

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

к расчетно-графическим работам
по теме «Цепи постоянного и синусоидального тока»
курса «**Электротехника и электроника**»
для студентов неэлектротехнических специальностей

Издание второе, исправленное и дополненное

Составитель Е. И. Голобородько

Ульяновск 2004

УДК 621.3: 621.372 (076)
ББК 31.21 я7
М54

Рецензент кандидат технических наук, доцент кафедры «Физика и электротехника» Ульяновского высшего военно-технического училища им. Б. Хмельницкого В. Г. Юриш.

Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета.

М54

Методические указания и контрольные задания к расчетно-графическим работам по теме «Цепи постоянного и синусоидального тока» курса «Электротехника и электроника» для студентов неэлектротехнических специальностей /сост. Е. И. Голобородько. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – 52 с.

Учебный материал методических указаний предусмотрен действующими Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования для студентов специальностей 100700, 120100, 150100, 190300, 200800, 220100, 330200.

Работа подготовлена на кафедре «Электроснабжение», цикл ТОЭ и ОЭ.

УДК 621.3: 621.372 (076)
ББК 31.21 я7

© Голобородько Е. И., составление, 2004
© Оформление. УлГТУ, 2004, с изм., 1995

© Ульяновский государственный технический университет

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания и задания составлены для выполнения расчетно-графических работ (РГР), в первую из которых, как правило, входит задание на расчет электрических цепей постоянного тока (задача 1), а во вторую – расчет электрических цепей переменного тока (задачи 2 и 3). Разбивка эта на две РГР представляется условно традиционной, и каждая из задач может быть выдана студентам как отдельная РГР или все три задачи объединены в одну РГР, так как для некоторых специальностей предполагаются еще задания по переходным процессам, электронике и так далее. Преподаватель может задать все пункты перечня заданий к каждой задаче или выбрать пункты по своему усмотрению, может разным студентам предложить расчет разными методами или, наоборот, предложить выбрать наиболее рациональный метод, по мнению самого студента, с соответствующим обоснованием.

К задачам даны методические указания в виде примеров расчета. Наиболее полно разобран пример к задаче 1. В задаче 2 рассмотрены только особенности использования комплексных напряжений, токов, сопротивлений на примере расчета методом преобразования и, наконец, для трехфазных цепей рассмотрен только наиболее сложный случай из заданных: расчет соединения неоднородной нагрузки звездой без нулевого провода. Составитель, однако, считает, что студент вправе рассчитать режим этой цепи любым знакомым ему методом. Например, методом контурных токов, если на то не будет специальных указаний преподавателя, выдавшего РГР. Остальные случаи конфигурации трехфазной цепи (с нейтральным проводом, короткое замыкание или обрыв фазы) рассчитываются слишком просто, чтобы требовались специальные методические указания. Это относится и к векторно-топографической диаграмме, построение которой в общем случае рассмотрено в методических указаниях к задаче 2.

Источником идей и примеров с некоторой доработкой составителя являлись в основном методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей по электротехнике, прошедшие многолетнюю «обкатку» в высших учебных заведениях СССР и РФ, и некоторые кафедральные разработки.

ЗАДАЧА 1. РАСЧЕТ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1. По номеру варианта найти в таблице 1.1 схему электрической цепи и параметры ее элементов.
2. Найти все токи тремя способами:
 - а) используя законы Кирхгофа;
 - б) методом контурных токов;
 - в) методом узловых напряжений;
 - г) ток в шестой ветви методом эквивалентного генератора
 и свести результаты в единую таблицу.
3. Определить показания вольтметра.

Вольтметр на схемах показан окружностью без символов внутри.
4. Составить баланс мощности.
5. Построить в масштабе потенциальную диаграмму для внешнего контура.

