Копсухов

Романов Александр Анатольевич (5528И12)
Время/лимит 132:25 / 00:00
Код модуля: ДУ-к1-н; Код блока: v1

Продолжить

Контрольная работа № 1 по "Дифференциальным уравнениям".

Распечатайте текст варианта заданий контрольной работы. Решите письменно задания варианта и отдайте преподавателю на проверку.

Вариант № 1

1. $(1-x^2)dy + xydx = 0$
2. $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$
3. $y' + x\cdot\sqrt[3]{y} = 3y$
4. $\dfrac{dx}{x} + (2x - \dfrac{1}{y})dy = 0, \quad y(1) = 2$
5. $(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$
6. $y'^2 = y - y'$
7. $y' = \mathrm{tg}(y - 2x)$

$+/2 \quad - \quad \mp \quad \mp \quad + \quad +/2 \quad -$

2

(1) $(1-x^2)dy + xydy = 0$

разделим на $y(1-x^2) \neq 0$ тогда

$\frac{dy}{y} + \frac{x\,dx}{1-x^2} = 0$ А если $y=0$?

$1-x^2=0$?

$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{x^2-1}$

+/2

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x\,dx}{x^2-1}$

$\ln y = \ln(x^2-1)^{\frac{1}{2}} + \ln(C_1)$

$y = \sqrt{x^2-1}\cdot C_1$

Ответ: $y = \sqrt{x^2-1}\cdot C_1$ C_1 – константа.

А если $x^2<1$?

Романов Александр Анатольевич.

Задание №2

$ay \qquad ax$

$$ay(ay-axy')=\sqrt{a^4x+a^4y}$$

$$\cancel{a^2}y(y-xy')=\cancel{a}\sqrt{x^4+y^4}$$

$$y(y-xy')=\sqrt{x^4+y^4} \qquad y=tx \quad y'=t'x+t$$

$$\cancel{t}x(tx-x(t'x+t))=\sqrt{\cancel{t}x^4+(tx)^4}$$

$$tx(\cancel{tx}-t'x^2-\cancel{tx})=\sqrt{\cancel{x^4}+t^4x^4}$$

$2\,t\,dt$

$$tx(-t'x^2)=x^2\sqrt{1+t^4}$$

$$(t^2)'$$

$$\frac{-t'tx^3}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}\sqrt{1+t^4}$$

пусть: $y=tx \quad y'=t'x+t$

$$-t'tx=\sqrt{1+t^4}$$

$$-\frac{dt}{dx}tx=\sqrt{1+t^4}$$

$$-\frac{dt}{dx}t=\frac{\sqrt{1+t^4}}{x}$$

$$\frac{-dt\cdot t}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{dx}{x}$$

неверно

$$-\int\frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt=\ln(x)+C$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{1+(t^2)^2}}=\ln(x)+\ln(C)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{t^2+1})=\ln(x\cdot C)$$

$$\ln(x+\sqrt{t^2+1})^{\frac{1}{2}}=\ln x\cdot C \Rightarrow (x+\sqrt{t^2+1})^{-\frac{1}{2}}=x\cdot C \Rightarrow \left(x+\sqrt{\frac{y}{t}+1}\right)^{-\frac{1}{2}}=xC$$

где C-конст.

$y' + x\sqrt[3]{y} = y3$ $\boxed{\text{Задача 3}}$ 1 стр

$y' - 3y = -x\sqrt[3]{y}$

$\frac{y'}{\sqrt[3]{y}} - 3y^{\frac{2}{3}} = -x$

$\frac{y'}{\sqrt[3]{y}} - 3\sqrt[3]{y^2} = -x$

?

$z = \sqrt[3]{y^2}$ $z' = \frac{2}{3}\frac{y'}{\sqrt[3]{y}}$ $=$ $\frac{3}{2}z' = \frac{y'}{\sqrt[3]{y}}$

$\frac{3}{2}z' - 3z = -x$

$3z - \frac{3}{2}z' = x$

$z = uv$ $z' = u'v + uv'$

$3uv - \frac{3}{2}(u'v + uv') = x$

$3uv - \frac{3}{2}u'v - \frac{3}{2}uv' = x$

$3u(v - \frac{1}{2}v') - \frac{3}{2}u'v = x$

$$\begin{cases} v - \frac{1}{2}v' = 0 \\ -\frac{3}{2}u'v = x \end{cases}$$

найдем v:

$\frac{1}{2}v' = v$

$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = v \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dv}{v} = 2dx$

$\int \frac{dv}{v} = 2\int dx$

$\Rightarrow \ln v = 2x$

$v = e^{2x}$

найдем u:

$-\frac{3}{2}u'v = x$

$-\frac{3}{2}u'e^{2x} = x$

$-\frac{3}{2}u' = \frac{x}{e^{2x}}$

$u' = -\frac{2}{3}\frac{x}{e^{2x}}$

$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{3}\frac{x}{e^{2x}}$

$u = -\frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{e^{2x}}$

$\int e^{-2x} x\,dx$ $\boxed{\text{Задача 3 - 2 стр}}$ $uv - \int v\,du$ $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1}$

2

$u = x \Rightarrow du = x' \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$-\frac{1}{2}x e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} dx$

$\int \frac{1}{2} e^{-2x} dx - \frac{1}{2} x e^{-2x}$

$-\frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x}$

$-e^{-2x}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right)$

$-\frac{1}{4} e^{-2x}(1+2x) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

$\frac{1}{6} e^{-2x}(1+2x) = \frac{1+2x}{6e^{2x}} = u$

Следовательно

$z = uv = e^{2x} \cdot \frac{(1+2x)}{6e^{2x}} = \frac{1+2x}{6} + e^{2x}C = \boxed{\frac{1}{6} + \frac{x}{3} + e^{2x}C} = Z$

$z = \sqrt[3]{y^2} \Rightarrow y = \sqrt[2]{z^3} = \left(\frac{1}{6} + \frac{x}{3} + e^{2x}C\right)^{\frac{3}{2}} = ?$

$= \frac{(1 + 2x + 6Ce^{2x})^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} = \frac{Ce^{2x} + 2x + 1}{6\sqrt{6}} ?$

Надо найти $y(x)$
Где она?

