараллельное движение. Скорости

Каждая точка сечения находится в сложном движении. По теореме о сложении скоростей скорость любой точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей $\vec{v}_B = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Так как переносное движение поступательное, то переносная

скорость любой точки равна скорости полюса A $\vec{v}_B = \vec{v}_A$.
 Относительное движение – это вращение сечения вокруг точки A .
 Относительная скорость - это скорость рассматриваемой точки B во вращательном движении сечения вокруг точки A . Эту скорость обозначают \vec{v}_{BA} . Направление и величину этой скорости определим по правилам предыдущего параграфа. Вектор скорости \vec{v}_{BA} направлен перпендикулярно отрезку AB в сторону вращения (рис 1.3 б), а его величина равна $V_{BA} = \omega \cdot h$, где $h = AB$.

Окончательно получаем теорему о распределении скоростей при плоском движении [1-3]: *Скорость любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , взятой за полюс, и скорости, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.*

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \quad (1.8)$$

Аналогично, по теореме о сложении ускорений в сложном движении ускорение любой точки равно векторной сумме переносного ускорения, равного ускорению полюса \vec{a}_A , и относительного ускорения, равного ускорению \vec{a}_{BA} , которое точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{BA}. \quad (1.9)$$

Ускорение \vec{a}_{BA} определяется по формулам (1.4)-(1.7):

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n. \quad (1.10)$$

При этом вектор \vec{a}_{BA}^r направлен перпендикулярно отрезку AB в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное. Вектор \vec{a}_{BA}^n направлен от точки B к полюсу A (рис.1.4).
 Численно

$$a_{BA}^r = \varepsilon \cdot h, \quad a_{BA}^n = \omega^2 \cdot h. \quad (1.11)$$

Равенство (1.9) получает вид:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n. \quad (1.12)$$

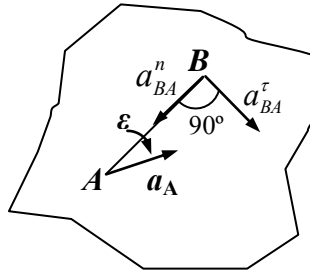


Рис.1.4 Плоскопараллельное движение. Ускорения

2.ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ.

2.1 Принцип Даламбера для механической системы.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из материальных точек, массы которых равны m_1, m_2, \dots, m_n . Выделим какую-нибудь из точек системы с массой m_k . Под действием приложенных к ней активных сил и реакций связей \vec{F}_k и \vec{N}_k , которые могут быть и внешними силами и внутренними, точка будет двигаться по отношению к инерциальной системе отсчёта с ускорением \vec{a}_k . Введя для этой точки силу инерции $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k$, получим равенство $\vec{F}_k + \vec{N}_k + \vec{\Phi}_k = 0$, которое легко получается из 2-го закона Ньютона. То есть указанные силы уравновешиваются.

Повторяя такие рассуждения для каждой точки системы, придем к следующему результату, выражающему принцип Даламбера для механической системы [1-3]: если в любой момент времени к каждой из точек механической системы кроме действующих на неё активных сил и сил реакций связей присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики. $\{ \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n; \vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots, \vec{N}_n; \vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \dots, \vec{\Phi}_n \} \infty 0$.

Из статики известно, что векторная сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их векторов-моментов относительно любого

центра O равны нулю. Тогда на основании принципа Даламбера должно быть:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \vec{N}_k + \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = 0, \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{N}_k) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{\Phi}_k) = 0. \quad (2.2)$$

Введём обозначения;

$$\vec{R}^u = \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k, \quad \vec{M}_o^u = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{\Phi}_k). \quad (2.3)$$

Величины \vec{R}^u и \vec{M}_o^u представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра O системы сил инерции. Уравнения (2.1) и (2.2) приобретают вид:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \vec{N}_k + \vec{R}^u = 0; \quad \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{N}_k) + \vec{M}_o^u = 0. \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4) в векторной форме выражают принцип Даламбера, а метод решения задач с их применением называют «метод кинестатики». В проекциях на координатные оси равенства (2.4) дают уравнения, аналогичные соответствующим уравнениям статики. Для плоской системы сил таких уравнений три, а для пространственной системы - шесть.

Выведем формулы для вычисления главного вектора и главного момента сил инерции. Главный вектор по формуле (2.3) равен

$$\vec{R}^u = \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = - \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k = -m \vec{a}_c. \quad (2.5)$$

где $m = \sum_{k=1}^n m_k$ масса механической системы, \vec{a}_c - вектор ускорения центра масс.

Главный вектор сил инерции механической системы (в частном случае твёрдого тела) равен произведению массы механической системы (тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

Если ускорение центра масс разложить на касательное и нормальное, то вектор \vec{R}^u разложится на составляющие $\vec{R}_\tau^u = -m \vec{a}_{c\tau}, \vec{R}_n^u = -m \vec{a}_{cn}$. Если ускорение центра масс равно 0 (как,

например, для вращающегося тела, у которого центр масс находится на оси вращения), то и главный вектор сил инерции равен нулю $\vec{R}^u = 0$.

Теперь определим главный момент сил инерции. С учётом того, что момент силы относительно точки O можно представить в виде векторного произведения $\vec{M}_o(\vec{\Phi}_k) = \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k$. Запишем главный момент сил инерции как сумму

$$\vec{M}_o^u = -\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k. \quad (2.6)$$

Согласно теореме Пуансо, справедливой для любых сил, систему сил инерции можно заменить одной силой, равной главному вектору \vec{R}^u и приложенной в произвольном центре O , и парой с моментом, равным главному моменту \vec{M}_o^u .

1. Рассмотрим случай поступательного движения твердого тела. В этом случае все точки имеют одинаковые ускорения, равные ускорению центра масс $\vec{a}_k = \vec{a}_c$. Тогда все силы инерции $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_c$ образуют параллельную систему сил, аналогичных силам тяжести. И поэтому, как и силы тяжести, заменяются одной силой, приложенной в центре масс (центре тяжести). Таким образом: *при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей, равной $\vec{R}^u = -m\vec{a}_c$, которая проходит через центр масс тела. В этом случае главный момент $\vec{M}_o^u = 0$.*

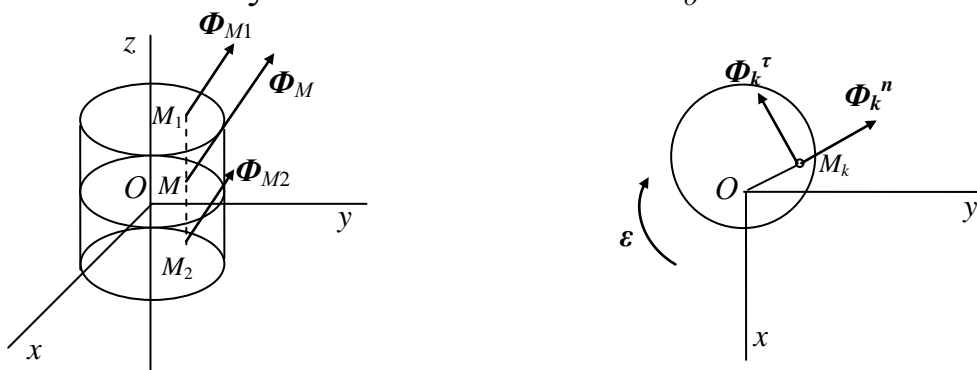


Рис.1.5 Вращательное движение твердого тела

2. Рассмотрим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть твердое тело имеет плоскость материальной симметрии Oxy и вращается вокруг оси Oz , перпендикулярной этой

плоскости. На рис.1.5 показано сечение тела плоскостью инерции. Будем применять известную из статики *теорему Пуансо* о приведении системы сил к центру. Из-за симметрии, все силы инерции приводятся сначала к плоскости Oxy , а затем к точке O . При этом, результирующая сила $\vec{R}^u = -m\vec{a}_c$ и пара сил будут лежать в этой плоскости и момент пары будет равен $M_{oz}^u = \sum_{k=1}^n M_{oz}(\vec{\Phi}_k)$. Вычислим этот момент.

Очевидно, что при вращении тела вокруг оси Oz все точки, находящиеся на отрезке $M_1 M_2$ имеют одинаковое ускорение, а симметричные точки M_1 и M_2 имеют равные силы инерции $\vec{\Phi}_{M_1} = \vec{\Phi}_{M_2}$, равнодействующая которых лежит в плоскости симметрии. Повторив эти рассуждения, мы приходим к системе сил инерции, лежащих в плоскости симметрии. Считая, что вся масса распределена по плоскости симметрии, вычислим M_{oz} . Ускорение любой точки векторно складывается из касательного и нормального ускорений $\vec{a}_k = \vec{a}_k^r + \vec{a}_k^n$. Соответственно сила инерции точки равна сумме двух сил $\vec{\Phi}_k = \vec{\Phi}_k^r + \vec{\Phi}_k^n$. Эти силы показаны на рис. 1.5. Момент относительно точки O создаёт только касательная составляющая $M_{oz}(\vec{\Phi}_k^r) = -\Phi_k^r h_k = -m_k h_k^2 \varepsilon$. В этой формуле $h_k = OM_k$, а знак минус указывает что момент направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε . Просуммируем по всем точкам и получим $M_{oz}^u = -\sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \varepsilon$. Вынесем общий множитель ε за скобки, будем иметь

$$M_{oz}^u = -\left(\sum_{k=1}^n m_k h_k^2\right) \varepsilon = -I_z \varepsilon, \quad (2.7)$$

где $I_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2$ это момент инерции тела относительно его оси вращения.

Окончательно, *система сил инерции вращающегося тела, имеющего плоскость материальной симметрии, приводится к силе $\vec{R}^u = -m\vec{a}_c$, приложенной к точке O (см рис.1.5), и к паре сил, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения и имеющей момент,*

равный по величине взятому со знаком минус произведению момента инерции тела I_z относительно оси вращения и углового ускорения ε . Знак «-» указывает, что направление вращения, создаваемое парой, противоположно направлению углового ускорения ε .

3. *Вращение тела вокруг оси, проходящей через центр масс.* Если тело, рассмотренное в предыдущем пункте, вращается вокруг оси, проходящей через центр масс, то $\vec{R}^u = -m\vec{a}_c = 0$, так как $a_c = 0$. Следовательно, в этом случае система сил инерции тела приводится к одной паре сил с моментом $M_c^u = -I_{cz}\varepsilon$, который лежит в плоскости симметрии.

4. *Плоскопараллельное движение.* Если тело имеет плоскость материальной симметрии и движется параллельно этой плоскости, то ускорение любой точки можно определить, взяв за полюс центр масс C по формуле $\vec{a}_k = \vec{a}_c + \vec{a}_{M_kC}^r + \vec{a}_{M_kC}^n$, так как движение тела складывается из поступательного движения вместе с центром масс и вращательного движения вокруг центра масс. Учитывая предыдущие доказательства, можем сделать вывод.

В случае плоскопараллельного движения тела, система всех его сил инерции точек приводится к лежащей в плоскости симметрии силе, равной $\vec{R}^u = -m\vec{a}_c$ и приложенной в центре масс C тела, и паре с моментом $M_c^u = -I_{cz}\varepsilon$.

2.2.Общее уравнение динамики (принцип Даламбера – Лагранжа).

Согласно принципу Даламбера, для каждой материальной точки механической системы выполняется равенство $\vec{F}_k + \vec{N}_k + \vec{\Phi}_k = 0$, $k=1,2,\dots,n$. Дадим системе любое возможное перемещение и вычислим элементарную работу сил на соответствующих возможных перемещениях точек системы. Получим $(\vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k) + (\vec{N}_k \cdot \delta\vec{r}_k) + (\vec{\Phi}_k \cdot \delta\vec{r}_k) = 0$ или $\delta A_{F_k} + \delta A_{N_k} + \delta A_{\Phi_k} = 0, k=1,2,\dots,n$.

Просуммируем последние равенства по индексу k ,

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k} + \sum_{k=1}^n \delta A_{N_k} + \sum_{k=1}^n \delta A_{\phi_k} = 0. \quad (2.8)$$

Для идеальных связей сумма работ всех сил реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, поэтому $\sum_{k=1}^n \delta A_{N_k} = 0$. В этих условиях равенство (2.7) будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k} + \sum_{k=1}^n \delta A_{\phi_k} = 0. \quad (2.9)$$

Из полученного результата вытекает следующий принцип Даламбера - Лагранжа: *при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении будет равна нулю [1-3].* Для голономных систем число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы. В этом случае число уравнений, имеющих вид (2.9) тоже равно числу степеней свободы.

Уравнения (2.9) позволяют составить дифференциальные уравнения движения механической системы

Если, при этом, система представляет собой совокупность каких-нибудь твёрдых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару сил инерции с моментом, равному главному моменту сил инерции относительно этого центра, а затем применить принцип возможных перемещений.

Для простых механических систем с одной степенью свободы с *идеальными, стационарными, удерживающими и голономными связями* уравнение (2.9) можно заменить на другое. С учётом того, что возможные перемещения пропорциональны возможным скоростям, а в этом случае скорости всех точек зависят от какой-нибудь одной скорости, можно доказать, что сумма мощностей всех активных сил и всех сил инерции материальных точек равна нулю на возможном перемещении с возможными скоростями

$$\vec{V}_{kBO3}, k=1,2,\dots,n.$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \vec{V}_{kBO3} + \sum \vec{\Phi}_k \cdot \vec{V}_{kBO3} = 0.$$

А так как при указанных связях действительное перемещение является одним из возможных, то можно утверждать, что сумма мощностей всех активных сил и сил инерции на действительном движении равны нулю.

$$\sum_{k=1}^n N_{F_k} + \sum_{k=1}^n N_{\Phi_k} = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k \cdot \vec{V}_k) + \sum_{k=1}^n (\vec{\Phi}_k \cdot \vec{V}_k) = 0. \quad (2.10)$$

Для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару сил инерции с моментом, равному главному моменту сил инерции относительно этого центра, вычислить сумму мощностей этих сил и приравнять её к нулю.

2.3. Условие равновесия в обобщённых координатах (принцип возможных перемещений).

Число координат (параметров), определяющих положение механической системы, зависит от количества точек (или тел), входящих в систему, и от числа и характера наложенных связей. Для голономных систем число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом её степеней свободы. В качестве этих координат можно выбрать параметры, имеющие любую размерность и любой геометрический (или физический) смысл.

Независимые между собой параметры, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют её положение, называют *обобщёнными координатами* системы.

Если система имеет S степеней свободы положение системы определяют S обобщённых координат q_1, q_2, \dots, q_S . Поскольку обобщённые координаты независимы, то элементарные приращения этих координат $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$ (2. 11) также независимы. При этом,

величины (2.11) определяют соответствующие независимые друг от друга возможные перемещения системы.

Декартовы координаты точек механической системы, следовательно и ее радиус-вектор можно выразить через обобщённые координаты

$$\vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s) = x_k(q_1, q_2, \dots, q_s)\vec{i} + y_k(q_1, q_2, \dots, q_s)\vec{j} + z_k(q_1, q_2, \dots, q_s)\vec{k}.$$

Возможное перемещение этой точки можно выразить через независимые возможные перемещения

$$\delta\vec{r}_k = \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s = \sum_{i=1}^s \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Используя это равенство вычислим сумму элементарных работ всех действующих на любом возможном перемещении механической системы

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \sum_{i=1}^s \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \quad (2.12)$$

Обозначим

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}$$

и запишем формулу (2. 12)

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k} = \sum_{i=1}^s Q_i \cdot \delta q_i. \quad (2. 13)$$

Величина Q_i представляет собой обобщённую силу, соответствующую обобщённой координате q_i ($i=1, 2, \dots, S$).

Обобщённые силы - это величины, равные коэффициентам перед приращениями обобщённых координат в выражениях полной элементарной работы действующих на систему сил.

$$Q_i = \frac{\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k}}{\delta q_i} \quad (2.14)$$

Согласно принципу возможных перемещений, необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы. Т.е.

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k} = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^n Q_i \cdot \delta q_i = 0, \quad (2.15)$$

так как все величины δq_i между собой независимы, то равенство (2.15) может выполняться только тогда, когда $Q_i = 0$ для всех значений $i=1, 2, \dots, S$.

Таким образом, для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщённые силы соответствующие выбранным для системы обобщённым координатам, были равны нулю. Число уравнений равновесия соответствует числу степеней свободы механической системы.

3. Кинематика и динамика кривошипно – ползунного механизма.

3.1 Задание К-1. Кинематика.

Кривошип 1 вращается с постоянной скоростью ω_1 и приводит в движение шатун 2 и ползун 3. Ползун перемещается в прямолинейных направляющих. Заданы размеры звеньев $OA = l_1$ и $AB = l_2$. Для положения, определяемого углом φ , начертить в масштабе схему механизма и определить.

- 1) Скорости точек A , B и C , а также угловую скорость шатуна ω_2 .
- 2) Ускорения этих же точек.
- 3) Ход ползуна.

Для решения применять теоремы о распределении скоростей и ускорений. Решение выполнять графически с помощью программы КОМПАС 3D. Определение скоростей проверить методом построения мгновенного центра скоростей. Схемы механизмов и данные для расчёта представлены в пункте 3.3.

3.2. Задание Д1. Динамика.

Задания выбираются по двум последним цифрам зачетной книжки (предпоследняя – номер задания, последняя – вариант).

Используя исходные данные и решение задания К1, выполнить следующие задания.

1) С помощью принципа Даламбера для механической системы определить реакции внешних и внутренних связей, и величину момента пары сил, приложенной к кривошипу OA - $M_{вр}$. Для этого составить уравнения, выражающие принцип Даламбера для каждого звена и вычислить неизвестные силы реакций связей. Результаты расчётов проверить построением силовых многоугольников для звеньев.

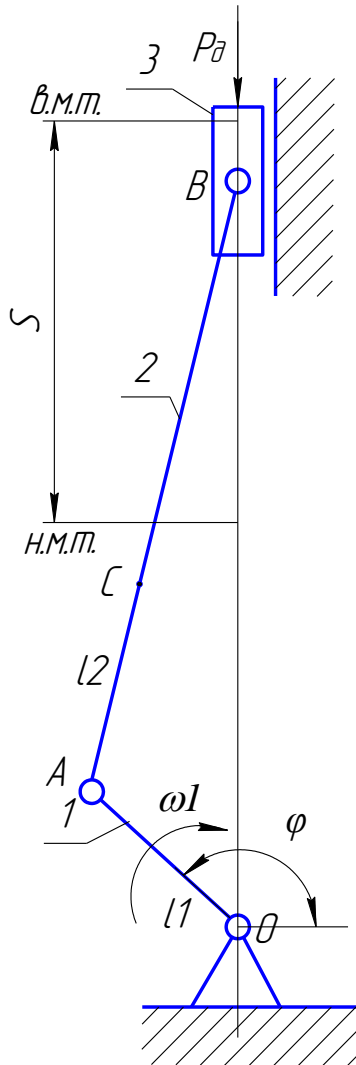
2) Проверить правильность определения $M_{вр}$ с помощью общего уравнения динамики.