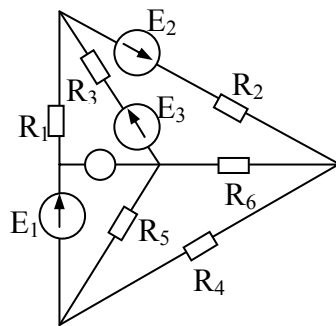


Рис.1.1

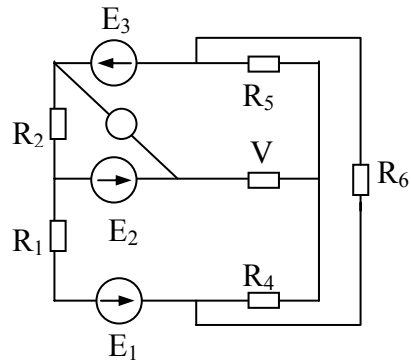


Рис.1.2

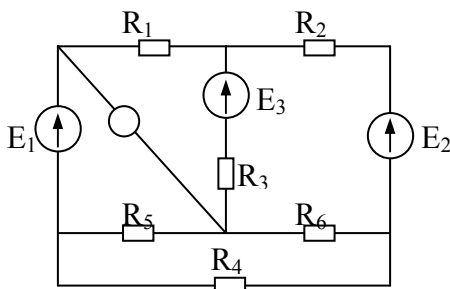


Рис.1.3

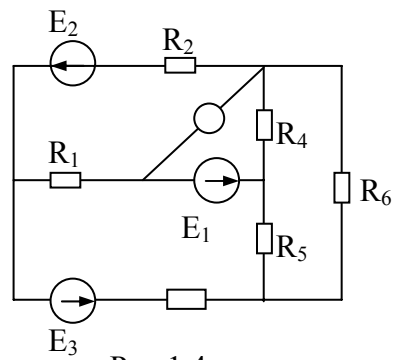


Рис.1.4

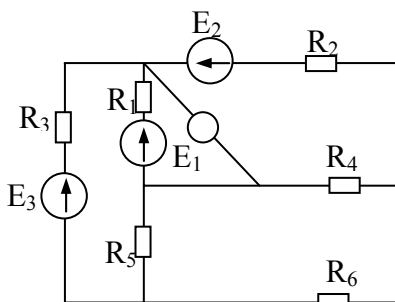


Рис.1.5

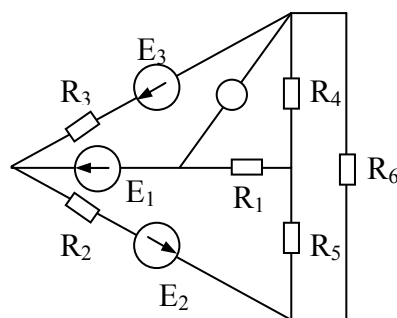


Рис.1.6

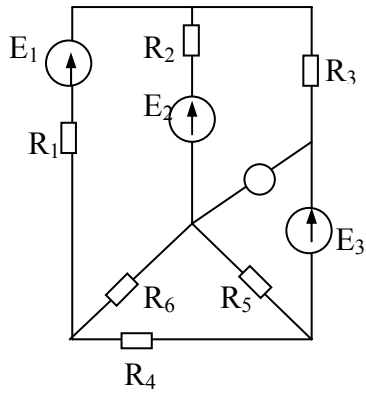


Рис.1.7

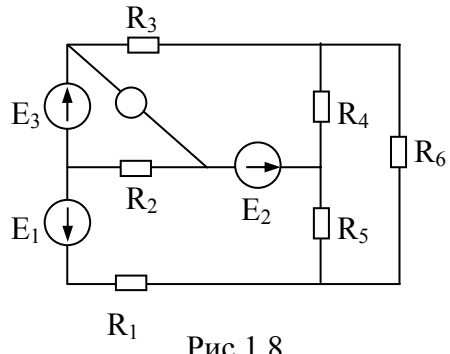


Рис.1.8

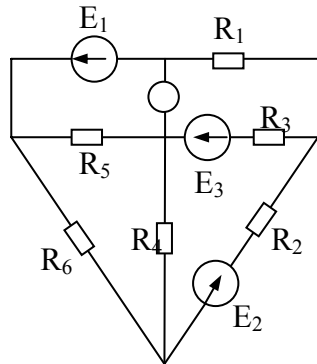


Рис.1.9

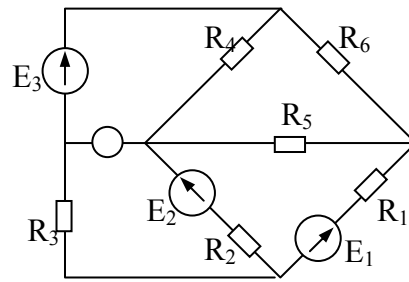


Рис.1.10

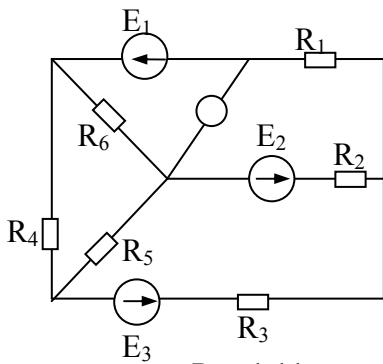


Рис.1.11

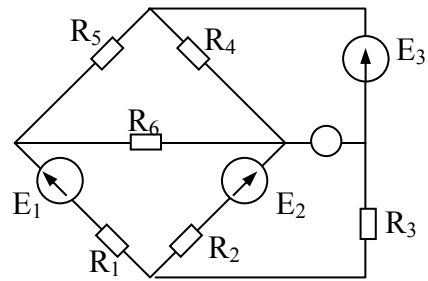


Рис.1.12

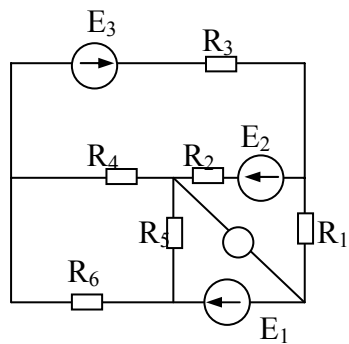


Рис.1.13

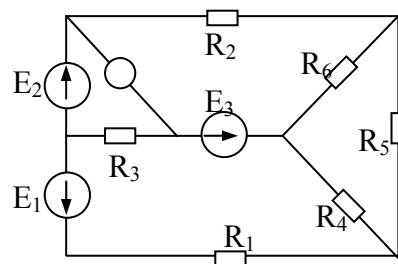


Рис.1.14

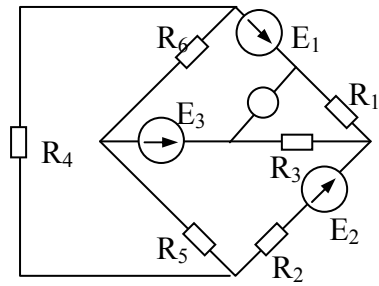


Рис.1.15

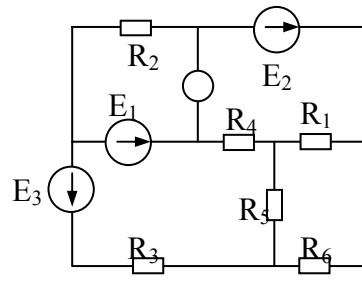


Рис.1.16

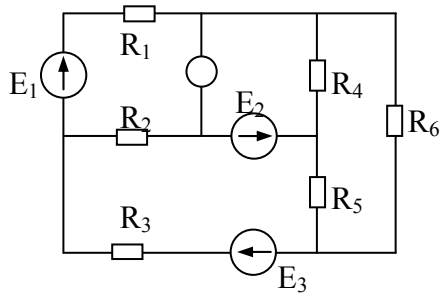