+

(У)

$$\frac{dx}{x} + \left(2x - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

поменяем местами x и y:

$$\frac{dy}{y} + \left(2y - \frac{1}{x}\right)dx = 0$$

$$y' + 2y^2 - \frac{y}{x} = 0$$

$$y' - \frac{y}{x} = -2y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{\cancel{x}y} = -2$$ пусть $z = \frac{1}{y}$ и $z' = -\frac{y'}{y^2}$ тогда

$$z' + \frac{z}{x} = 2$$ – домножим на x

$$z'x + z = 2x \qquad (x') = 1 \quad \text{тогда}$$

$$z'x + zx' = 2x$$

$$(zx)' = 2\cancel{x} \Rightarrow \frac{d(zx)}{dx} = 2x \Rightarrow d\,zx = 2x\,dx$$

$$\int d(zx) = \int 2x\,dx \Rightarrow zx = x^2 + C_1 \Rightarrow z = x + \frac{C_1}{x}$$

Обратная замена

$$y = \frac{1}{\frac{C_1}{x} + \cancel{x}}$$ – вернем первоначальное обозначение

$$x = \frac{1}{\frac{C_1}{y} + y} \qquad \text{т.к. } y(1) = 2 \text{ то}$$

$$1 = \frac{1}{\frac{C_1}{2} + 2} \Rightarrow C_1 = -2$$

F

Функция $y(x)$ не найдена

Частное решение: $\frac{1}{x} = y - \frac{2}{y}$

Задание 5

$$(\cos x - x\sin x) y\, dy + (x\cos x - 2y)dx = 0$$

$$P = (\cos x - x\sin x) y \qquad Q = (x\cos x - 2y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left((\cos x - x\sin x) y\right)' = \cos x - x\sin x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (x\cos x - 2y)' = -x\sin x + \cos x$$

$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ – данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (\cos x - x\sin x) y$$

$$\frac{dF}{dy} = x\cos x - 2y$$

$$F = \int (\cos x - x\sin x) y\, dx = y\int(\cos x - x\sin x)dx = (*)$$

$x = u \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$$(*) = y\left(\int \cos x\, dx + x\cos x - \int \cos x\, dx\right) = xy\cos x + \varphi(x)$$

$$\frac{dF}{dy} = \left(xy\cos x + \varphi(x)\right)' = x\cos x + \varphi'(y)$$

$$x\cos x - 2y = x\cos x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = -2y$$

$$\varphi(y) = -2\int y\, dy = -y^2 + C$$

+

$$F = xy\cos x + \varphi(y) = xy\cos x - y^2 + C$$

Ответ: $xy\cos x - y^2 = C_2$

(6) $y'^2 = y - y'$ пусть $y' = p\cancel{(x)}$ тогда

$$p^2 = y - p$$

квадратное уравнение имеет корни

а) $p_1 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1+4y}\right)$

б) $p_2 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1+4y}\right)$

получаем 2 случая

а) $y' = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1+4y}\right) \Rightarrow \frac{dy}{1+\sqrt{1+4y}} = -\frac{1}{2}dx$

$\int \frac{dy}{1+\sqrt{1+4y}} = -\frac{1}{2}\int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{1+4y} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1+4y}\right) = -\frac{1}{2}x + C$ или

откуда это?

$\sqrt{1+4y} - \ln\left(1+\sqrt{1+4y}\right) = -x + C_1$ где C_1 – константа.

б) $y' = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1+4y}\right) = \frac{dy}{-1+\sqrt{1+4y}} = \frac{1}{2}dx$

+/2

$\int \frac{dy}{-1+\sqrt{1+4y}} = \frac{1}{2}\int dx$

$\frac{1}{2}\sqrt{1+4y} + \frac{1}{2}\ln\left(-1+\sqrt{1+4y}\right) = \frac{1}{2}x + C$ или

$\sqrt{1+4y} + \ln\left(-1+\sqrt{1+4y}\right) = x + C_1$ C – конст.

ответ: $\sqrt{1+4y} - \ln\left(1+\sqrt{1+4y}\right) = -x + C_1$

$\sqrt{1+4y} + \ln\left(-1+\sqrt{1+4y}\right) = x + C_1$

(7) $y' = tg(y-2x)$

пусть $u = y - 2x$ тогда $y = u + 2x$ $y' = u' + 2$ отсюда

$u' + 2 = tg u$

$u' - tg u = -2$

Рассотрим однородное уравнение

$u' - tg u = 0$

Так нельзя решать нелинейные ур-ия

$\frac{du}{tg u} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{tg u} = \int dx \Rightarrow \int \frac{\cos u \, du}{\sin u} = \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|\sin u| = x + C$ или $\sin u = C_1 e^x$

Следовательно решение однородного уравнение

$u_{одн} = (-1)^n \arcsin(C_1 e^x) + \pi n$

Частное решение неоднородного уравнение $\tilde{u}$ найдем.

если $\tilde{u} = const$ то $\tilde{u}' = 0$ и

$-tg \tilde{u} = -2$ значит $\tilde{u} = arctg 2$

общее решение неоднородного уравнения тогда

$u = u_{одн} + \tilde{u} = \arcsin(C_1 e^x) + arctg 2$

значит

Ответ: $y = 2x + arctg 2 + \arcsin(C_1 e^x)$ неверно