3) Вычислить обобщённую силу, приняв за обобщённую координату угол φ_1 . Приравняв её равной нулю, определить значение момента $M_{вр}$ в случае равновесия механизма в указанном положении.

3.3 Схемы механизмов и исходные данные.

Задача 1.

Грузовая тележка. Кривошипно-ползунный механизм двигателя внутреннего сгорания преобразует возвратно-поступательное движение ползуна (поршня) 3 во вращательное движение кривошипа 1 (коленвал). Цикл движения поршня включает такты расширения и сжатия. При расширении взорвавшаяся в цилиндре рабочая смесь перемещает поршень из в.м.т. в н.м.т. На рисунке S-ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.



Исходные данные для кинематического расчета

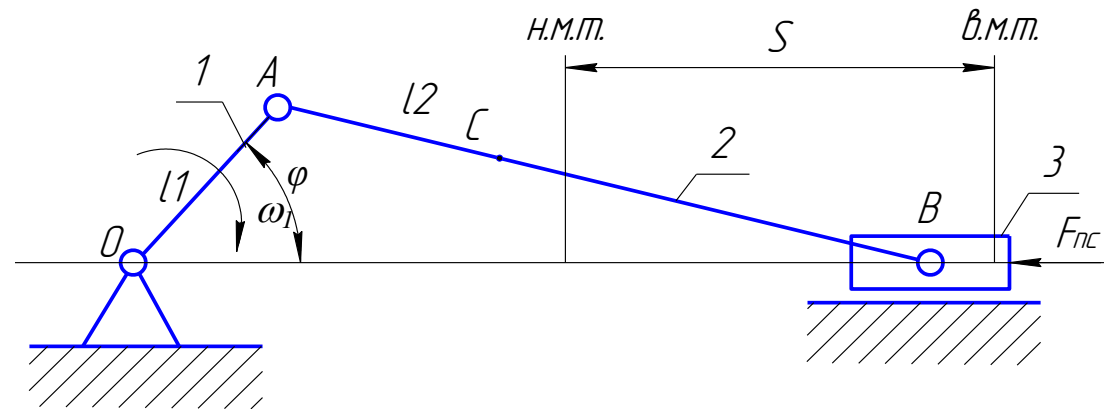
ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа φ , град	60	30	330	300	240	210	150	120	45	135
Угловая скорость кривошипа ω , c^{-1}	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190
Длина кривошипа l_1 , м	0,075	0,0725	0,07	0,0675	0,065	0,0625	0,06	0,0575	0,055	0,0525
Длина шатуна l_2 , м	0,44	0,4	0,37	0,36	0,33	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21
Расстояние AC l_3 , м,	0,154	0,14	0,13	0,126	0,12	0,112	0,1	0,091	0,08	0,074

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	8,8	8	7,4	7,2	6,6	6,4	5,8	5,2	4,6	4,2
Масса шатуна, кг	4,4	4	3,7	3,6	3,3	3,2	2,9	2,6	2,3	2,1
Масса ползуна, кг	1,32	1,2	1,11	1,08	0,99	0,96	0,87	0,78	0,69	0,63
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг м ²	0,128	0,096	0,076	0,07	0,054	0,049	0,037	0,026	0,018	0,014
Значение силы, F (Н)	27475	21980	7850	3925	2750	5700	13266	22055	16470	17700

Задача 2.

Кривошипно – ползунный механизм является основным для горизонтально-ковочной машины, которая предназначена для горячей высадки изделий из прутковых заготовок. На рисунке показаны крайние положения ползуна: максимальное удаление ползуна от точки O – *в.м.т.*; минимальное удаление *н.м.т.*, S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа откладывается от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.



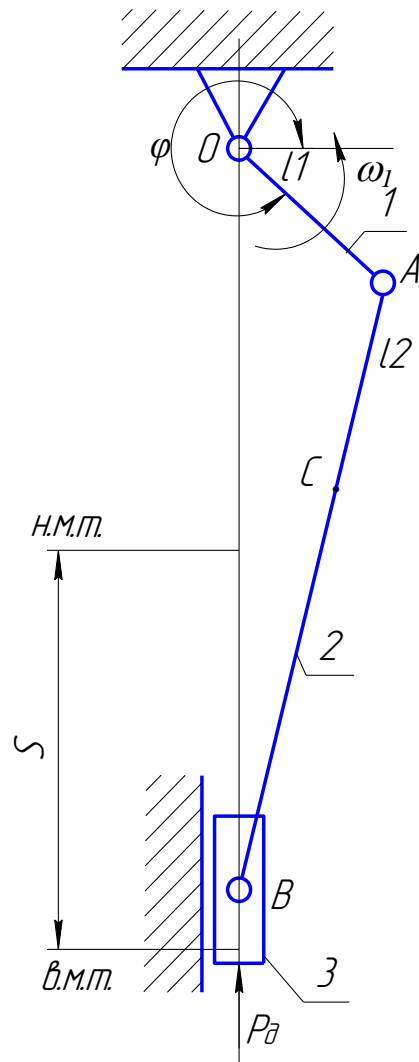
Исходные данные для кинематического расчета

ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа φ , град	330	300	240	210	150	120	60	30	315	45
Угловая скорость кривошипа ω , с ⁻¹	5,0	7,0	8,0	8,5	6,0	6,5	7,5	9,0	8,0	7,5
Длина кривошипа l_1 , м	0,06	0,07	0,1	0,105	0,065	0,15	0,125	0,115	0,09	0,085
Длина шатуна l_2 , м	0,18	0,231	0,32	0,347	0,228	0,45	0,45	0,345	0,288	0,255
Расстояние AC l_3 , м,	0,063	0,08	0,112	0,121	0,08	0,16	0,16	0,12	0,1	0,089

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	40	40	60	50	80	90	60	60	70	50
Масса шатуна, кг	80	60	120	100	150	180	75	90	120	100
Масса ползуна, кг	180	150	240	200	300	320	150	180	270	200
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг м ²	0,44	0,54	2	2	1,33	6,2	2,6	1,8	1,69	1,1
Значение силы, кН	75	27	0	0	0	0	20	80	15	7

Задача 3.



Грузовая тележка с двухтактным двигателем внутреннего сгорания предназначена для перемещения грузов. Кривошипно-ползунный механизм двигателя преобразует возвратно-поступательное движение поршня 3 во вращательное движение кривошипа. Цикл движения поршня включает такты расширения, когда взорвавшаяся в цилиндре рабочая смесь перемещает поршень из в.м.т. в н.м.т. и такт сжатия.

На рисунке S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.

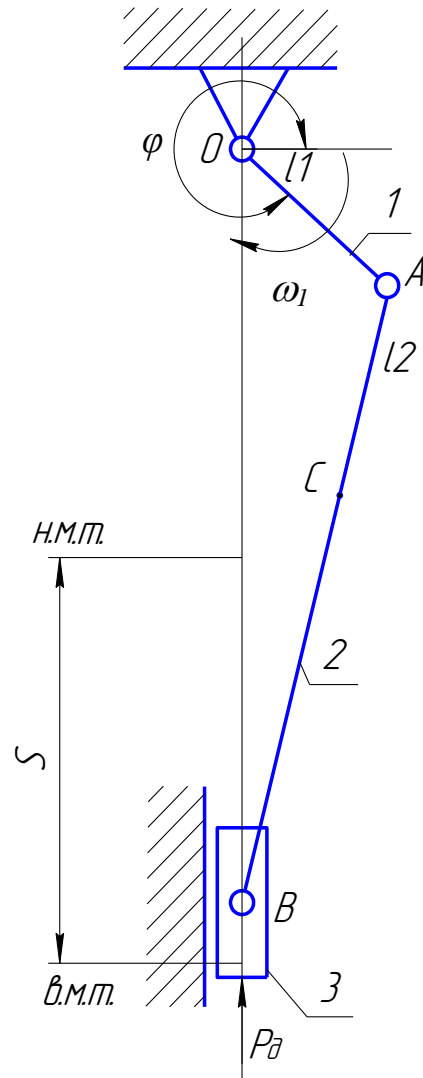
Исходные данные для кинематического расчета

ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа φ , град	300	330	30	60	120	150	210	240	315	45
Угловая скорость кривошипа ω , c^{-1}	157	167	178	188	199	209	220	230	241	251
Длина кривошипа l_1 , м	0,1	0,095	0,09	0,085	0,08	0,075	0,07	0,065	0,06	0,055
Длина шатуна l_2 , м	0,53	0,5	0,45	0,425	0,4	0,36	0,33	0,31	0,27	0,25
Расстояние AC l_3 , м,	0,186	0,175	0,158	0,149	0,14	0,126	0,12	0,1	0,095	0,086

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	10,6	10	9	8,5	8	7,2	6,6	6,2	5,4	5
Масса шатуна, кг	5,3	5	4,5	4,25	4	3,6	3,3	3,1	2,7	2,5
Масса ползуна, кг	1,59	1,5	1,35	1,28	1,2	1	0,99	0,91	0,81	0,75
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг m^2	0,45	0,375	0,27	0,23	0,192	0,14	0,11	0,089	0,059	0,47
Значение силы, Н	69080	53380	21980	6280	3250	15340	27450	55700	35600	13370

Задача 4.



Самоходное шасси. Основным механизмом двигателя внутреннего сгорания является кривошипно-ползунный механизм, который преобразует возвратно-поступательное движение ползуна (поршня) 3 во вращательное движение кривошипа 1. Передача движения от ползуна к кривошипу осуществляется через шатун 2. Цикл движения поршней включает такты расширения, и сжатия. Взорвавшаяся в камере сгорания рабочая смесь перемещает поршень из в.м.т. в н.м.т., затем ползун возвращается на исходную позицию.

На рисунке S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.

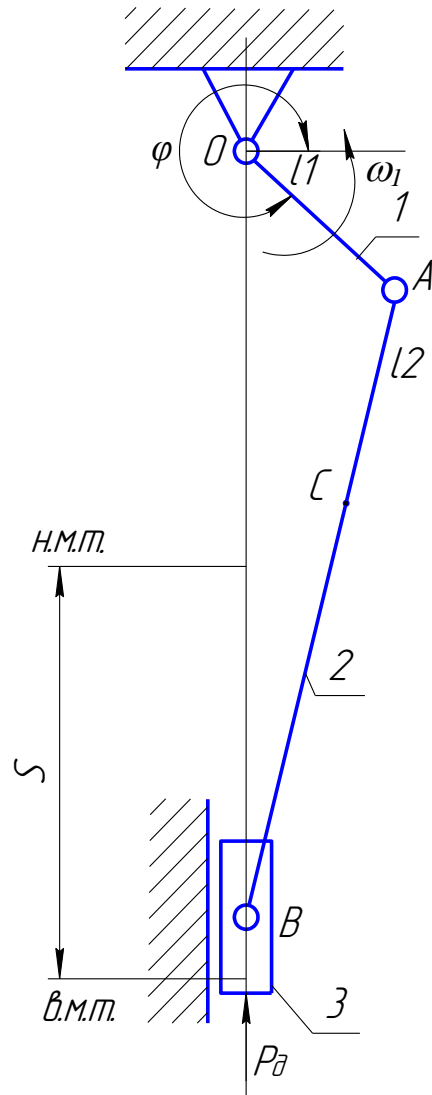
Исходные данные для кинематического расчета

ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа , град	240	210	150	120	60	30	330	300	225	315
Угловая скорость кривошипа ω , c^{-1}	120	110	100	105	115	125	130	130	135	140
Длина кривошипа l_1 , м	0,05	0,055	0,06	0,055	0,05	0,045	0,043	0,04	0,045	0,05
Длина шатуна l_2 , м	0,27	0,29	0,3	0,26	0,26	0,25	0,23	0,2	0,197	0,2
Расстояние AC l_3 , м,	0,095	0,1	0,105	0,091	0,091	0,088	0,08	0,07	0,069	0,07

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	5,4	5,8	6	5,2	5,2	5	4,6	4	3,94	4
Масса шатуна, кг	2,7	2,9	3	2,6	2,6	2,5	2,3	2	1,97	2
Масса ползуна, кг	0,81	0,87	0,9	0,78	0,78	0,75	0,69	0,6	0,59	0,6
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг m^2	0,033	0,041	0,046	0,03	0,03	0,027	0,02	0,014	0,013	0,014
Значение силы, Н	35325	29045	10205	6280	540	3380	6670	8580	31350	7550

Задача 5.



Мототележка. Кривошипно-ползунный механизм двигателя внутреннего сгорания мототележки преобразует возвратно-поступательное движение ползуна (поршня) 3 во вращательное движение кривошипа 1. Передача движения от ползуна к кривошипу осуществляется через шатун 2. Цикл движения поршня включает такты расширения, когда взорвавшаяся в цилиндре рабочая смесь перемещает поршень из н.м.т. в в.м.т., и сжатия.

На рисунке S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.

Исходные данные для кинематического расчета

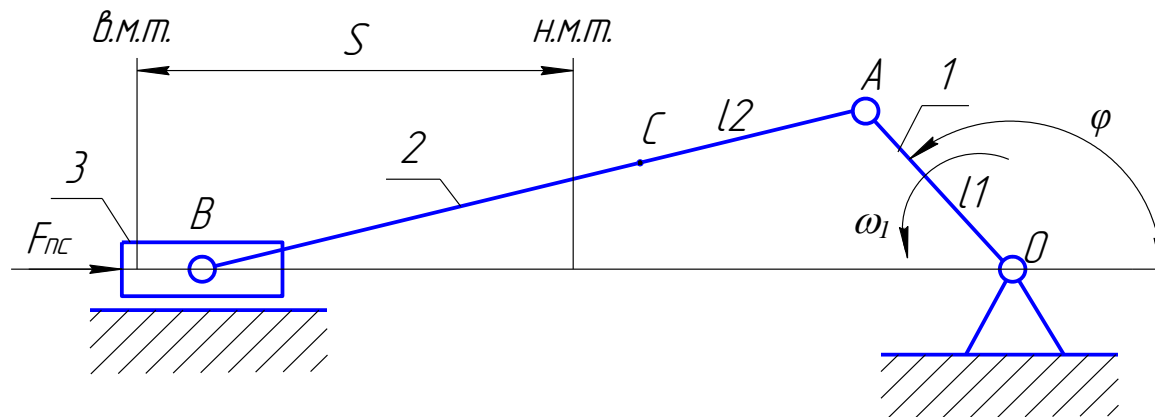
ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа , град	300	330	30	60	120	150	210	230	315	135
Угловая скорость кривошипа ω , c^{-1}	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
Длина кривошипа l_1 , м	0,07	0,065	0,065	0,06	0,06	0,055	0,055	0,05	0,05	0,045
Длина шатуна l_2 , м	0,35	0,325	0,29	0,25	0,27	0,23	0,22	0,2	0,19	0,17
Расстояние AC l_3 , м,	0,123	0,11	0,1	0,088	0,95	0,08	0,077	0,07	0,067	0,06

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	7	6,5	5,8	5	5,4	4,6	4,4	4	3,8	3,4
Масса шатуна, кг	3,5	3,25	2,9	2,5	2,7	2,3	2,2	2	1,9	1,7
Масса ползуна, кг	1,1	0,95	0,87	0,6	0,81	0,69	0,66	0,6	0,57	0,51
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг m^2	0,073	0,065	0,052	0,047	0,041	0,031	0,024	0,019	0,01	0,008
Значение силы, Н	29045	22760	10450	6780	1370	5640	13600	21730	25740	3360

Задача 6.

Одноцилиндровый поршневой компрессор. Основным механизмом компрессора является кривошипно-ползунный механизм, который преобразует вращательное движение кривошипа 1 в поступательное движение ползуна (поршня) 3. Цикл движения поршня совершается за один оборот кривошипа и включает такты всасывания, сжатия, нагнетания и расширения. При этом поршень перемещается от в.м.т. до н.м.т. а затем возвращается на исходную позицию. На рисунке S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.



Исходные данные для кинематического расчета

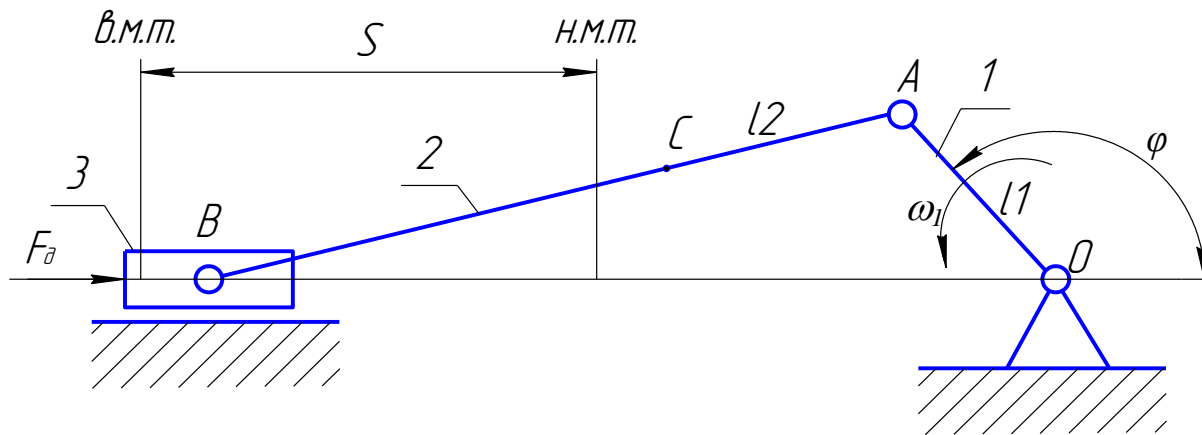
ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа α , град	210	240	300	330	30	60	120	150	135	45
Угловая скорость кривошипа ω , с ⁻¹	15	16	17	18	19	20	19	21	22	20
Длина кривошипа l_1 , м	0,11	0,12	0,1	0,09	0,08	0,12	0,1	0,11	0,13	0,14
Длина шатуна l_2 , м	0,47	0,53	0,45	0,41	0,38	0,58	0,47	0,5	0,59	0,62
Расстояние AC l_3 , м,	0,16	0,17	0,15	0,14	0,13	0,19	0,16	0,16	0,19	0,21

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	9,4	10,6	9	8,1	7,6	11,6	9,4	10	11,8	12,4
Масса шатуна, кг	4,7	5,3	4,5	4,1	3,8	5,8	4,7	5	5,9	6,2
Масса ползуна, кг	1,2	1,7	1,5	1,4	1,3	1,9	1,2	1,6	1,9	2,1
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг м ²	0,16	0,18	0,15	0,13	0,12	0,29	0,16	0,13	0,32	0,35
Значение силы, Н	48700	27500	540	0	1470	21600	45800	50000	47850	16400

Задача 7.