Рис.1.17

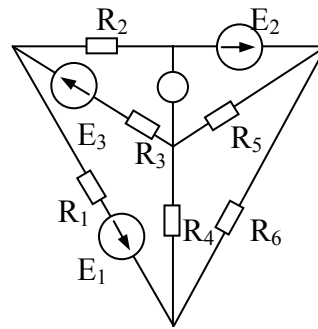


Рис.1.18

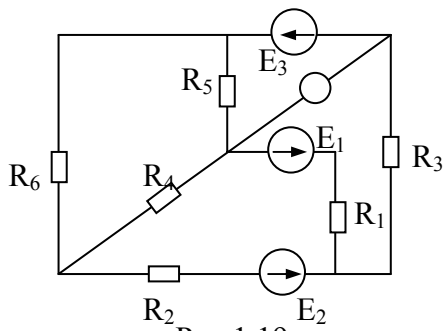


Рис.1.19

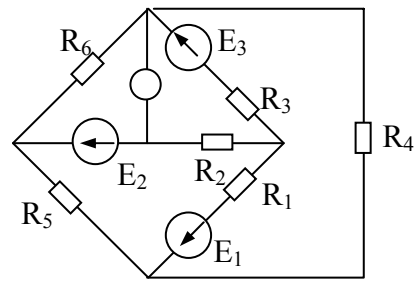


Рис.1.20

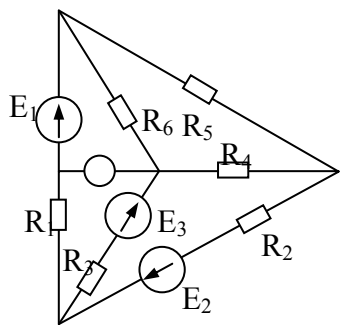


Рис.1.21

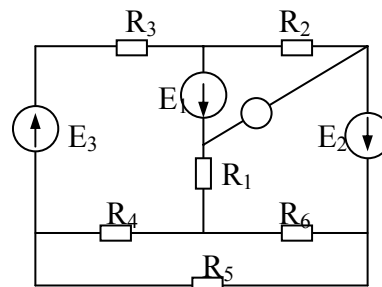


Рис.1.22

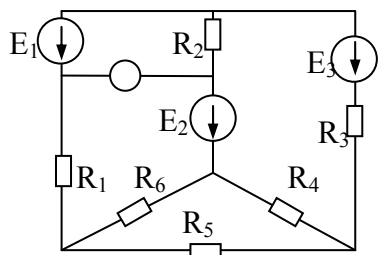


Рис.1.23

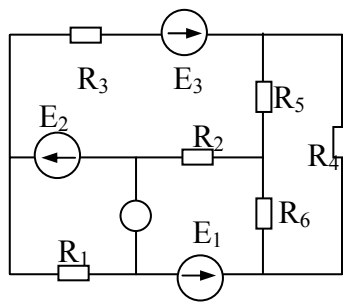


Рис.1.24

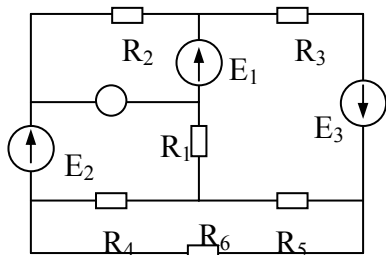


Рис.1.25

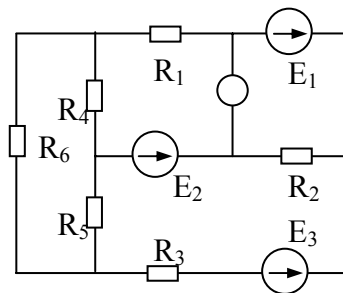


Рис.1.26

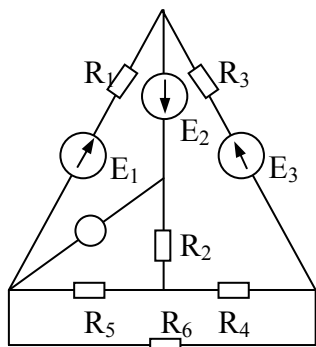


Рис.1.27

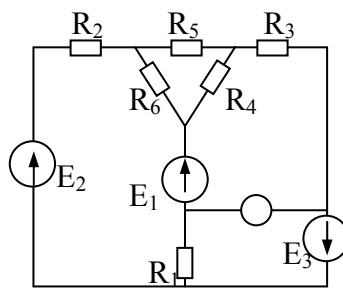


Рис.1.28

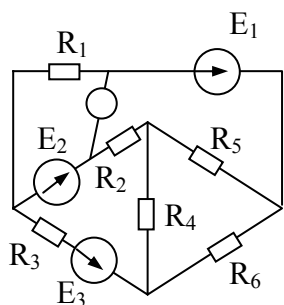


Рис.1.29

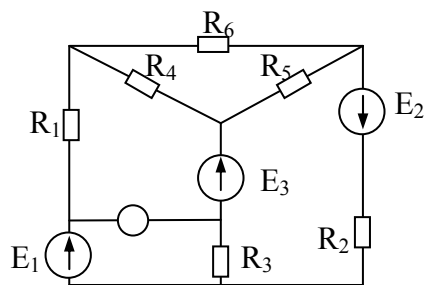


Рис.1.30

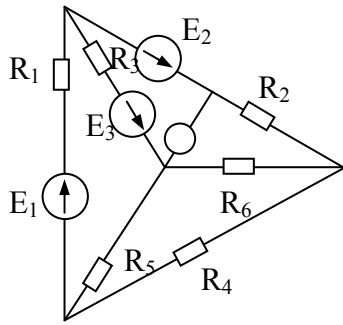


Рис.1.31

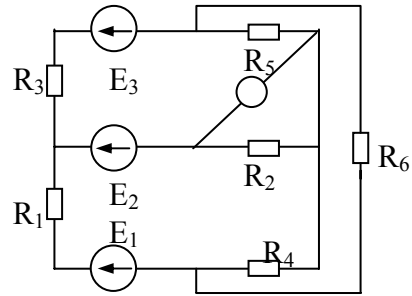


Рис.1.32

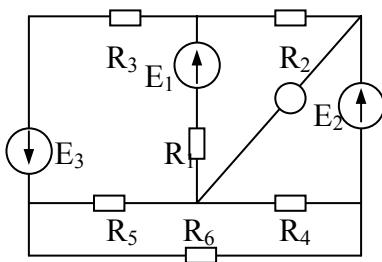