Двухтактный двигатель внутреннего сгорания автономной электроустановки приводит в движение электрогенератор, вырабатывающий электрический ток. В кривошипно-ползунном механизме двигателя, состоящего из кривошипа 1, шатуна 2 и ползуна 3 возвратно-поступательное движение ползуна (поршня) 3 преобразуется во вращательное движение кривошипа. Рабочий цикл в цилиндре двигателя совершается за один оборот коленчатого вала. При этом, ползун перемещается из в.м.т. в н.м.т. а затем обратно. На рисунке S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.



Исходные данные для кинематического расчета

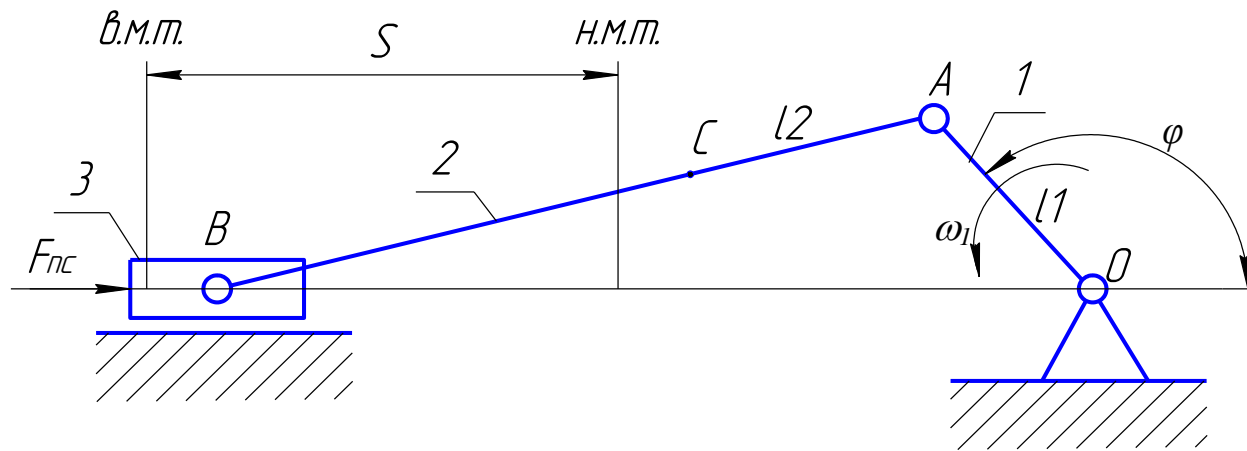
ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа α , град	210	240	300	330	30	60	120	150	135	45
Угловая скорость кривошипа ω , c^{-1}	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370
Длина кривошипа l_1 , м	0,065	0,06	0,06	0,055	0,05	0,05	0,065	0,065	0,06	0,05
Длина шатуна l_2 , м	0,33	0,29	0,27	0,24	0,21	0,19	0,28	0,25	0,2	0,19
Расстояние AC l_3 , м,	0,11	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,09	0,08	0,07	0,06

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	2,5	2,1	1,9	1,7	1,5	1,3	2,1	1,8	1,4	1,3
Масса шатуна, кг	3,3	2,9	2,7	2,4	2,1	1,9	2,8	2,5	2	1,9
Масса ползуна, кг	2,5	2,1	1,9	1,7	1,5	1,3	2,1	1,8	1,4	1,3
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг м ²	0,071	0,065	0,059	0,047	0,033	0,016	0,061	0,054	0,021	0,016
Значение силы F_d , Н	29340	21600	14300	7500	1250	6780	12445	21456	16780	4567

Задача 8.

Бетононасос. Основным механизмом бетононасоса является кривошипно-ползунный механизм, который преобразует вращательное движение кривошипа 1 в поступательное движение ползуна (поршня) 3. Цикл движения поршня совершается за один оборот кривошипа и включает такты всасывания и нагнетания. При этом, ползун перемещается из в.м.т. в н.м.т. а затем обратно. На рисунке S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.



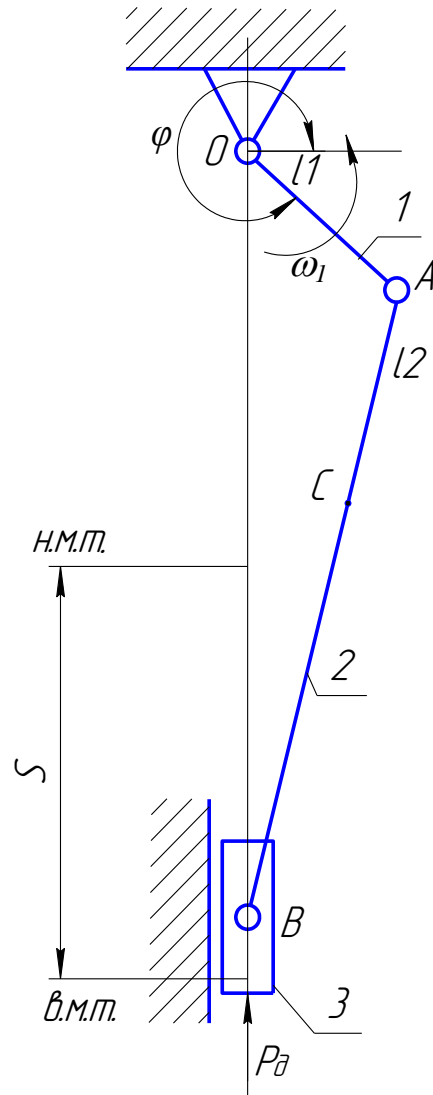
Исходные данные для кинематического расчета

ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа φ , град	210	240	300	330	30	60	120	150	135	45
Угловая скорость кривошипа ω , c^{-1}	4	4,5	5	5,5	6	6,5	6,4	6,2	5,8	5,6
Длина кривошипа l_1 , м	0,25	0,24	0,23	0,22	0,21	0,2	0,19	0,18	0,17	0,16
Длина шатуна l_2 , м	0,875	0,864	0,851	0,836	0,819	0,8	0,779	0,756	0,731	0,704
Расстояние AC l_3 , м,	0,22	0,216	0,21	0,209	0,2	0,2	0,19	0,189	0,18	0,176

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	17,5	17,28	17	16,72	16,38	16	16,58	15,12	14,62	14
Масса шатуна, кг	8,75	8,64	8,51	8,36	8,19	8	7,79	7,56	7,31	7,04
Масса ползуна, кг	21,88	21,6	21,28	20,9	20,48	20	19,48	18,9	18,28	17,6
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг m^2	1,3	1,24	1,17	1,07	0,99	0,93	0,87	0,81	0,75	0,69
Значение силы, кН	0	0	0	0	67	117	103	47	74	85

Задача 9.



Автомобиль с четырехтактным двигателем внутреннего сгорания. Основным механизмом двигателя внутреннего сгорания является кривошипно-ползунный механизм, который преобразует возвратно-поступательное движение ползуна (поршня) 3 во вращательное движение кривошипа 1. Передача движения от ползуна к кривошипу осуществляется через шатун 2. Цикл движения поршней включает такты расширения, и сжатия. При этом, ползун перемещается из в.м.т. в н.м.т. а затем обратно. На рисунке S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.

Исходные данные для кинематического расчета

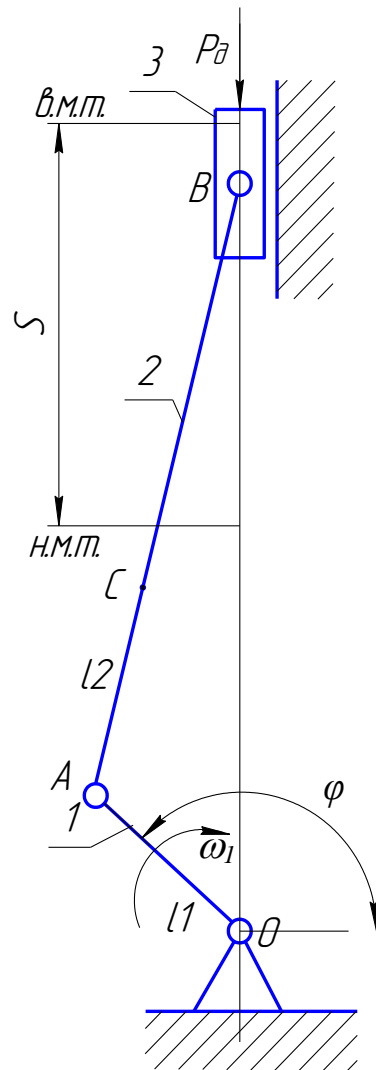
ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа φ , град	300	330	30	60	120	150	210	240	315	45
Угловая скорость кривошипа ω , c^{-1}	200	205	210	215	220	225	230	235	240	250
Длина кривошипа l_1 , м	0,075	0,075	0,07	0,07	0,065	0,06	0,055	0,05	0,05	0,045
Длина шатуна l_2 , м	0,3	0,375	0,29	0,28	0,27	0,26	0,24	0,23	0,2	0,19
Расстояние AC l_3 , м,	0,1	0,12	0,1	0,09	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	6	7,5	5,8	5,6	5,4	5,2	4,8	4,6	4	3,8
Масса шатуна, кг	3	3,75	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2	1,9
Масса ползуна, кг	1	1,21	1	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг m^2	0,068	0,089	0,063	0,057	0,052	0,046	0,039	0,027	0,019	0,012
Значение силы, Н	37400	22570	12570	4231	679	4567	13568	26788	29564	78954

Задача 10.

Самоходное шасси с двухтактным двигателем внутреннего сгорания предназначено для перемещения грузов. Кривошипно-ползунный механизм двигателя преобразует возвратно-поступательное движение ползуна (поршня) 3 во вращательное движение кривошипа 1. Цикл движения поршней включает такты расширения и такт сжатия. При этом, ползун перемещается из в.м.т. в н.м.т. а затем обратно. На рисунке S – ход ползуна. Угол поворота кривошипа отмеряется от горизонтальной положительной оси x против часовой стрелки.



Исходные данные для кинематического расчета

ПАРАМЕТР	ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Угол поворота кривошипа φ , град	60	30	330	300	240	210	150	120	45	315
Угловая скорость кривошипа ω , c^{-1}	220	215	210	205	200	195	190	185	180	170
Длина кривошипа l_1 , м	0,04	0,042	0,045	0,047	0,05	0,05	0,055	0,06	0,06	0,065
Длина шатуна l_2 , м	0,2	0,21	0,2	0,18	0,195	0,2	0,22	0,3	0,27	0,25
Расстояние AC l_3 , м,	0,07	0,074	0,07	0,063	0,068	0,07	0,077	0,11	0,095	0,88

Исходные данные для динамического расчета

Масса кривошипа, кг	4	4,2	4	3,6	3,9	4	4,4	6	5,4	5
Масса шатуна, кг	2	2,1	2	1,8	1,95	2	2,2	3	2,7	2,5
Масса ползуна, кг	0,6	0,63	0,6	0,5	0,58	0,6	0,66	0,9	0,81	0,75
Момент инерции относительно центров масс шатуна I_C , кг m^2	0,021	0,023	0,021	0,01	0,017	0,021	0,025	0,046	0,039	0,028
Значение силы, Н	17540	13660	5430	1460	455	2450	7454	14678	15677	3566

3.4. Пример выполнения задания «Кинематика кривошипно-ползунного механизма».

Определить скорости и ускорения точек A , B , C кривошипно – ползунного механизма в положении, указанном на рис.3.1. Дано $l_1=OA=0,20$ м, $l_2=AB=0,50$ м, $\varphi=60$, $l_3=AC=0,20$ м, $\omega_1=\omega_{OA}=200$ с⁻¹, $h=0,04$ м.

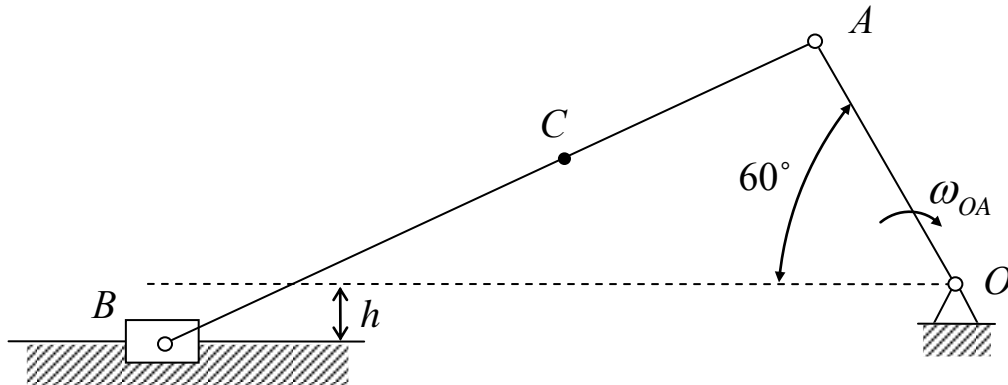


Рис.3.1 Схема механизма

Решение. Для определения скоростей точек применяется теорема о распределении скоростей точек при плоскопараллельном движении твердого тела. Согласно этой теореме, скорость любой точки шатуна равна векторной сумме двух скоростей: вектора скорости какой-нибудь другой точки, взятой за полюс, и скорости данной точки во вращательном движении тела вокруг этого полюса

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \quad (3.1)$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA}. \quad (3.2)$$

В формулах (3.1) и (3.2) \vec{V}_A -вектор скорости точки A , он перпендикулярен кривошипу OA и равен по величине $V_A = \omega_1 \cdot l_1$; $V_A = 2 \cdot 0,20 = 40$ м/с. Скорости V_{BA} и V_{CA} определяются формулами $V_{BA} = \omega_2 \cdot l_2$, $V_{CA} = \omega_2 \cdot CA$ и по направлению перпендикулярны прямой AB .

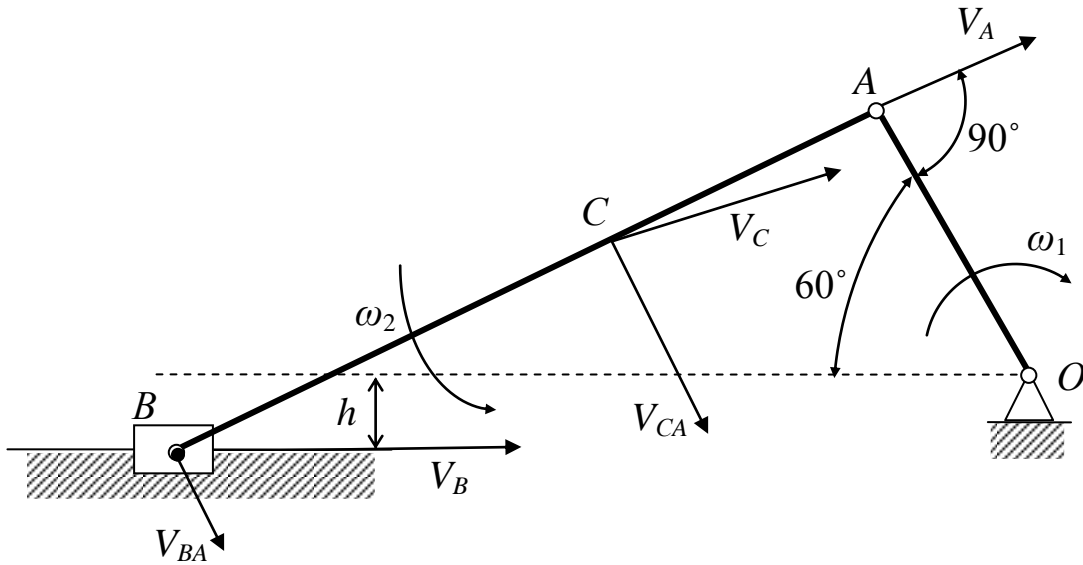


Рис.3.2 Кинематика (масштабный коэффициент $\mu_l=150 \frac{мм}{м}$).

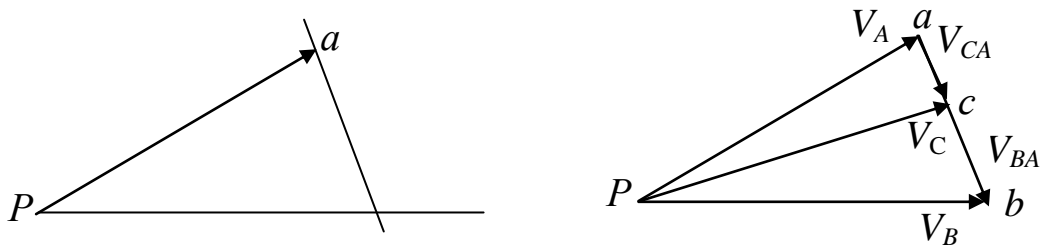


Рис 3.3 Графическое определение скоростей точек.

(масштабный коэффициент $\mu_v=1 \frac{м/с}{мм}$)

Графическое решение начинаем с изображения схемы механизма в масштабе, рис.3.2. В нашем случае масштабный коэффициент длины $\mu_l = \frac{0,5 м}{75 мм} = 0,0067 \frac{м}{мм}$, это значит, что шатун длиной $l_2=0,5 м$ изображается отрезком равным $AB=75 мм$. Кривошип изображается отрезком $OA=l_1/\mu_l=30 мм$. Затем, на рисунке изображаются векторы скоростей \vec{v}_A , и \vec{v}_B показывающие их направления.

Вектор скорости точки B - \vec{v}_B горизонтален и по величине неизвестен. Вектор \vec{v}_{BA} скорости точки B во вращательном движении

шатуна AB вокруг полюса A направляется перпендикулярно отрезку AB (рис.3.2). Величина этого вектора неизвестна.

На рис.3.3 показано построение векторного треугольника, с помощью которого определяются все неизвестные скорости. Начинаем построение с отрезка Pa , который в масштабе $\mu_v = \frac{40}{60} = 0,667 \frac{м/с}{мм}$ соответствует скорости \vec{v}_A . Отрезок Pa параллелен вектору \vec{v}_A и имеет длину равную $Pa = \frac{40_{м/с}}{0,667_{мм}}$, $Pa = 60 мм$.

Затем через точку a проводим линию перпендикулярную AB , а через точку P линию параллельную скорости .

В получившемся треугольнике расставляем направления векторов так, чтобы выполнялось равенство (3.1). Модули неизвестных векторов получаем, измеряя их значения на рисунке.

С учетом масштаба получим $V_B = 64 мм \cdot 0,667 \frac{м/с}{мм} = 42 м/с$, аналогично $V_{BA} = 32 мм \cdot 0,667 \frac{м/с}{мм} = 21,3 м/с$.

Определяем угловую скорость шатуна AB :

$$\omega_2 = V_{BA} / l_2 = 21,3 / 0,50 = 42,6 с^{-1}. \quad (3.3)$$

Направление вращения шатуна – против часовой стрелки (рис3.2). Вычисляем скорость V_{CA} .

$$V_{CA} = \omega_2 \cdot l_3 = 42,6 \cdot 0,20 = 8,14 м/с.$$

С учетом того, что скорость V_{CA} перпендикулярна отрезку CA и направлена в ту же сторону, что и V_{BA} , построим скорость V_C . Измеряя длину вектора V_C , получим его величину $V_C = 39 м/с$. Перейдем к определению ускорений точек.

Определение ускорений точек следует начинать с вычисления ускорения точки A . Кривошип OA вращается равномерно, поэтому ускорение точки A совпадает с нормальным ускорением, которое направлено от точки A к точке O . $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 200^2 \cdot 0,20 = 8000 м/с^2$.

Ускорения точек B и C определяем с помощью теоремы о распределении ускорений в плоскопараллельном движении шатуна AB . Согласно этой теореме, вектор ускорения любой точки тела при

его плоскопараллельном движении равен векторной сумме ускорения какой-нибудь другой точки, взятой за полюс, касательного и нормального ускорений рассматриваемой точки во вращательном движении тела вокруг полюса. Возьмём за полюс точку A , тогда

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n; \quad (3.4)$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_a + \vec{a}_{ca}^{\tau} + \vec{a}_{ca}^n. \quad (3.5)$$

При этом величина касательного ускорения $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot l_2$ неизвестна, а направление его перпендикулярно отрезку AB . Величина нормального ускорения равна $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2$, её можно вычислить

$$a_{BA}^n = 42,6^2 \cdot 0,5 = 907,38 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора \vec{a}_{BA}^n параллельно отрезку BA от B к A (рис.3.4).

На рис.3.4 схема механизма изображена с масштабным коэффициентом $\mu_l = \frac{0,50 \text{ м}}{150 \text{ мм}} = 0,00333 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$.

На (рис.3.5 а) показано графическое решение уравнения (3.4), начало построения с масштабным коэффициентом,

$$\mu_a = \frac{8000 \text{ м/с}^2}{60 \text{ мм}} = 133,3 \frac{\text{с}^2}{\text{мм}}.$$

Из произвольной точки P откладывается отрезок pa , соответствующий вектору \vec{a}_A , на рисунке он изображен длиной $pa = 60 \text{ мм}$, который параллелен \vec{a}_A .

Вектор \vec{a}_{BA}^n пристраиваем к концу вектора \vec{a}_A . Он изображается отрезком $an = \frac{907,38}{133,3} = 6,8 \text{ мм}$ параллельно отрезку AB по направлению от B к A . Через конец вектора \vec{a}_{BA}^n проводится линия перпендикулярная AB , а через начало вектора \vec{a}_A проводится линия параллельная ходу ползуна. Построение завершается расстановкой стрелок (рис.3.5 б). Все искомые величины измеряются и с учетом масштаба определяются.

$$a_B = 10 \cdot 133,3 = 1333 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^{\tau} = 55,5 \cdot 133,3 = 7400 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = 14800 \text{ с}^{-2}.$$

По рис.3.5 можно установить, что ε_2 направлено против часовой стрелки.

Аналогично определяется ускорение точки C , величины слагаемых векторов вычисляются по формулам:

$$a_{CA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2; \quad a_{CA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_2.$$

Строится вектор ускорения \vec{a}_c , измеряется величина $a_C = 5200 \text{ м/с}^2$.

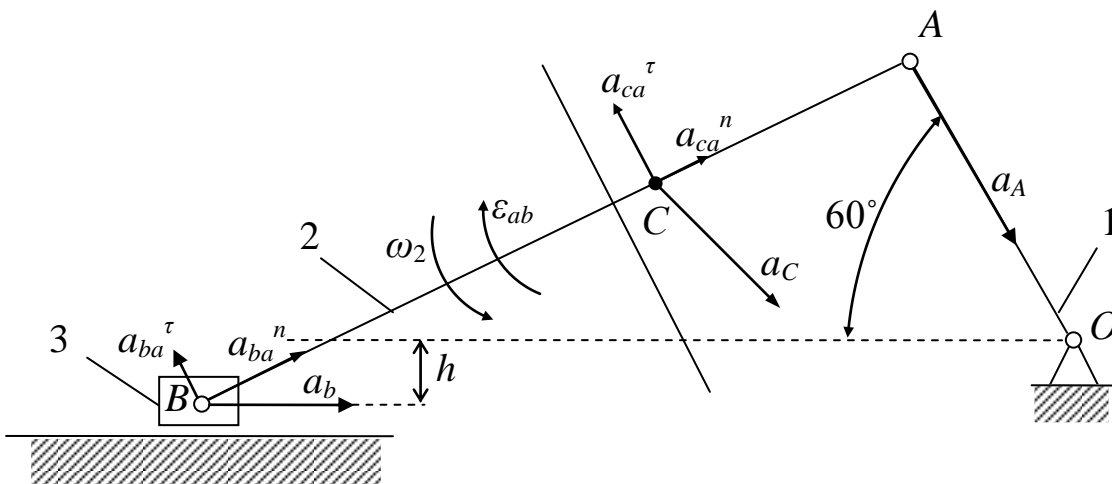


Рис. 3.4. Ускорения

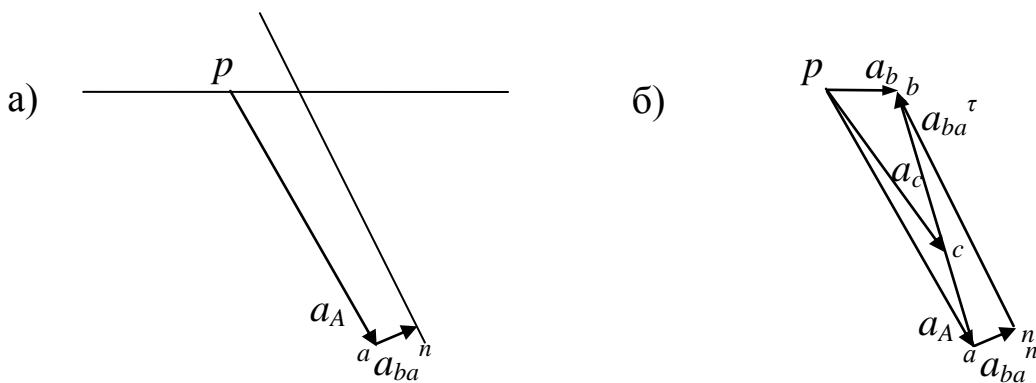


Рис.3.5 Графическое определение ускорений точек

Итог расчета представлен в таблице 3.1.

Скорости и ускорения точек

Таблица 3.1

V_B	V_C	a_B	a_C	ω_2	ε_2
45,0м/с	40,2м/с	1330м/с ²	5200м/с ²	40,6с ⁻¹	14800с ⁻²

Можно это же построение выполнить в программе КОМПАС. На рис.3.6 показано построение плана скоростей и ускорений в этой программе.

Надо отметить, что в этом случае получаются более точные результаты.

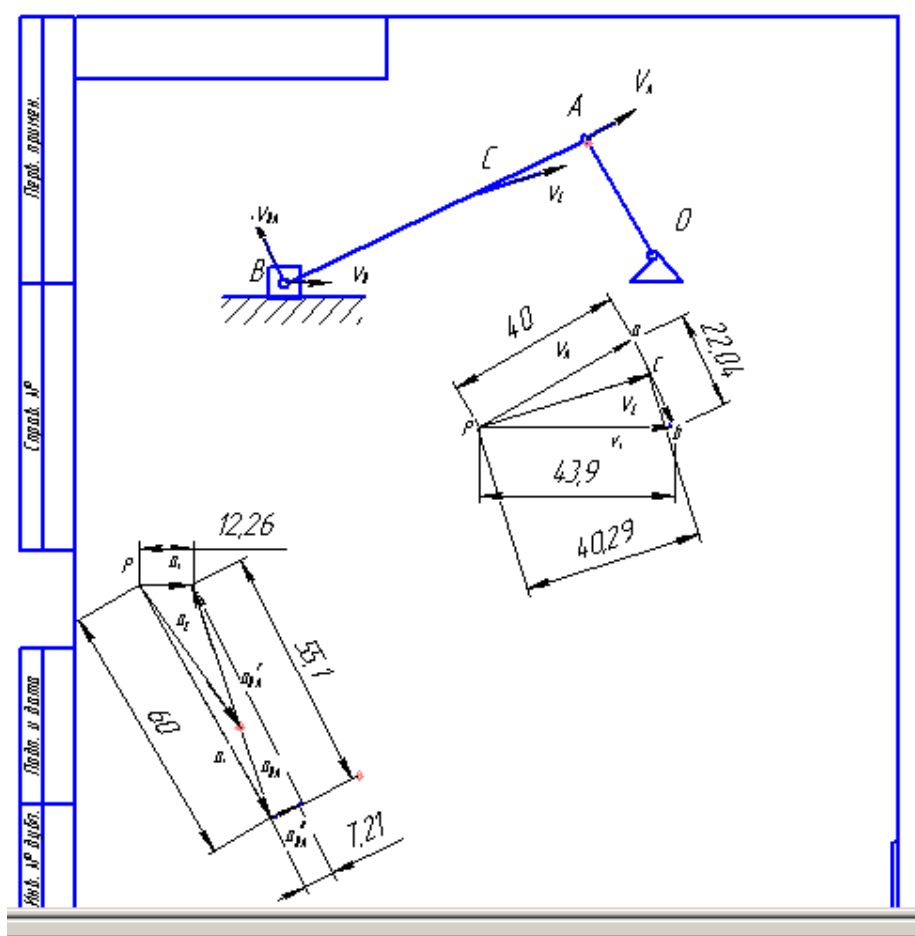


Рис.3.6. Пример оформление чертежа в программе КОМПАС

3.5. Пример выполнения задания «Динамика кривошипно-ползунного механизма».

Используя результаты кинематического расчёта, приведённого в примере и значения следующих величин: массы тел $m_1=4\text{кг}$, $m_2=2\text{кг}$, $m_3=0,6\text{кг}$; момент инерции шатуна $I_C=0,21\text{кгм}^2$; сила, действующая на ползун $F=17000\text{Н}$, выполнить следующие задания.

1) С помощью принципа Даламбера для механической системы определить реакции внешних и внутренних связей, и величину момента пары сил $M_{вр}$, приложенной к кривошипу OA . Для этого составить уравнения, выражающие принцип Даламбера и вычислить неизвестные силы реакций связей. Результаты расчётов проверить построением силовых многоугольников для звеньев.

2) Проверить правильность определения $M_{вр}$ с помощью общего уравнения динамики.

3) Вычислить обобщённую силу, приняв за обобщённую координату угол φ_1 . Приравняв её нулю, определить значение момента $M_{вр}$ в случае равновесия механизма в указанном положении.

3.5.1. Определение сил реакций связей и вращающего момента $M_{вр}$.

Изобразим механизм в заданном положении на рисунке. Чтобы необходимые размеры не вычислять, а измерять на рисунке, выполним построение схемы механизма с масштабным коэффициентом

$$\mu_l = \frac{l_2}{l_{2\text{чертёжн}}} = \frac{0,5\text{м}}{150\text{мм}} = 0,00333 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

Изобразим внешние силы, действующие на звенья механизма.

Активные силы: силы тяжести $G_1 = m_1g = 39,2\text{Н}$, $G_2 = m_2g = 19,8\text{Н}$, $G_3 = m_3g = 5,88\text{Н}$; сила $F=17000\text{Н}$; неизвестный момент $M_{вр}$.

Реакции внешних связей: две составляющие X_O, Y_O реакции шарнира O ; N_3 реакция направляющих ползуна.

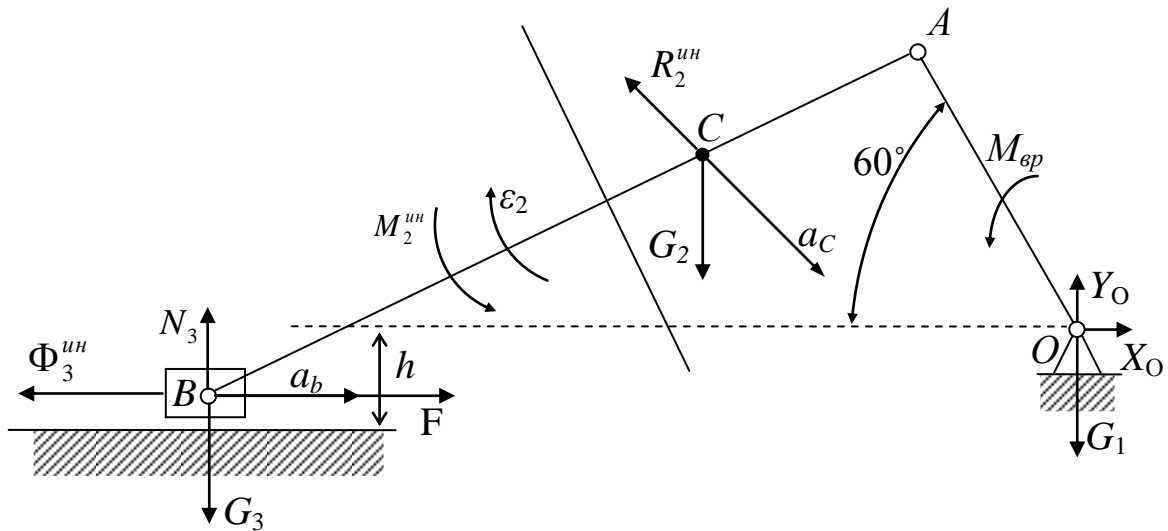


Рис.3.7 Схема механизма с нагрузками

Согласно принципу Даламбера, присоединим к названным силам силы инерции.

Силы инерции точек ползуна, который движется поступательно, приводятся к равнодействующей $\vec{\Phi}_3 = -m_3 \vec{a}_3$, причём $\Phi_3^{unn} = 0,6 \cdot 1330 = 798$ Н.

Силы инерции шатуна, который движется плоскопараллельно, приводятся к главному вектору $\vec{R}_2^{unn} = -m_2 \vec{a}_c$, который приложен в центре масс C и направлен противоположно ускорению \vec{a}_c , и к главному моменту $M_2^{unn} = I_{c_2} \varepsilon_2$. Причём, момент по направлению противоположен угловому ускорению шатуна ε_2 .

$$R_2^{unn} = 2 \cdot 5200 = 10400 \text{ Н}, \quad M_2^{unn} = 0,021 \cdot 14800 = 3108 \text{ Нм}.$$

Силы инерции точек кривошипа приводятся к уравновешенной системе сил $R_1^{unn} = m_1 \cdot \vec{a}_{c1} = 0$, $M_1^{unn} = I_{c1} \cdot \varepsilon_1 = 0$.

Система сил, показанная на рис.3.7 является уравновешенной и к ней можно применить уравнения статики.

Так как в задании требуется определить ещё и реакции внутренних связей, будем рассматривать равновесие отдельно:

1. Шатун с ползуном.
2. Кривошип.
3. Ползун.

У нас появятся ещё 4 неизвестные силы: реакции в шарнирах, соединяющих шатун с ползуном и с кривошипом. Обозначим их \vec{N}_{12} и \vec{N}_{21} . Это силы действия и противодействия в шарнире A (причём $\vec{N}_{1,2} = -\vec{N}_{2,1}$). Реакцию шарнира B обозначим $\vec{N}_{3,2}$. Первый номер индекса указывает тело, на которое действует сила реакции, а второй - тело, которое действует этой силой на первое. Изобразим силы, действующие на каждую часть конструкции.

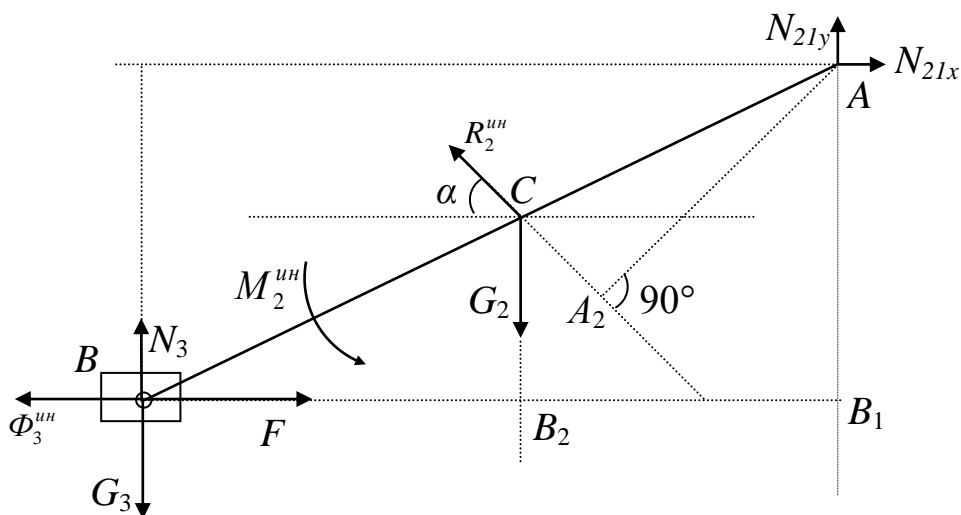


Рис.3.8. Группа шатун и ползун

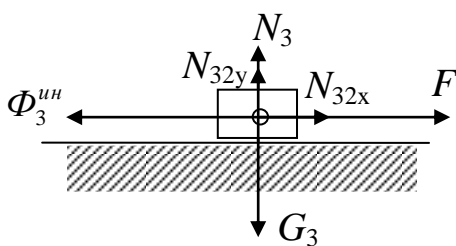


Рис.3.9. Ползун 3

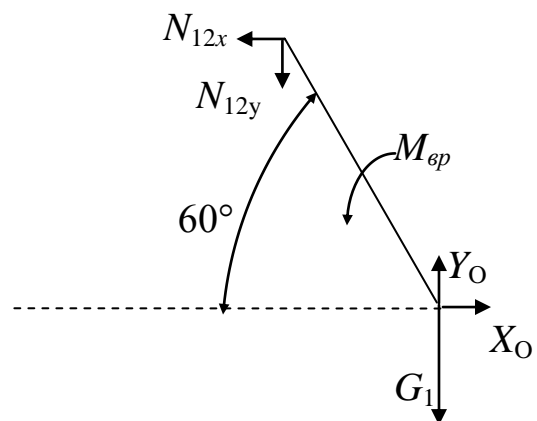


Рис.3.10. Кривошип 1

Реакции подшипников мы изобразили двумя составляющими, направленными вдоль координатных осей. Поскольку на рисунках силы действия и противодействия направлены в противоположные стороны, то величины этих сил можно приравнять

$$N_{12x} = N_{21x}, \quad N_{12y} = N_{21y}.$$

Составим уравнения равновесия.