Рис.1.33

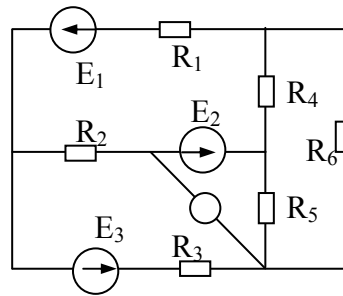


Рис.1.34

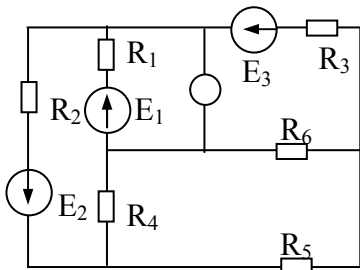


Рис.1.35

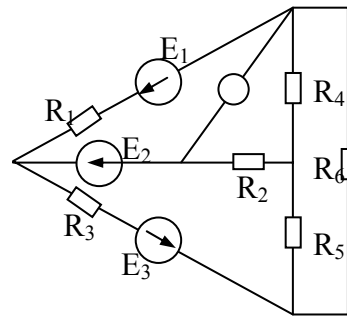


Рис.1.36

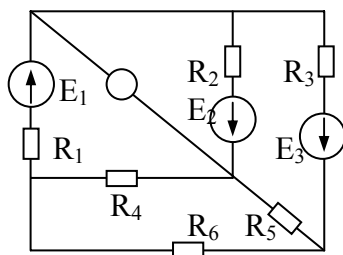


Рис.1.37

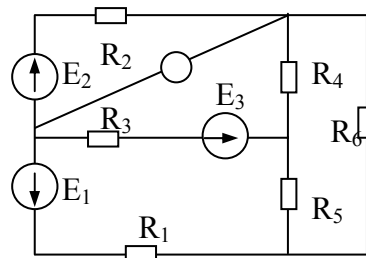


Рис.1.38

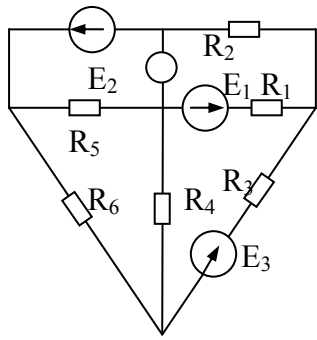


Рис.1.39

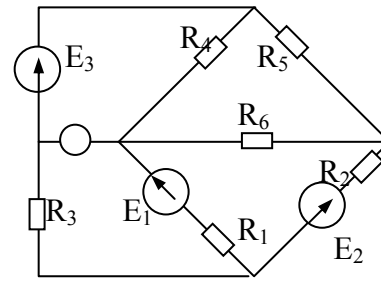


Рис.1.40

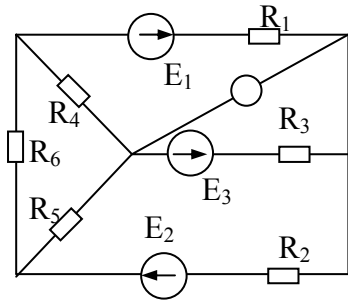


Рис.1.41

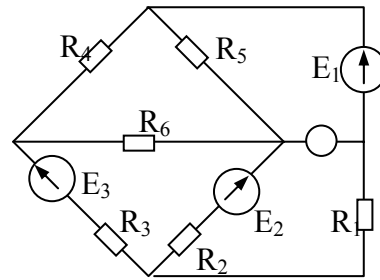


Рис.1.42

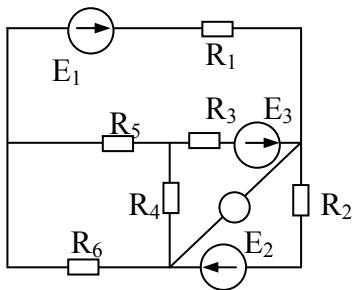


Рис.1.43

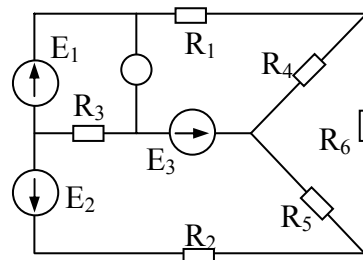


Рис.1.44

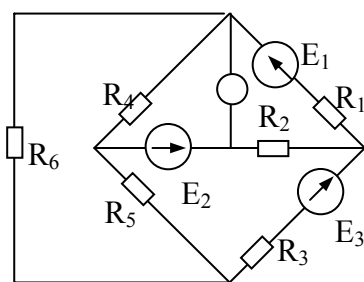


Рис.1.45

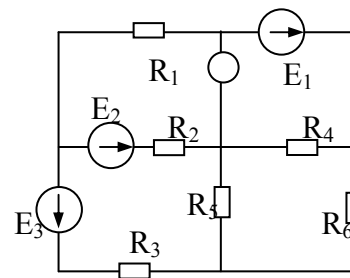


Рис.1.46

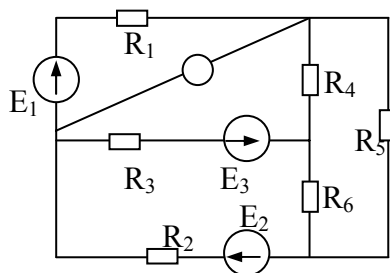


Рис.1.47

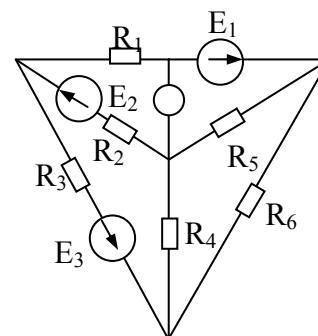


Рис.1.48

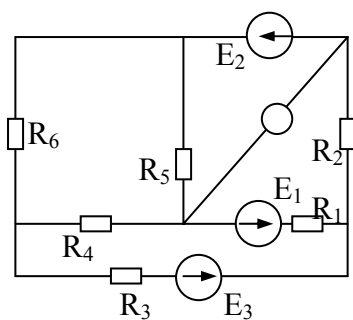


Рис.1.49