Для тела 1:

$$1) \sum_{k=1}^n X_k = 0; \quad X_O - N_{12x} = 0,$$

$$2) \sum_{k=1}^n Y_k = 0; \quad Y_O - G_1 - N_{12y} = 0,$$

$$3) \sum_{k=1}^n M_O(F_k) = 0; \quad M_{\text{сп}} + N_{12x} l_1 \sin 60^\circ + N_{12y} l_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Для системы тел 2, 3 воспользуемся уравнением моментов относительно точки A и уравнениями проекций на оси x и y . При вычислении моментов будем плечи сил измерять на рис.3.8. Угол α так же измеряем. Измерения делаем в программе КОМПАС 3D.

$$4) \sum_{k=1}^n M_A(F_k) = 0;$$

$$G_2 |B_2 B_1| - R_2^{uh} |AA_2| + M_2^{uh} + (F - \Phi_3^{uh}) |AB_1| - (N_3 - G_3) BB_1 = 0;$$

$$5) \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0,$$

$$F - \Phi_3^{uh} + N_{21x} - R_2^{uh} \cos \alpha = 0;$$

$$6) \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$N_3 - G_3 - G_2 + R_2^{uh} \sin \alpha + N_{21y} = 0$$

Для тела 3:

$$7) \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad F + N_{32x} - \Phi_3 = 0$$

$$8) \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_3 + N_{32y} - G_3 = 0.$$

По рис.3.8. определяем необходимые отрезки и с учётом масштабного коэффициента вычисляем их длины:

$$B_1 B_2 = 56 \cdot 0,00333 = 0,186 \text{ м},$$

$$AA_2 = 60 \cdot 0,00333 = 0,2 \text{ м},$$

$$AB_1 = 66 \cdot 0,00333 = 0,219 \text{ м},$$

$$BB_1 = 134 \cdot 0,00333 \text{ м} = 0,446,$$

$$AA_2 = 60 \cdot 0,00333 = 0,1996 \text{ м},$$

$$\alpha = 43^\circ.$$

Подставим числовые значения в уравнения и определим неизвестные.

Из 4-го уравнения определим $N_3 = 10307 \text{ Н}$, из 5-го $N_{21y} = -15695,52 \text{ Н}$, из 6-го $N_{21x} = -17339 \text{ Н}$, далее $X_0 = -9105 \text{ Н}$, $Y_0 = -17337 \text{ Н}$, $M_{ep} = 3303 \text{ Нм}$, $N_{32x} = -16202 \text{ Н}$, $N_{32y} = -10301 \text{ Н}$.

Для проверки результатов расчета рассмотрим всю конструкцию целиком и построим силовой многоугольник для сил, действующих на неё (самостоятельно).

3.5.2 Определение величины M_{ep} с помощью общего уравнения динамики.

Общее уравнение динамики называется ещё принципом Даламбера-Лагранжа. Согласно этому принципу для механической системы с идеальными, голономными и стационарными связями, на которую действуют активные силы, и для которой введены силы инерции Даламбера в данный момент времени, сумма элементарных работ (или мощностей) этих сил на любом возможном перемещении равна нулю. Запишем это уравнение через мощности.

$$N_F + N_{G1} + N_{G2} + N_{G3} + N_{\phi3} + N_{\phi2} + N_{M_{ep}} + N_{M_2^{un}} = 0$$

Для голономных и стационарных связей действительное перемещение является одним из возможных, поэтому при вычислении возможных мощностей воспользуемся определёнными в задании по кинематике скоростями.

Мощность силы определяем по формуле $N_F = F \cdot V \cdot \cos \beta$, где V - скорость точки приложения силы, β - угол между вектором силы и

скорости. Мощность момента вычисляется по формуле $N_M = \pm M \cdot \omega$, где ω -угловая скорость тела, к которому приложен момент. Необходимые для расчёта углы показаны на рис.3.9.

$$N_F = F \cdot V_B \cdot \cos 0 = 17000 \cdot 45 = 765000 \text{ Вт}$$

$$N_{G3} = G_3 \cdot V_B \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$N_{G2} = G_2 \cdot V_C \cdot \cos 107^\circ = -19,8 \cdot 40 \cdot 0,29 = -231 \text{ Вт}$$

$$N_{G1} = 0$$

$$N_{\Phi_3} = -\Phi_3 \cdot V_B = -798 \cdot 45 = -35910 \text{ Вт}$$

$$N_{R_2^{un}} = R_2^{un} \cdot V_C \cdot \cos 113^\circ = 10400 \cdot 40,2 \cdot (-0,39) = -163051 \text{ Вт}$$

$$N_{M_{ep}} = -M_{ep} \cdot \omega_1 = -M_{ep} \cdot 200$$

$$N_{M_{2un}} = -M_2^{un} \cdot \omega_2 = -3100 \cdot 40,6 = 123800 \text{ Вт}$$

Определяем величину $M_{ep} = 3233 \text{ Нм}$. Сравнение значений M_{ep} , рассчитанных разными методами даёт расхождение

$$\Delta M_{ep} = \frac{3303 - 3233}{3303} \cdot 100\% = 2\%$$

Это достаточно для технических расчётов.

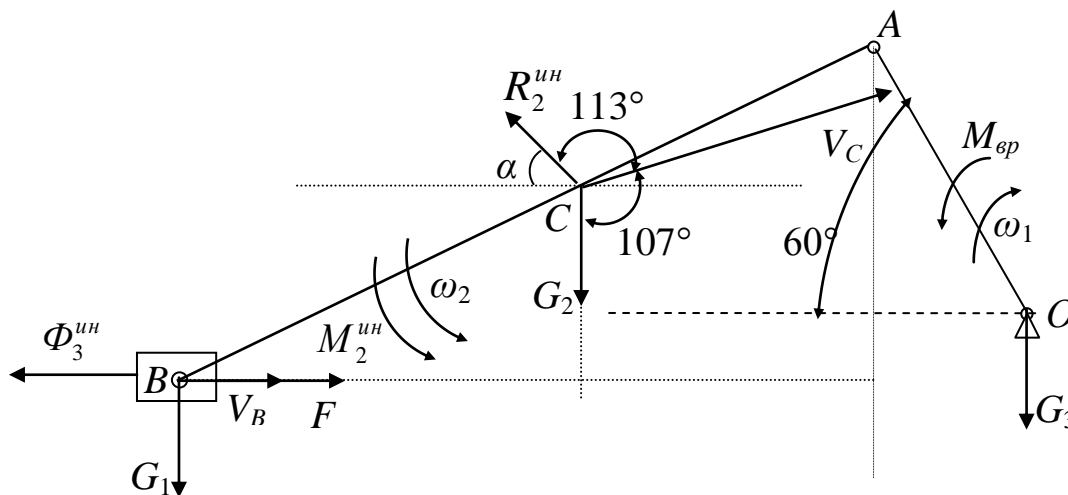


Рис. 3.9. Схема механизма для динамического расчета

3.5.3. Вычисление обобщенной силы.

Кривошипно-шатунный механизм является механической системой с одной степенью свободы и, следовательно, для него можно ввести одну обобщённую координату, например φ_1 -угол поворота кривошипа.

Тогда обобщённая скорость $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ -это угловая скорость кривошипа. Обобщённая сила Q_φ в рассматриваемый момент времени может быть определена как коэффициент перед обобщённой скоростью в выражении суммарной мощности всех активных сил

$$N_F + N_{G_2} + N_{M_{ep}} = Q_\varphi \omega_1 ,$$

$$N_F + N_{G_2} + N_{M_{ep}} = 765000 - 23 \cdot 646600 = 118162,$$

$$Q_\varphi = \frac{118162}{200} = 590,84 \text{ Нм}.$$

3.5.4 Определение $M_{ep}^{равн}$.

Установим, каким должен быть вращающийся момент $M_{ep}^{равн}$, чтобы неподвижный механизм оставался в равновесии под действием других известных сил. В этом случае обобщённую силу нужно приравнять нулю

$$Q_\varphi = \frac{N_F + N_{G_1} + N_{M_{ep}^{равн}}}{\omega_1} = 0,$$

а мощность $N_{M_{ep}} = M_{ep}^{равн} \cdot \omega_1$. Получаем $M_{ep}^{равн} = 3823,8 \text{ Нм}$. При вычислении мы учитываем, что в нашем случае действительное перемещение является одним из возможных перемещений и мы используем значения скоростей, рассчитанных в задании К1.

4. Кинематика и динамика шарнирного четырёхугольника.

4.1. Задание К 2. Кинематика шарнирного четырёхугольника.

Задания выбираются по двум последним цифрам зачетной книжки (предпоследняя соответствует номеру задания, последняя номеру варианта).

Кривошип OA (1) вращается равномерно с угловой скоростью ω_1 и приводит в движение шатун AB (2) и балансир BD (3), который вращается вокруг оси O_2 . Заданы размеры звеньев $OA=l_1$, $AB=l_2$, $BO_2=l_3$, $O_2D=l_4$. Центр масс балансира находится в точке O_2 .

Для положения, определяемого углом φ , начертить в масштабе схему механизма и определить:

- 1) скорости точек A , B , C и D , а также угловую скорость шатуна ω_2 и балансира ω_3 ;
- 2) ускорения этих же точек, а также угловое ускорение шатуна ε_2 и балансира ε_3 .

Для решения применять теоремы о распределении скоростей и ускорений. Решение выполнять графически с помощью программы КОМПАС 3D. Определение скоростей проверить методом построения мгновенного центра скоростей. Данные для расчёта представлены в таблицах. Схема механизма показана на рис.4.1.

При построении учитывать, что углы θ подъема и опускания балансира относительно горизонтальной, проходящей через точку опоры балансира, равны ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$).

Координаты опоры балансира, если принять координаты центра вращения кривошипа за $(0,0)$, рассчитываются по формулам: $x_{o2} = \sqrt{l_3^2 - l_1^2}$; $y_{o2} = l_2$. Угол поворота кривошипа (φ) выбирается против часовой стрелки от положительного направления оси x .

4.2 Задание Д2. Динамика шарнирного четырёхугольника.

Используя исходные данные и решение задания К2, зная величины масс m_1, m_2, m_3 соответствующих тел, моменты инерции кривошипа I_{C2} и коромысла I_{C3} относительно их центров масс а также значение силы F , определить следующие величины.

1. С помощью принципа Даламбера для механической системы определить реакции внешних и внутренних связей, величину момента пары сил, приложенного к кривошипу OA $M_{вр}$ необходимого для обеспечения равномерного движения кривошипа. Для решения составить уравнения кинетостатики для каждого звена.

2. Проверить правильность определения момента $M_{вр}$ с помощью общего уравнения динамики.

3. Вычислить обобщённую силу, приняв за обобщённую координату угол φ ; приравняв её нулю, установить зависимость между силой F и $M_{вр}$ в случае равновесия механизма в указанном положении.

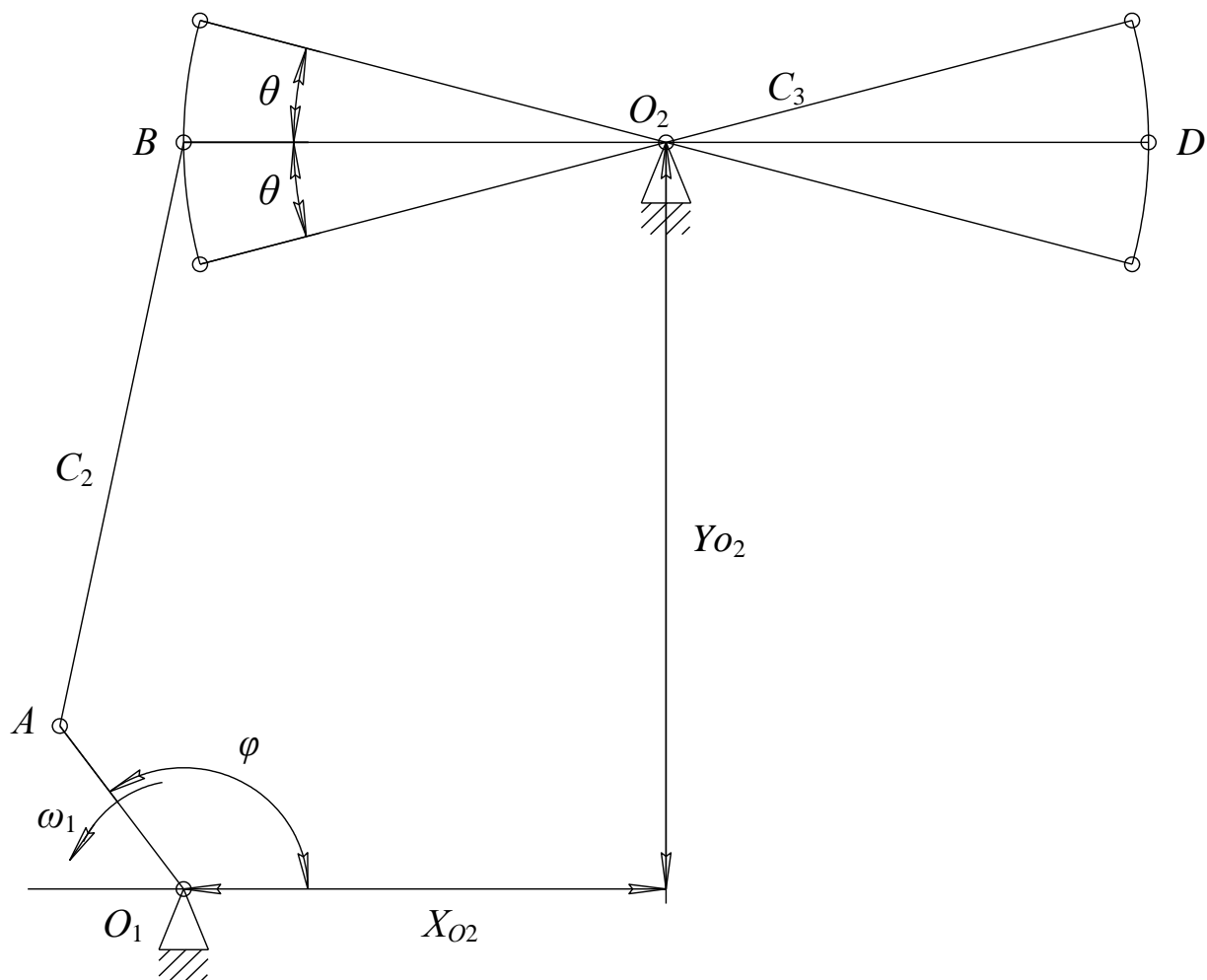


Рис.4.1 Схема механизма.

4.3 Исходные данные.

Задача 1 (СК2-0.6-250)

Кривошип L_1 , мм	295
Шатун L_2 , мм	840
Заднее плечо балансира L_3 , мм	740
Переднее плечо балансира L_4 , мм	740
Масса кривошипа m_1 , кг	2000
Масса шатуна, m_2 , кг	252
Масса балансира m_3 , кг	444
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	60
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	80

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанги F , Н	1400	1500	1100	21500	22000	16500	22000	17000	18000	20000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 2 (СКЗ-1.2-630)

Кривошип L_1 , мм	570
Шатун L_2 , мм	1430
Заднее плечо балансира L_3 , мм	1200
Переднее плечо балансира L_4 , мм	1200
Масса кривошипа m_1 , кг	3000
Масса шатуна, m_2 , кг	429
Масса балансира m_3 , кг	720
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	300
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	350

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанг F , Н	1000	1200	1500	11400	15600	18300	23600	25700	28000	30000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 3 (СК4-2.1-1600)

Кривошип L_1 , мм	720
Шатун L_2 , мм	1800
Заднее плечо балансира L_3 , мм	1500
Переднее плечо балансира L_4 , мм	2100
Масса кривошипа m_1 , кг	4000
Масса шатуна, m_2 , кг	540
Масса балансира m_3 , кг	1080
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	580
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	1320

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанг F , Н	1110	1000	1300	15800	21400	26200	29500	35200	38000	40000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 4 (СК5-3-2500)

Кривошип L_1 , мм	1000
Шатун L_2 , мм	2500
Заднее плечо балансира L_3 , мм	2100
Переднее плечо балансира L_4 , мм	3000
Масса кривошипа m_1 , кг	2000
Масса шатуна m_2 , кг	5000
Масса балансира m_3 , кг	1380
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	580
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	1380

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанг F , Н	1240	1100	1420	22700	27500	34300	37800	43400	47700	50000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 5 (СК6-2.1-2500)

Кривошип L_1 , мм	1000
Шатун L_2 , мм	2500
Заднее плечо балансира L_3 , мм	2100
Переднее плечо балансира L_4 , мм	2100
Масса кривошипа m_1 , кг	6000
Масса шатуна m_2 , кг	750
Масса балансира m_3 , кг	1260
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	1560
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	1850

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанг F , Н	1150	1320	1130	27700	35600	41300	48400	51200	56900	60000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 6 (СК8-3.5-5600)

Кривошип L_1 , мм	1200
Шатун L_2 , мм	3000
Заднее плечо балансира L_3 , мм	2500
Переднее плечо балансира L_4 , мм	3500
Масса кривошипа m_1 , кг	8000
Масса шатуна m_2 , кг	900
Масса балансира m_3 , кг	1800
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	2700
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	6125

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанг F , Н	1230	1430	1630	31300	39900	54400	61400	69300	74600	80000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 7 (СК12-2.5-4000)

Кривошип L_1 , мм	1200
Шатун L_2 , мм	3000
Заднее плечо балансира L_3 , мм	2500
Переднее плечо балансира L_4 , мм	2500
Масса кривошипа m_1 , кг	12000
Масса шатуна m_2 , кг	900
Масса балансира m_3 , кг	1500
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	2700
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	3130

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанг F , Н	1330	1000	1110	66600	72100	87600	93600	105500	112300	120000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 8 (СК8-3.5-5600)

Кривошип L_1 , мм	1200
Шатун L_2 , мм	3000
Заднее плечо балансира L_3 , мм	2500
Переднее плечо балансира L_4 , мм	3500
Масса кривошипа m_1 , кг	8000
Масса шатуна m_2 , кг	900
Масса балансира m_3 , кг	1800
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	2700
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	6125

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанг F , Н	1270	1390	1230	40500	48700	55500	63800	71300	79900	88000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 9 (СК10-3-5600)

Кривошип L_1 , мм	1670
Шатун L_2 , мм	3000
Заднее плечо балансира L_3 , мм	2500
Переднее плечо балансира L_4 , мм	3000
Масса кривошипа m_1 , кг	10000
Масса шатуна m_2 , кг	900
Масса балансира m_3 , кг	1650
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	2700
Момент инерции балансира $кг \cdot м^2$	4500

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанг F , Н	1190	1440	1430	44400	55500	66600	77700	88800	91100	100000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Задача 10 (СК10-4.5-8000)

Кривошип L_1 , мм	1670
Шатун L_2 , мм	4200
Заднее плечо балансира L_3 , мм	3500
Переднее плечо балансира L_4 , мм	4500
Масса кривошипа m_1 , кг	10000
Масса шатуна m_2 , кг	1260
Масса балансира m_3 , кг	2400
Угловая скорость кривошипа, c^{-1}	1
Момент инерции шатуна, $кг \cdot м^2$	5145
Момент инерции балансира, $кг \cdot м^2$	14175

Варианты

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нагрузка в точке подвеса штанги F , Н	1430	1330	1630	53900	59300	66400	74700	86800	93400	100000
Угол поворота кривошипа φ , град	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

4.4 Пример выполнения задания К2 «Кинематика механизма шарнирного многоугольника».