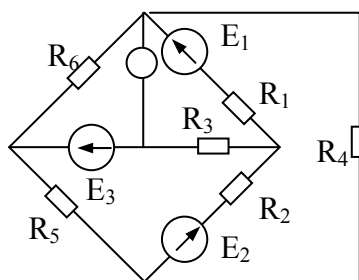


Рис.1.50

Таблица 1.1

Вар.	Рис.	E1, В	E2, В	E3, В	R1, Ом	R2, Ом	R3, Ом	R4, Ом	R5, Ом	R6, Ом
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1.1	22	24	10	2	1	8	4	10	6
2	1.2	55	18	4	8	4	3	2	4	4
3	1.3	36	10	25	4	8	3	1	2	7
4	1.4	16	5	32	9	3	2	4	1	5
5	1.5	14	25	28	5	2	8	2	2	6
6	1.6	5	16	30	6	4	3	2	5	3
7	1.7	10	6	24	3,5	5	6	6	3	1
8	1.8	6	20	4	4	6	4	4	3	3
9	1.9	21	4	10	5	7	2	8	1	1
10	1.10	4	9	18	2,7	10	4	8	10	2
11	1.11	4	24	6	9	8	1	6	10	4
12	1.12	16	8	9	2,5	6	6	5	10	5
13	1.13	48	12	6	4,2	4	2	12	6	2
14	1.14	12	36	12	3,5	5	1	5	6	9
15	1.15	12	6	40	2	3	8	5	7	8
16	1.16	8	6	36	3	2	1	6	8	6
17	1.17	72	12	4	6	1	10	4	12	4
18	1.18	12	48	6	2,5	1	4	15	2	2
19	1.19	12	30	9	3,5	2	3	3	1	3
20	1.20	9	6	27	4,5	2	8	13	4	3
21	1.21	15	63	6	5	3	1	2	12	3
22	1.22	54	27	3	8	3	1	4	2	2
23	1.23	36	9	24	3	4	2	1	5	1
24	1.24	3	66	9	1	4	2	2	7	3