Определить скорости и ускорения точек A, B, C, D шарнирного четырёхугольника, а также угловые скорости ω_2 шатуна AB и ω_3 коромысла BD в положении, указанном на рис.4.2. Дано $l_1=O_1A=1,2\text{м}$, $l_2=AB=3\text{м}$, $\varphi=60^\circ$, $l_3=BO_2=2,5\text{м}$, $l_4=O_2D=3\text{м}$, $l_5=AC_2=1,5\text{м}$, $l_6=O_2C_3=1\text{м}$, $\omega_1=\omega_{O_1A}=0,628\text{с}^{-1}=\text{const}$. Координаты точки O_2 : $X_{O_2}=2,4\text{м}$, $Y_{O_2}=3\text{м}$.

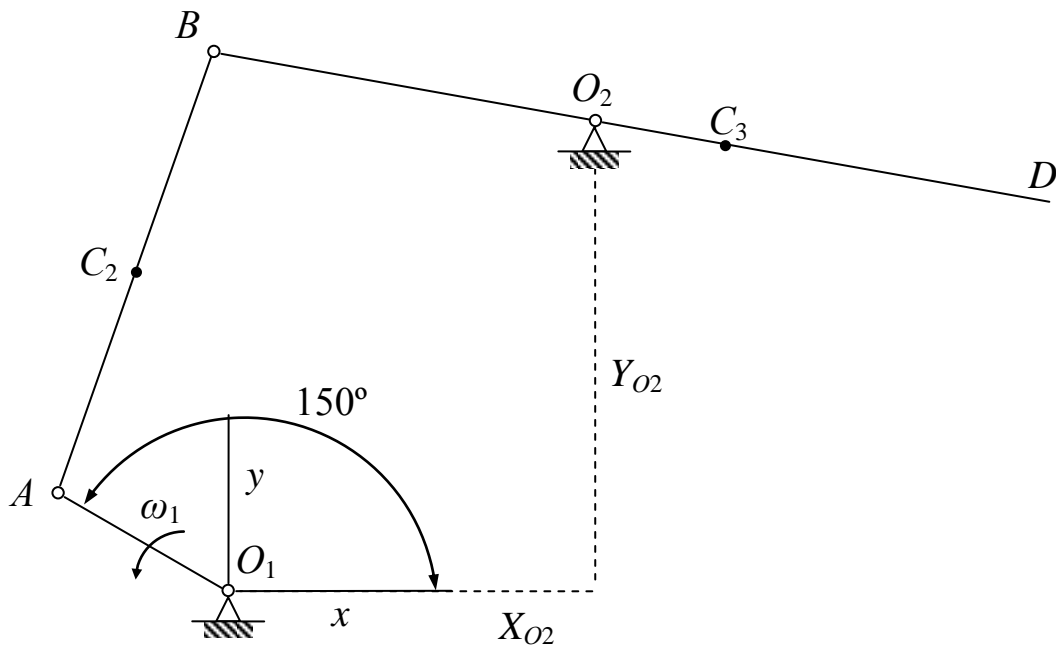


Рис. 4.2 Схема шарнирного четырёхугольника

Решение. Для определения скоростей точек применяется теорема о распределении скоростей точек при плоскопараллельном движении твердого тела. Согласно этой теореме, скорость любой точки шатуна равна векторной сумме двух скоростей: вектора скорости какой-нибудь точки, взятой за полюс, и скорости этой точки во вращательном движении вокруг этого полюса

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \quad (4.1)$$

$$\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_A + \vec{V}_{C_2A}. \quad (4.2)$$

В формулах (4.1) и (4.2) \vec{v}_A -вектор скорости точки A , он перпендикулярен кривошипу OA и равен по величине $V_A = \omega_1 \cdot OA$, $V_A = 0,628 \cdot 1,2 = 0,753 \text{ м/с}$. Скорости V_{BA} и V_{CA} определяются формулами $V_{BA} = \omega_2 \cdot BA$, $V_{CA} = \omega_2 \cdot C_2A$ и по направлению перпендикулярны прямой AB , но ω_2 пока неизвестно.

Графическое решение начинаем с изображения схемы механизма в масштабе, рис. 4.5. В нашем случае масштабный коэффициент длины $\mu_l = \frac{1,2 \text{ м}}{24 \text{ мм}} = 0,05 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$, это значит, что шатун длиной $l_1 = 1,2 \text{ м}$ изображается отрезком равным 24 мм . Затем, на рисунке изображаются векторы скоростей, показывающие их направления (рис 4.3).

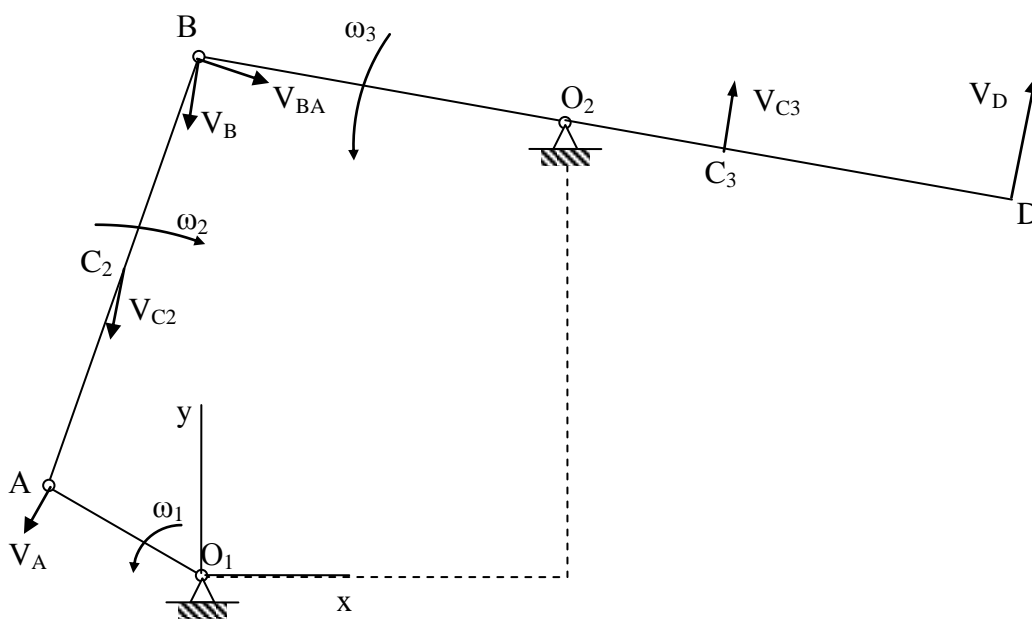


Рис.4.3. Направление векторов скоростей точек

Вектор скорости точки B перпендикулярен BO_2 и по величине неизвестен. Вектор V_{BA} скорости точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A направляется перпендикулярно отрезку AB (рис.4.3) и по величине неизвестен.

На рис.4.4 показано построение векторного треугольника, с помощью которого определяются все неизвестные скорости.

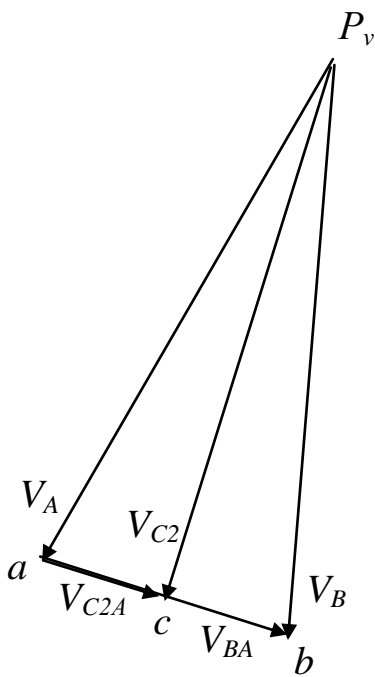


Рис. 4.4. План скоростей

Начинаем построение с отрезка Pa , который в масштабе $\mu_v = \frac{0,753 \text{ м/с}}{75,3 \text{ мм}} = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$ соответствует скорости V_A . Это значит, что отрезок Pa параллелен вектору V_A и имеет длину равную $75,3 \text{ мм}$. Затем через точку a проводим линию перпендикулярную AB , и через точку P линию параллельную скорости V_B .

В получившемся треугольнике расставляем направления векторов так, чтобы выполнялось равенство (4.1).

Модули неизвестных векторов определяем, измеряя их значения на рисунке. С учетом масштаба получим

$$V_B = 75,4 \text{ мм} \cdot 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} = 0,754 \text{ м/с}, \quad \text{аналогично}$$

$$V_{BA} = 26,11 \text{ мм} \cdot 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} = 0,2611 \text{ м/с}. \quad \text{Определяем угловую скорость}$$

шатуна AB :

$$\omega_2 = V_{BA}/BA = 0,2611/3 = 0,0876 \text{ с}^{-1}. \quad (4.3)$$

Направление вращения шатуна выбираем против часовой стрелки. Вычисляем скорость V_{C2A} . $V_{C2A} = \omega_2 \cdot AC = 0,0876 \cdot 1,5 = 0,1305 \text{ м/с}$.

С учетом того, что скорость V_{CA} перпендикулярна отрезку CA и направлена в ту же сторону, что и V_{BA} , построим скорость V_{C2} . Измеряя длину вектора V_{C2} , получим его величину $V_{C2} = 74,3 \text{ мм} \cdot 0,01 = 0,743 \text{ м/с}$.

Определим угловую скорость коромысла и скорость точки D .

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BO_2} = \frac{0,754 \text{ м/с}}{2,5 \text{ м}} = 0,3016 \text{ с}^{-1}, \quad V_D = \omega_3 \cdot l_4 = 0,3016 \cdot 3 = 0,9048 \text{ м/с}.$$

Перейдем к определению ускорений точек. Определение ускорений точек следует начинать с вычисления ускорения точки A (Рис.4.5).

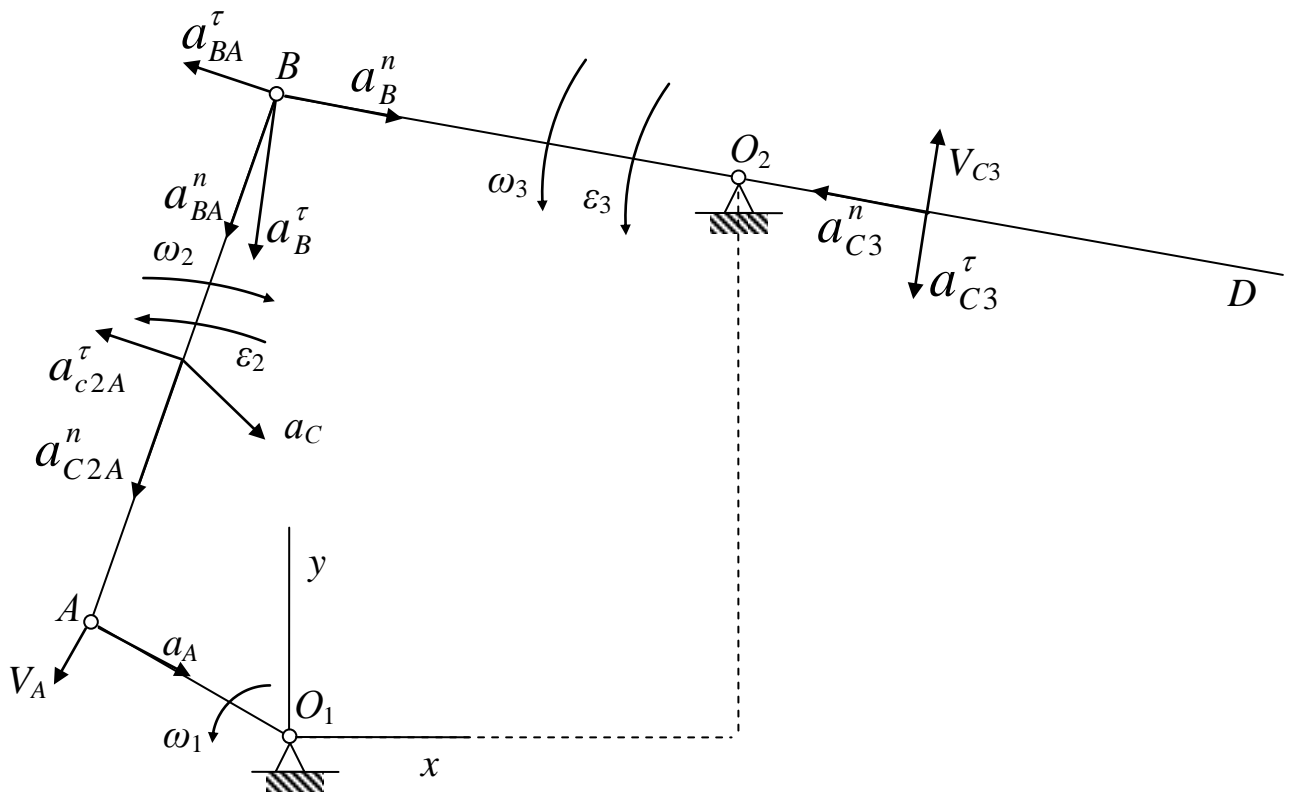


Рис.4.5. Направление векторов ускорений точек

Кривошип OA вращается равномерно, поэтому ускорение точки A равно нормальному ускорению, которое направлено от точки A к точке O $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 0,628^2 \cdot 1,2 = 0,473 \text{ м/с}^2$.

Ускорения точек B и C определяем с помощью теоремы о распределении ускорений в плоскопараллельном движении шатуна AB . Согласно этой теореме, вектор ускорения любой точки тела при его плоскопараллельном движении равен векторной сумме: ускорения какой-нибудь другой точки, взятой за полюс, касательного и нормального ускорений рассматриваемой точки во вращательном движении тела вокруг полюса. Возьмём за полюс точку A , тогда

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n \quad (4.4)$$

$$\vec{a}_{C2} = \vec{a}_A + \vec{a}_{C2A}^\tau + \vec{a}_{C2A}^n \quad (4.5)$$

При этом, величина касательного ускорения равна $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_2$ неизвестна, а направление его перпендикулярно отрезку AB . Величина нормального ускорения равна $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2$, её можно

вычислить $a_{BA}^n = 0,087^2 \cdot 3 = 0,0227 \text{ м/с}^2$. Направление вектора \vec{a}_{BA}^n параллельно отрезку BA от B к A (см.рис.4.5). Точка B движется вместе коромыслом по окружности радиуса $l_3 = 2,5 \text{ м}$, поэтому её ускорение равно также векторной сумме двух ускорений касательному и нормальному $\vec{a}_B = \vec{a}_B^r + \vec{a}_B^n$. Вектор \vec{a}_B^n направляется от B к O_2 и по величине равен $a_B^n = \omega_3^2 l_3 = 0,227 \text{ м/с}^2$. Вектор \vec{a}_B^r перпендикулярен коромыслу, он вычисляется по формуле $a_b^r = \varepsilon_3 \cdot l_3$, ε неизвестно. На рис.4.5 показано направления всех упомянутых векторов ускорений.

На рис.4.6 показано графическое решение уравнения (4.4). Начинаем построение с изображения вектора ускорения точки A , из произвольной точки откладывается отрезок pa параллельно \vec{a}_A . На рисунке он изображен длиной $pa = 96,4 \text{ мм}$. (Длина изображающего вектора может быть произвольной). Вычисляем масштабный коэффициент, $\mu_a = \frac{0,473 \text{ м/с}^2}{94,6 \text{ мм}} = 0,005 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$. С учётом масштабного коэффициента выполняется построение всех остальных векторов.

Вектор \vec{a}_{BA}^n пристраиваем к концу вектора \vec{a}_A . Он изображается отрезком $an = \frac{0,0227}{0,005} = 4,54 \text{ мм}$ параллельно отрезку AB по направлению от B к A . Через конец вектора \vec{a}_{BA}^n проводится линия перпендикулярная AB , а через начало вектора \vec{a}_A проводится отрезок pk , изображающий вектор \vec{a}_B^n .

Его строим параллельно отрезку BO_2 , длиной $pk = \frac{0,227}{0,005} = 45,4 \text{ мм}$. К концу этого отрезка пристраиваем перпендикулярную ему линию. Построение завершается расстановкой стрелок (рис.4.6) так, чтобы выполнилось равенство

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^r = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r$$

Все искомые величины измеряются и с учетом масштаба определяются.

$$a_B = 54,43 \cdot 0,005 = 0,272 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^r = 43,09 \cdot 0,005 = 0,215 \text{ м/с}^2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{l_2} = \frac{0,215}{3} = 0,0717 \text{ с}^{-2},$$

$$a_B^{\tau} = 30,02 \cdot 0,005 = 0,1501 \text{ м/с}^2,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_B^{\tau}}{l_3} = \frac{0,1501}{2,5} = 0,06 \text{ с}^{-2}.$$

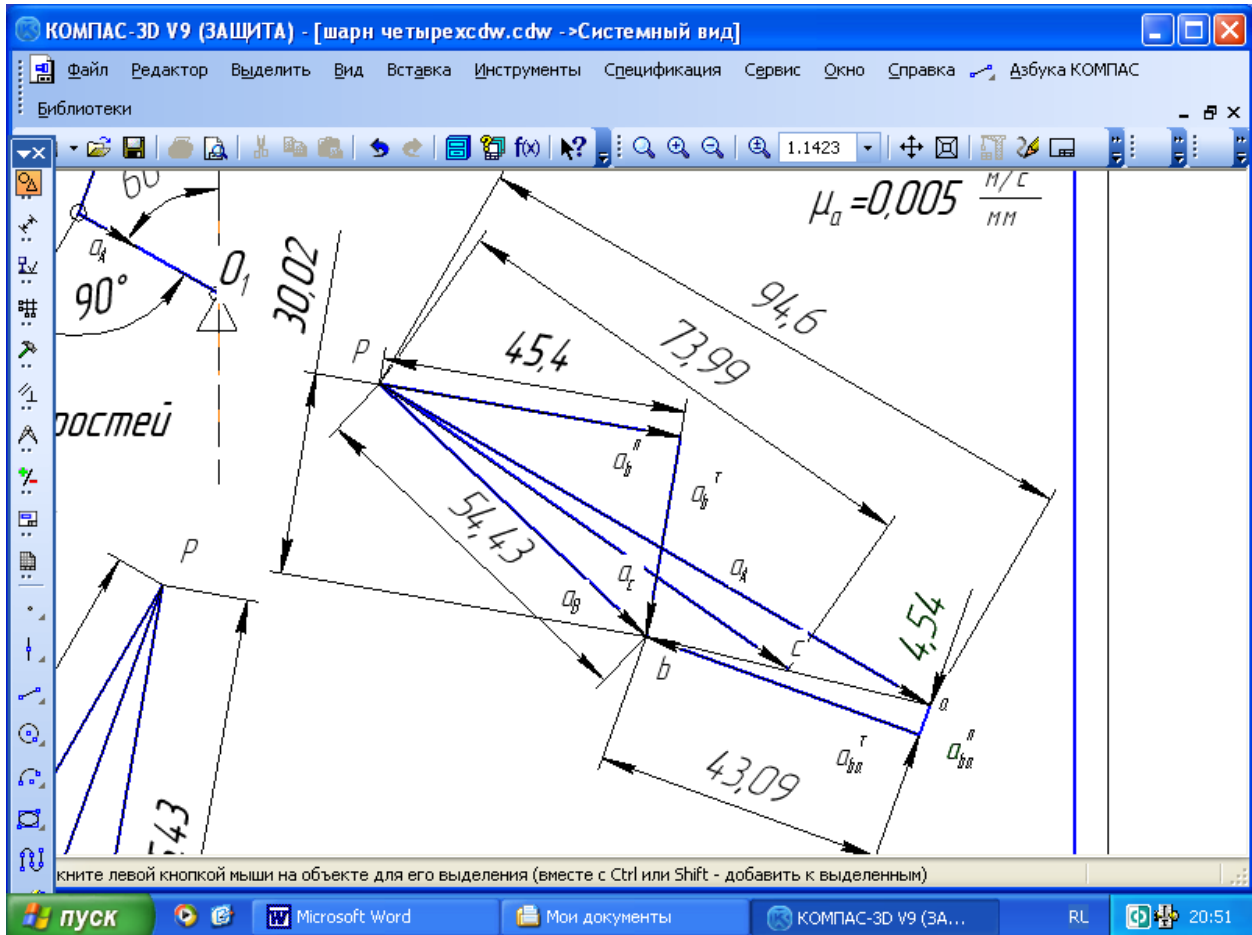


Рис. 4.6 План ускорений

По рис.4.6 можно установить, что и ε_2 и ε_3 направлено против часовой стрелки.

Аналогично определяется ускорение точки С, величины слагаемых векторов вычисляются по формулам:

$$a_{C2A}^n = \frac{1}{2} \omega_2^2 \cdot l_2; \quad a_{C2A}^{\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_2 l_2.$$

Строится вектор ускорения \vec{a}_{C2} , измеряется величина

$$a_{C2}=73,99 \cdot 0,005=0,37 \text{ м/с:}$$

Рассчитывается ускорение точки C_3 . $\vec{a}_{C3} = \vec{a}_{C3}^r + \vec{a}_{C3}^n$, где

$$a_{C3}^r = \varepsilon_3 l_6 = 0,06 \text{ м/с}^2, \quad a_{C3}^n = \omega_3^2 l_6 = 0,091 \text{ м/с}^2.$$

Результаты расчётов приведены в таблицах 1 и 2.

Скорости точек и угловые скорости звеньев.

Таблица 2

$V_A, \text{ м/с}$	$V_B, \text{ м/с}$	$V_{C2}, \text{ м/с}$	$V_D, \text{ м/с}$	ω_2	$\omega_3 \text{ с}^{-1}$	V_{C3}
0,753	0,754	0,743	0,905	0,0876	0,3016	0,3016

Ускорения точек и угловые ускорения звеньев

Таблица 3

$a_A \text{ м/с}^2$	$a_B, \text{ м/с}^2$	$a_{C2}, \text{ м/с}^2$	$\varepsilon_2, \text{ 1/с}^2$	ε_3	$a_{C3}^r, \text{ м/с}^2$	$a_{C3}^n, \text{ м/с}^2$	$a_{C3}, \text{ м/с}^2$
0,473	0,272	0,37	0,0717	0,06	0,06	0,091	0,109

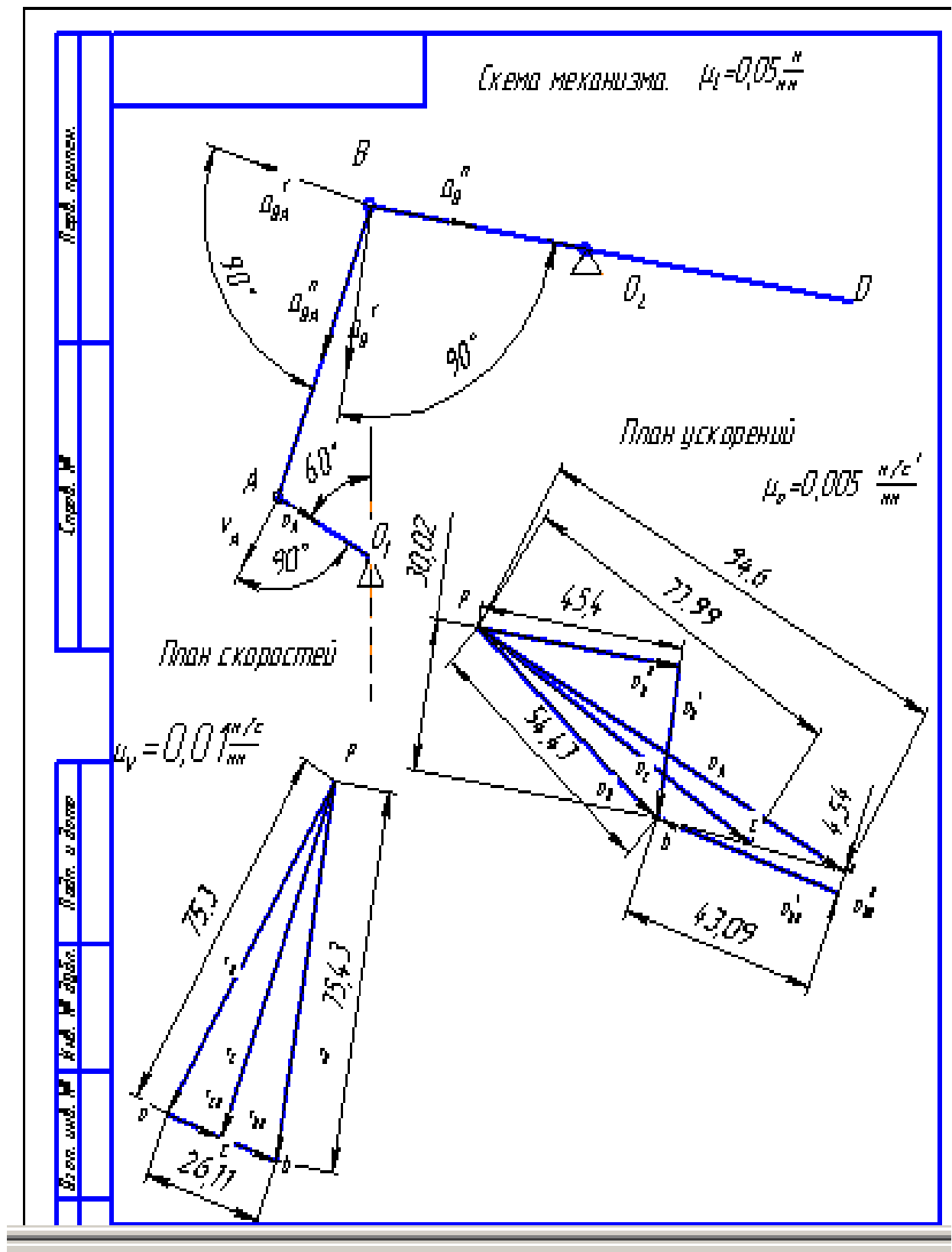


Рис.4.6 Графическое определение скоростей и ускорений в программе Компас.

4.5. Пример выполнения задания Д2 «Динамика механизма шарнирного многоугольника»

Рассматривая схему шарнирного четырёхугольника, приведённую в примере к заданию К2, приняв массы тел соответственно: кривошипа $m_1=2840\text{кг}$, шатуна $m_2=82\text{кг}$, коромысла $m_3=1110\text{кг}$; значение силы, действующей на поводок $F=30000\text{Н}$; значение моментов инерции шатуна и коромысла относительно их центров масс: $I_{C2}=0,6\text{кгм}^2$, $I_{C3}=3,9\text{кгм}^2$, приняв размеры, скорости и ускорения точек и звеньев из примера К2 ответить на вопросы задания Д2.

4.5.1. Определение сил реакций связей и вращающего момента $M_{вр}$.

Для решения задачи применим *принцип Даламбера*, согласно которому совокупность активных сил, сил реакций опор и сил инерции для механической системы в данный момент времени является уравновешенной и к ней можно применять уравнения статики.

Изобразим механизм в заданном положении на рисунке. Чтобы необходимые размеры не вычислять, а измерять на рисунке, выполним построение схемы механизма с масштабным коэффициентом

$$\mu_1 = \frac{l_2}{l_{2\text{чертёжн}}} = \frac{3\text{м}}{90\text{мм}} = 0,0333 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

Длина изображающего отрезка $l_{\text{чертёжн}}$ может быть любой. На чертеже длина отрезка, изображающего кривошип $l_{1\text{чертёжн}} = \frac{l_1}{\mu_1} = 36\text{мм}$, шатун $l_{2\text{черт}} = 90\text{мм}$, плечи коромысла

$$l_{3\text{черт}} = \frac{l_3}{\mu_1} = 75\text{мм}, \quad l_{4\text{черт}} = \frac{l_4}{\mu_1} = 90\text{мм}, \quad \text{далее}$$

$$l_{5\text{черт}} = 45\text{мм} \quad \text{и} \quad l_{6\text{черт}} = 30\text{мм}.$$

На рис.4.7 показаны внешние активные силы и реакции связей, действующие на механическую систему. Активные силы: силы тяжести $G_1 = m_1g = 27894,5\text{Н}$, $G_2 = m_2g = 605,4\text{Н}$, $G_3 = m_3g = 10902,4\text{Н}$; сила $F = 30000\text{Н}$; неизвестный момент $M_{вр}$

Силы реакций внешних связей $X_{O1}, Y_{O1}, X_{O2}, Y_{O1}$.

Присоединим к названным силам силы инерции Даламбера.

Для шатуна силы инерции всех материальных точек приводятся к главному вектору сил инерции $\vec{R}_{2ин} = -m_2\vec{a}_{C2}$, который приложен в центре масс C_2 , и главному моменту $M_{2ин} = -I_{C2}\varepsilon_2$ (знак $-$ указывает, что момент направлен противоположно угловому ускорению шатуна.).

Для коромысла главный вектор сил инерции состоит из двух слагаемых

$$\vec{R}_{3ин}^{\tau} = -m_3\vec{a}_{C3}^{\tau} \text{ и } \vec{R}_{2ин}^{un} = -m_2\vec{a}_{C3}^n.$$

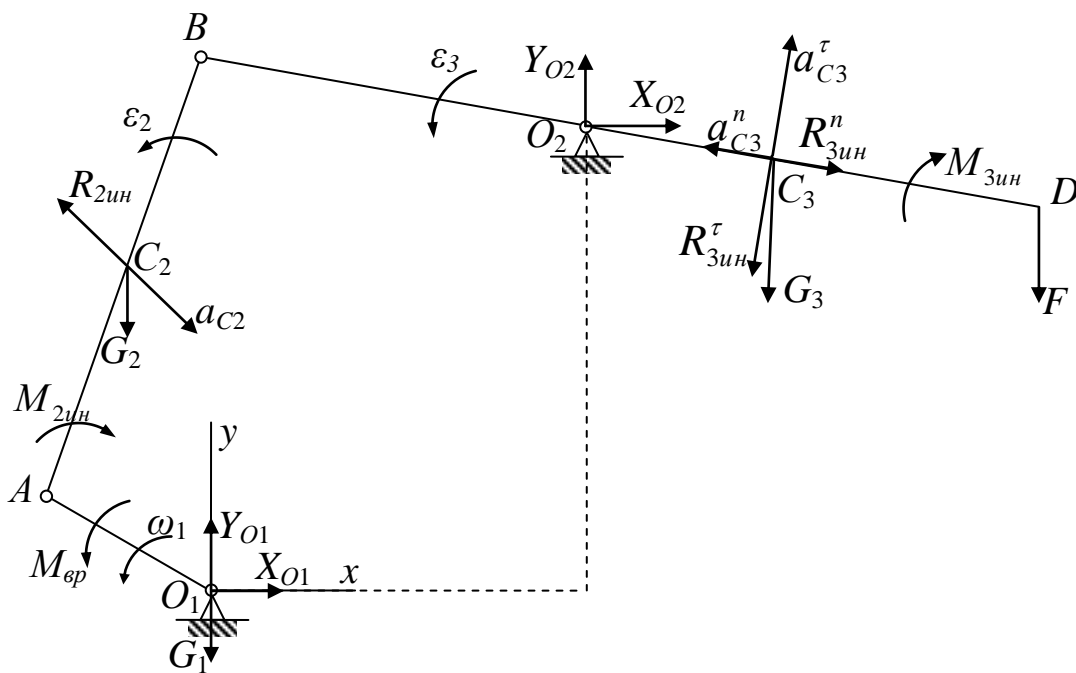


Рис. 4.7 Силовая схема механизма для кинетостатики

Главный момент сил инерции коромысла относительно оси O_2 равен $M_{3ин} = -I_{O2}\varepsilon_3$, где I_{O2} - момент инерции коромысла относительно оси O_2 . По теореме Гюйгенса $I_{O2} = I_{C3} + m_3l_6^2 = 3,9 + 1110 \cdot 1 = 1113,9 \text{ кгм}^2$.

Для кривошипа силы инерции эквивалентны нулю, так как его центр масс находится на неподвижной оси и значит $a_{C1} = 0$. Кроме того, кривошип вращается равномерно и значит $\varepsilon_1 = 0$.

Укажем направления сил на рисунке и вычислим их величины:

$$R_{2ин} = m_2 a_{C2} = 82 \cdot 0,37 = 30,37 \text{ Н};$$

$$M_{2ин} = I_{C2} \varepsilon_2 = 0,6 \cdot 0,0717 = 0,043 \text{ Нм};$$

$$R_{3ин}^r = m_3 a_{C3}^r = 1110 \cdot 0,06 = 66,6 \text{ Н};$$

$$R_{3ин}^n = m_3 a_{C3}^n = 1110 \cdot 0,091 = 101,01 \text{ Н};$$

$$M_{3ин} = I_{O2} \varepsilon_3 = 1113,9 \cdot 0,06 = 66,834 \text{ Нм}.$$

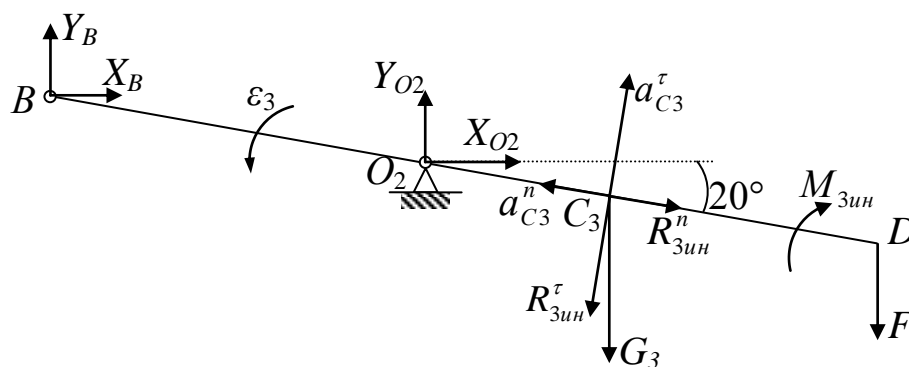


Рис.4.8 Коромысло

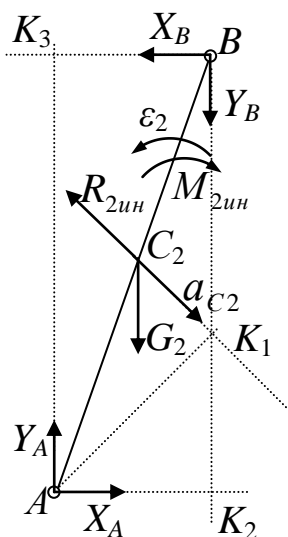


Рис.4.9 Шатун.

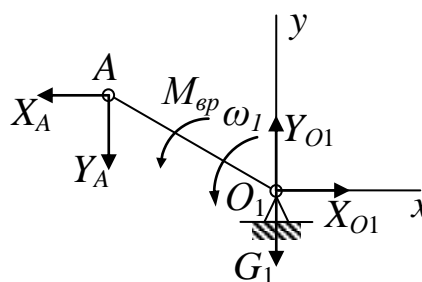


Рис.4.10 Кривошип.

Разобьём систему на звенья, введём реакции внутренних связей X_A, Y_A, Y_B, X_B и при этом учтём, что в узлах взаимодействия звеньев A и B должен выполняться закон действия и противодействия. Составим уравнения статики для каждого звена, при этом все необходимые размеры и углы определяем измерением по схеме механизма (рис.4.7) в программе КОМПАС.

Коромысло:

$$1) \sum_{k=1}^n X_k = 0; \quad X_B + X_{O2} - R_{3ун}^r \sin 20^\circ + R_{3ун}^n \cos 20^\circ = 0;$$

$$2) \sum_{k=1}^n Y_k = 0; \quad Y_B + Y_{O2} - R_{3ун}^r \cos 20^\circ - R_{3ун}^n \sin 20^\circ - F - G_3 = 0;$$

$$3) \sum_{k=1}^n M_{O2}(F_k) = 0; \quad -X_B \cdot 2,5 \cdot \sin 20^\circ - Y_B \cdot 2,5 \cdot \cos 20^\circ - F \cdot 3 - M_{3ун} - G_3 \cdot \cos 20^\circ = 0.$$

Шатун:

$$1) \sum_{k=1}^n X_k = 0; \quad -X_B + X_A - R_{2ун} \cos 44^\circ = 0;$$

$$2) \sum_{k=1}^n Y_k = 0; \quad -Y_B + Y_A + R_{2ун} \sin 44^\circ - G_2 = 0;$$

$$3) \sum_{k=1}^n M_{O1}(F_k) = 0; \quad -Y_B \cdot AK_2 + X_B \cdot AK_3 + R_{2ун} \cdot AK_1 - M_{2ун} + G_2 \cdot 0,5AK_2 = 0.$$

Кривошип:

$$1) \sum_{k=1}^n X_k = 0; \quad X_{O1} - X_A = 0;$$

$$2) \sum_{k=1}^n Y_k = 0; \quad Y_{O1} - Y_A - G_1 = 0;$$

$$3) \sum_{k=1}^n M_{O1}(F_k) = 0; \quad M_{gp} + Y_A \cdot 1,2 \cdot \sin 60^\circ + X_A \cdot 1,2 \cdot \cos 60^\circ = 0.$$

Подставим известные величины и получим систему уравнений.

$$1) X_B + X_{O2} = -76,213;$$

$$2) Y_B + Y_{O2} = 40999,545;$$

$$3) -0,855X_B + 2,35Y_B = 100291,8;$$

$$4) -X_B + X_A = 21,836;$$

$$5) -Y_B + Y_A = 782,5;$$

$$6) 2,94X_B - Y_B = 358,2;$$

$$7) X_{O1} - X_A = 0;$$

$$8) Y_{O1} - Y_A = 27832;$$

$$9) 0,6 \cdot X_A + 1,039 \cdot Y_A + M_{ep} = 0.$$

Систему 9 уравнений с 9-тью неизвестными будем решать методом обратной матрицы на компьютере в программе Microsoft Excel. Составим матрицу коэффициентов и столбец правых частей для получившейся системы уравнений.