25	1.25	12	30	25	1	5	1	1	6	4
26	1.26	30	16	10	2	5	3	1	8	5
27	1.27	10	32	10	1,5	6	1	7	1	5
28	1.28	5	10	36	1,2	6	3	2	2	2
29	1.29	40	25	8	3	3	2	4	3	2
30	1.30	8	40	10	5	3	3	3	2	1
31	1.31	22	24	10	2	1	8	4	10	6
32	1.32	55	18	4	8	4	3	2	4	4
33	1.33	36	10	25	4	8	3	1	2	7
34	1.34	16	5	32	9	3	2	4	1	5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
35	1.35	14	25	28	5	2	8	2	2	6
36	1.36	5	16	30	6	4	3	2	5	3
37	1.37	10	6	24	3,5	5	6	6	3	1
38	1.38	6	20	4	4	6	4	4	3	3
39	1.39	21	4	10	5	7	2	8	1	1
40	1.40	4	9	18	2,7	10	4	8	10	2
41	1.41	4	24	6	9	8	1	6	10	4
42	1.42	16	8	9	2,5	6	6	5	10	5
43	1.43	48	12	6	4,2	4	2	12	6	2
44	1.44	12	36	12	3,5	5	1	5	6	9
45	1.45	12	6	40	2	3	8	5	7	8
46	1.46	8	6	36	3	2	1	6	8	6
47	1.47	72	12	4	6	1	10	4	12	4
48	1.48	12	48	6	2,5	1	4	15	2	2
49	1.49	12	30	9	3,5	2	3	3	1	3
50	1.50	9	6	2	4,5	2	8	13	4	3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧЕ 1