Матрица A_{ij} и столбец B_i вводятся в ячейки рабочего поля программы. После обращения к программе вызов функции нажатием кнопки $f_k \rightarrow$ математические функции \rightarrow МОБР, вычисляется обратная матрица. Обращаемся к программе $f_k \rightarrow$ МУМНОЖ для вычисления произведения обратной матрицы и столбца правых частей, что позволяет получить значения неизвестных.

$$A_{ij} \cdot B_i = X_i$$

Для вывода результатов вычислений по командам МОБР и МУМНОЖ после расчетов необходимо выделить на рабочем поле ячейки, куда будут занесены результаты, затем поставить курсор в окно формул и нажать клавиши Shift-Ctrl-Enter. В нашем случае получились такие результаты:

Матрица коэффициентов A_{ij}

Столбец B_i

Ха	Ya	Xb	Yb	Xo1	Yo1	Xo2	Yo2	Mвр	Bi
0	0	1	0	0	0	1	0	0	-76,213
0	0	0	1	0	0	0	1	0	41000
0	0	-0,855	-2,35	0	0	0	0	0	100291,8
1	0	-1	0	0	0	0	0	0	21,836
0	1	0	-1	0	0	0	0	0	782,5
0	0	2,84	-1	0	0	0	0	0	358,2
-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	1	0	0	0	27838
0,6	1,039	0	0	0	0	0	0	1	0
									ответ
0	0	-0,13282	1	0	0,312126	0	0	0	-13187,1
0	0	-0,37721	0	1	-0,11356	0	0	0	-37089,1
0	0	-0,13282	0	0	0,312126	0	0	0	-13208,9
0	0	-0,37721	0	0	-0,11356	0	0	0	-37871,6
0	0	-0,13282	1	0	0,312126	1	0	0	-13187,1
0	0	-0,37721	0	1	-0,11356	0	1	0	-9251,06
1	0	0,13282	0	0	-0,31213	0	0	0	13132,72
0	1	0,377208	0	0	0,113561	0	0	0	78871,56
0	0	0,471611	-0,6	-1,039	-0,06929	0	0	1	46447,79

ОТВЕТ

-13187,1 $X_{a,H}$

-37089,1 $Y_{a,H}$

-13208,9 $X_{b,H}$

-37871,6 $Y_{b,H}$

-13187,1 $X_{o1,H}$

-9257,06 $Y_{o1,H}$

13132,72 $X_{o2,H}$

78871,11 $Y_{o2,H}$

46447,79 $M_{вp,Hм}$

The screenshot shows the Mathcad software interface with the following content:

Matrix A:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.855 & -2.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.84 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1.039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix B:

$$B := \begin{pmatrix} -76.213 \\ 41000 \\ 100291.8 \\ 21.836 \\ 782.5 \\ 358.20 \\ 0 \\ 27832 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution X:

$$X = \text{Isolve}(A, B) = \begin{pmatrix} -1.319 \times 10^4 \\ -3.709 \times 10^4 \\ -1.321 \times 10^4 \\ -3.787 \times 10^4 \\ -1.319 \times 10^4 \\ -9.257 \times 10^3 \\ 1.313 \times 10^4 \\ 7.887 \times 10^4 \\ 4.645 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Неизвестные могут быть определены с помощью программы Matchad. Для этого после обращения к программе, на рабочем поле щелчком мыши выбирается место для ввода матрицы. Записывается $A:=$, где знак присвоения «:=» вызывается нажатием клавиши с русской буквой «ж». После этого в строке команд выбирается окно

матриц, устанавливается нужное число строк и столбцов в матрице, и записывается матрица коэффициентов. Аналогично вводится столбец правых частей V_i . Для определения неизвестных используется встроенная программа $X:=\text{lsolve}(A,B)$, с помощью которой и определяются неизвестные $X=$.

4.5.2 Определение величины $M_{\text{вп}}$ методом Даламбера-Лагранжа.

Общее уравнение динамики называется ещё принципом Даламбера-Лагранжа. Согласно этому принципу для механической системы с идеальными, голономными и стационарными связями, на которую действуют активные силы, и для которой введены силы инерции Даламбера в данный момент времени, сумма элементарных работ (или мощностей) этих сил на любом возможном перемещении равна нулю. Запишем это уравнение через мощности.

$$\sum_{i=1}^n N_{F_i} = 0, \quad N_{m_1g} + N_{m_2g} + N_{m_3g} + N_F + N_{R_2^{by}} + N_{M_2^{by}} + N_{R_3^{uu}} + N_{M_3^{by}} = 0$$

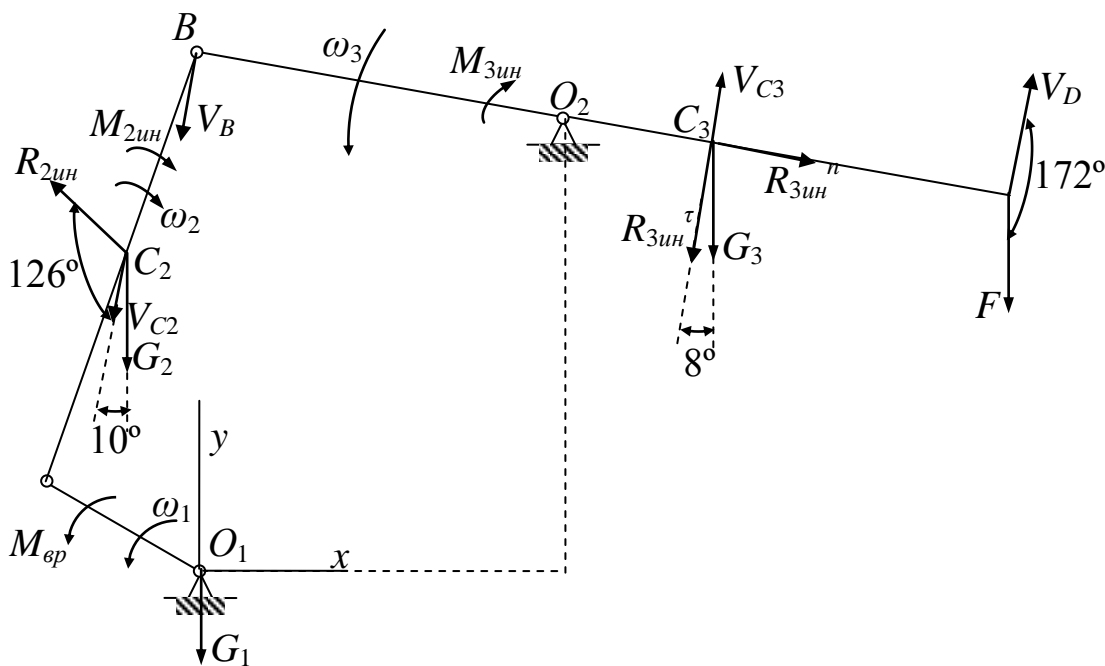


Рис.4.11 Силовая схема для общего уравнения динамики.

Для голономных и стационарных связей действительное перемещение является одним из возможных, поэтому при вычислении возможных мощностей воспользуемся определёнными в задании по кинематике скоростями.

Мощность силы определяем по формуле $N_F = F \cdot V \cdot \cos\beta$, где V - скорость точки приложения силы, β - угол между вектором силы и скорости. Мощность момента вычисляется по формуле $N_M = \pm M \cdot \omega$, где ω - угловая скорость тела, к которому приложен момент. Необходимые для расчёта силы, скорости и углы показаны на рис. 11.

Вычислим сумму мощностей всех сил и приравняем её нулю.

$$m_1 g \cdot 0 + m_2 g \cdot v_{C2} \cdot \cos 10^\circ + m_3 g \cdot v_{C3} \cdot \cos 172^\circ + F \cdot v_D \cdot \cos 172^\circ + R_{2ин} \cdot v_{C2} \cdot \cos 126^\circ + M_{2ин} \cdot \omega_2 - R_{3ин} \cdot v_{C3} - M_{3ин} \cdot \omega_3 + M_{вр} \cdot \omega_1 = 0$$

Отметим, что сумма мощностей реакций опор равна нулю, потому что связи считаются идеальными. Работа внутренних сил тоже равна нулю, потому что ещё и звенья механизма рассматриваются как абсолютно твёрдые. Подставляя числовые значения в полученное уравнение, определим величину $M_{вр}$.

$$M_{вр} = \frac{1}{0,628} (-589,9 + 3255,506 + 26885,78 + 12,25 - 0,0038 + 19,89 + 0,071) = 47107 \text{ Нм.}$$

Сравним результаты, полученные разными методами. Оценим расхождение значений в процентах.

$$\Delta M_{вр} = \frac{47107 - 46448}{47107} 100\% = 1,4\%.$$

Итак, проверка вычисления $M_{вр}$ с помощью принципа Даламбера-Лагранжа показало очень хорошую сходимость с расчётами, выполненными методом кинетостатики. Это свидетельствует о правильности расчётов.

4.5.3 Вычисление обобщённой силы.

Механизм шарнирного четырёхугольника является механической системой с одной степенью свободы и, следовательно,

для него можно ввести одну обобщённую координату, например φ_1 -угол поворота кривошипа.

Тогда обобщённая скорость $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ -это угловая скорость кривошипа. Обобщённая сила Q_φ в рассматриваемый момент времени может быть определена как коэффициент перед обобщённой скоростью в выражении суммарной мощности всех активных сил

$$N_F + N_{G_2} + N_{G_3} + N_{M_{\text{вр}}} = Q_\varphi \omega_1,$$

$$F \cdot v_D \cdot \cos 172^\circ + m_2 g \cdot v_{C_2} \cdot \cos 10^\circ + m_3 g \cdot v_{C_3} \cdot \cos 172^\circ + M_{\text{вр}} \cdot \omega_1 = Q_\varphi \cdot \omega_1$$

Отсюда $Q_\varphi = 51 \text{ Нм}$. Теперь определим значение $M_{\text{вр}}$, необходимое для того, чтобы удержать механизм, находящийся в покое, в равновесии. Для этого приравняем к нулю обобщённую силу.

$$M_{\text{вр}}^{\text{равн}} = 47056 \text{ Нм}.$$

Вопросы к задачам К1 и К2.

1. Что такое касательное и нормальное ускорение точки?
2. Как с помощью касательного и нормального ускорений точки получить полное ускорение?
3. Какое движение твердого тела называется поступательным?
4. Как можно задать поступательное движение тела?
5. Какое движение называется вращательным?
6. Как задаётся вращение тела вокруг неподвижной оси?
7. Что такое угловая скорость и угловое ускорение тела? Какую размерность имеют эти величины?
8. По какой траектории движется любая точка вращающегося тела?
9. Как по закону вращательного движения найти закон движения точки по траектории?
10. Как определяется величина и направление вектора скорости точки вращающегося тела?
11. Как определяется величина и направление вектора касательного и нормального ускорений точки вращающегося тела?
12. Как определяется величина и направление вектора ускорения точки вращающегося тела?
13. Какое движение твёрдого тела называется плоскопараллельным?
14. В чём заключается закон плоскопараллельного движения тела?
15. Из каких движений складывается плоскопараллельное движение?
16. Сформулируйте теорему о распределении скоростей при плоскопараллельном движении.
17. Сформулируйте теорему о распределении ускорений при плоскопараллельном движении.
18. В формуле, определяющей скорость точки по теореме о распределении скоростей при плоском движении, какая из двух скоростей является относительной и какая переносной?

19. Рассматривая плоскопараллельное движение звена АВ, какую точку Вы приняли за полюс?

20. Как Вы определили скорость и ускорение полюса при рассмотрении плоскопараллельного движения звена АВ?

21. В относительном вращательном движении звена АВ вокруг полюса как обозначается и как определяется скорость точки В?

22. В относительном вращательном движении звена АВ вокруг полюса как обозначается и как определяется ускорение точки В?

23. Проверьте правильность расчёта скоростей точек В и С при помощи мгновенного центра скоростей.

24. Чему равна угловая скорость плоского сечения, если две его точки имеют равные по величине и одинаково направленные скорости?

25. Как Вы определили скорость точки С?

26. Как Вы определили Ускорение точки С?

Вопросы к задачам Д1 и Д2.

1. Как вычисляется момент силы относительно точки на плоскости?

2. Сформулируйте закон равенства действия и противодействия.

3. Как определяется сила инерции Даламбера?

4. Сформулируйте принцип Даламбера для материальной точки.

5. Сформулируйте принцип Даламбера для механической системы.

6. Запишите уравнения статики, выражающие принцип Даламбера для плоской системы сил.

7. То же для пространственной системы сил.

8. Что называется центром масс механической системы?

9. Что называется моментом инерции относительно оси?

10. Запишите формулу момента инерции однородного диска или цилиндра относительно его оси симметрии.

11. Запишите формулу момента инерции однородного кольца.

12. Сформулируйте теорему Штейнера о моментах инерции относительно параллельных осей.
13. Что называется главным вектором системы сил?
14. Что называется и главным моментом системы сил?
15. Сформулируйте теорему Пуансо о приведении произвольной системы сил к центру.
16. Примените теорему Пуансо для плоской системы сил.
17. Как привести к центру силы инерции Даламбера?
18. Как вычисляется главный вектор сил инерции Даламбера?
19. Как вычисляется главный момент сил инерции Даламбера?
20. Как приводятся силы инерции Даламбера тела, движущегося поступательно.
21. Как приводятся силы инерции Даламбера тела, которое вращается вокруг неподвижной оси?
22. Как приводятся силы инерции Даламбера тела, которое находится в плоскопараллельном движении?
23. Как вычисляется мощность силы, приложенной к движущемуся телу?
24. Как вычисляется мощность момента, приложенного к вращающемуся телу?
25. Что такое возможное перемещение механической системы?
26. Для каких связей действительное перемещение является одним из возможных перемещений?
27. Что такое обобщённая координата, обобщённая скорость, обобщённая сила?
28. Сформулируйте принцип возможных перемещений.
29. Сформулируйте принцип Даламбера-Лагранжа для механической системы.
30. Запишите принцип возможных перемещений через обобщённые силы.

Выводы

В этом пособии рассмотрен кинематический и динамический анализ рычажных трех- и четырехзвенных механизмов аналитическими и графоаналитическими методами. Представлены альбомы заданий для курсовых и расчетно-графических работ для студентов высших технических учебных заведений. Также представлена методика решения соответствующих задач, что является важной частью в освоении проектирования рычажных механизмов в теории механизмов и машин.

Предлагаемое пособие не претендует на полноту изложения курса Теоретическая механика и не подменяет классические учебники, а является своеобразным «путеводителем» при самостоятельном изучении предмета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М., 1990.
2. Тарг СМ. Краткий курс теоретической механики. М., 2002.
3. Цывильский В Л. Теоретическая механика. М., 2001.

Учебники и учебные пособия

1. Е.К.Кичаев, А.М.Лашманов, П.Е.Кичаев, Л.А.Довнар Теория механизмов и машин: Учеб. пособ. – Самара.: Самарский гос. техн.ун-т., 2007. 134с.

Задачники

1. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. Пособие для техн. Вузов / Под общ. ред. проф. А.А. Яблонский.- 5е изд., испр. М.: Интеграл Пресс, 1998.-384с.
2. Бать М.И., Дженаридзе Г.Ю., Кельзон А.С., Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч 1, 2. СПб., 1998
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М., 2002.

Оглавление

Предисловие.....	3
Введение.....	3
1. Теоретические основы кинематики твердого тела.....	4
1.1. Поступательное движение.....	4
1.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.....	5
1.3. Плоскопараллельное движение твердого тела.....	6
2. Принципы динамики.....	9
2.1. Принцип Даламбера для механической системы.....	9
2.2. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)....	13
2.3. Условие равновесия в обобщенных координатах (принцип возможных перемещений).....	15
3. Кинематика и динамика кривошипно-ползунного механизма.....	17
3.1. Задание К1. Кинематика.....	17
3.2. Задание Д1. Динамика	17
3.3. Схемы механизмов и исходные данные.....	19
3.4. Пример выполнения задания «Кинематика кривошипно-ползунного механизма».....	39
3.5. Пример выполнения задания «Динамика кривошипно-ползунного механизма».....	45
3.5.1. Определение сил реакций связей и вращающего момента $M_{вр}$	45
3.5.2. Определение величины $M_{вр}$ с помощью общего уравнения динамики.....	49
3.5.3. Вычисление обобщенной силы.....	51
3.5.4. Определение и $M_{вр}^{равн}$	51
4. Кинематика и динамика шарнирного четырехугольника.....	52
4.1. Задание К2. Кинематика шарнирного четырехугольника.....	52
4.2. Задание Д2. Динамика шарнирного четырехугольника.....	53
4.3. Исходные данные.....	55
4.4. Пример выполнения задания К2 «Кинематика механизма шарнирного многоугольника».....	65
4.5. Пример выполнения задания Д2 «Динамика механизма	

шарнирного многоугольника».....	73
4.5.1. Определение сил реакций связей и вращающего момента $M_{вр}$.	73
4.5.2. Определение величины $M_{вр}$ методом Даламбера-Лагранжа.....	78
4.5.3. Вычисление обобщенной силы.....	80
Вопросы к задачам К1 и К2.....	81
Вопросы к задачам Д1 и Д2.....	82
Выводы.....	84
Список литературы.....	84

Учебное издание

*КОЗЫРЕВА Елена Кузьминична
КИЧАЕВ Петр Евгеньевич*

Кинематика и динамика рычажных механизмов

Редактор *Т.Г. Трубина*

Компьютерная верстка *И.О. Миняева*

Выпускающий редактор *Н.В. Беганова*

Подписано в печать 17.08.09.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Усл. п. л. 7,72 Уч.-изд. л. 7,69.

Тираж 100 экз. Рег. № 93/09.

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Самарский государственный технический университет»

443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии

Самарского государственного технического университета

443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8