Пример 1

В этом примере вычисления выполнены с использованием широко распространенной программы MATHCAD. Соответствующие записи перенесены в текст документа WORD в основном без преобразований и выглядят так же, как в MATHCAD. Будем надеется, что студент без труда сопоставит запись $E1 := 30$ с известным ему из программирования выражением «E1 присвоить значение 30». Кроме того, студенту известно, что в языках программирования довольно часто индексы проставляются «в рост» с основным обозначением величины, так что E1 в обычном тексте соответствует записи E_1 .

Схема электрической цепи и числовые данные представлены ниже:

- E1 := 30 E2 := 5 E3 := 10
- R1 := 10 R2 := 30 R3 := 20
- R4 := 25 R5 := 5 R6 := 10

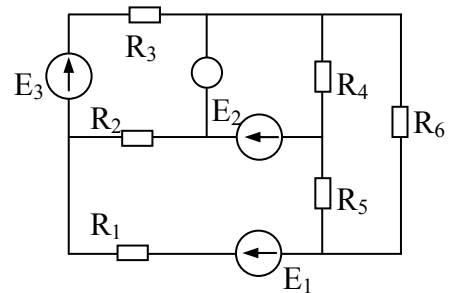


Рис.1.51

Здесь значения ЭДС даны в вольтах, а сопротивлений в омах.

Прежде чем составлять уравнения, выберем условные положительные направления токов и положительные направления обходов контуров. Составим уравнения по законам Кирхгофа.

$$\begin{aligned}
 -I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\
 I_3 + I_4 + I_6 &= 0 \\
 I_2 - I_4 + I_5 &= 0 \\
 R_1 \cdot I_1 - I_2 \cdot R_2 + I_5 \cdot R_5 &= E_1 - E_2 \\
 I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 &= E_2 + E_3 \\
 -I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 + I_6 \cdot R_6 &= 0
 \end{aligned}$$

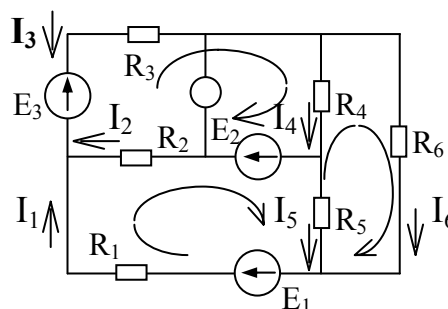


Рис.1.52

При составлении следим за направлениями токов и ЭДС, и в случае их несовпадения с направлениями обхода контуров приписываем напряжениям, созданным этими токами, знак минус. При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа вытекающие из узла токи (по нашим произвольно направленным стрелкам) считаем положительными, а втекающие пишем со знаком минус. Впрочем, если припишем им противоположные знаки, правильность составления уравнений не нарушится, как не нарушается правильность уравнения при умножении левой и правой частей на минус единицу.

Соответствующие этой системе матрицы коэффициентов и свободных членов выглядят так:

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & -R_5 & R_6 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 - E_2 \\ E_2 + E_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Проводим обычные операции для нахождения корней уравнений:

$$C := A^{-1} \quad I := C \cdot B$$

Получаем ответ:

$$I = \begin{bmatrix} 1.289 \\ -0.317 \\ -0.972 \\ 0.203 \\ 0.52 \\ 0.768 \end{bmatrix}$$

Вектор значений токов имеет элементами сверху вниз $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$, т. е. эту запись надо читать так: $I_1 = 1,289 \text{ А}$, $I_2 = -0,317 \text{ А}$ и т. д.

Конечно, систему из шести уравнений с шестью неизвестными решать вручную очень громоздко, поэтому лучше найти возможность использовать ЭВМ.

Замечательный инструмент MATHCAD, например, имеет в составе своих средств вычислений решение систем алгебраических уравнений несколькими методами.

Один из матричных методов приведен только что, другой метод последовательных приближений используем далее. В последнем случае надо только задать (произвольно) нулевое приближение значений неизвестных токов (в процессе решения системы машиной они будут уточняться до заданной точности) и записать систему уравнений в привычном виде. Перед системой обязательно ключевое слово MATHCAD: «Given»

$$I1 := 1 \quad I2 := 1 \quad I3 := 2 \quad I4 := 1 \quad I5 := 2 \quad I6 := 1$$

Giver

$$-I1 - I2 - I3 = 0$$

$$I3 + I4 + I6 = 0$$

$$I2 - I4 + I5 = 0$$

$$R1 \cdot I1 - I2 \cdot R2 + I5 \cdot R5 = E1 - E2$$

$$I2 \cdot R2 - I3 \cdot R3 + I4 \cdot R4 = E2 + E3$$

$$-I4 \cdot R4 - I5 \cdot R5 + I6 \cdot R6 = 0$$

Затем указываем, как мы решили обозначить неизвестные (или массив неизвестных если их несколько) с ключевым словом «find» – «найти» и перечисляем в скобках имена неизвестных. Вектор неизвестных мы обозначили Strom (по-немецки ток)

$$\text{Strom} := \text{find}(I1, I2, I3, I4, I5, I6)$$

И, наконец, «велим» MATHCAD вывести найденные значения на экран (Пишем: Strom =). После чего на экране появляется вектор вычисленных значений:

ОТВЕТ:

$$\text{Strom} = \begin{bmatrix} 1.289 \\ -0.317 \\ -0.972 \\ 0.203 \\ 0.52 \\ 0.768 \end{bmatrix}$$

Здесь сверху вниз по порядку идут значения вычисленных токов: I_1, I_2 и т. д.

Метод контурных токов

Будем считать (в теории доказано, что этот прием приводит к верным результатам), что в каждом контуре течет свой контурный ток. Пусть они совпадают по направлению с уже выбранными направлениями обходов контуров. Чтобы отличить их в обозначениях от токов в ветвях, будет отмечать их двойной индексацией: I_{kk} , где индекс kk показывает номер (k -й) рассматриваемого контура. Представим, что токи в ветвях состоят из контурных токов. Так, во внешних ветвях протекают (при выбранных нами контурах) только по одному контурному току: через сопротивление R_3 контурный ток I_{11} , навстречу току I_3 . Так что, по-видимому, $I_3 = -I_{11}$, аналогично $I_1 = I_{22}$ и $I_6 = I_{33}$.

Последние пары токов (контурных токов и токов в ветвях) совпадают по направлению, и потому знаки минус отсутствуют.

По сопротивлениям R_2 , R_4 , R_5 протекают по два контурных тока в противоположных направлениях. Их разности (или алгебраические суммы) и составляют истинные значения силы токов в ветвях.

При составлении алгебраических сумм положительным считается контурный ток, совпадающий по направлению с выбранным изначально положительным направлением тока в ветви. Имеем: $I_2 = I_{11} - I_{22}$, $I_4 = I_{11} - I_{33}$ и $I_5 = I_{22} - I_{33}$.

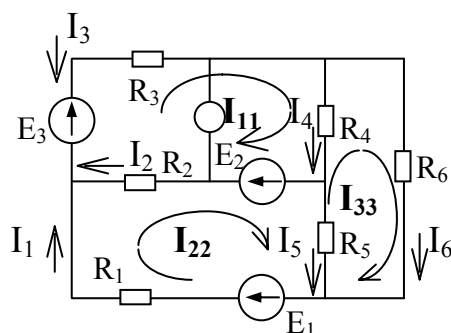


Рис.1.53

Таким образом, достаточно нам знать всего три контурных тока, как все значения силы токов в ветвях отыскиваются совсем просто. Значит, если мы сумеем правильно составить систему уравнений относительно контурных токов, то придется решать систему трех уравнений вместо шести. А это уже существенный выигрыш. Такую систему уже несложно решать вручную.

Введем понятие собственного сопротивления контура, представляющее сумму всех сопротивлений данного контура (в тексте показаны знаки присваивания, как это записывается в MATHCAD и часто на языках программирования высокого уровня):

$$R_{11} := R_1 + R_2 + R_5$$

$$R_{22} := R_2 + R_3 + R_4$$

$$R_{33} := R_4 + R_5 + R_6$$

Введем также понятие смежного сопротивления контуров, это сопротивление, входящее одновременно в два контура. Смежные сопротивления имеют разные индексы:

$$R_{12} := -R_2$$

$$R_{23} := -R_4$$

$$R_{13} := -R_5$$

Знаки «-» в правой части обусловлены тем, что контурные токи смежных контуров протекают по сопротивлениям R_2 , R_4 и R_5 в противоположные стороны. Если бы мы решили направить обход третьего контура и сам ток I_{33} против часовой стрелки, то писали бы

$$R_{12} := -R_2, \quad R_{23} := R_4, \quad R_{13} := R_5.$$

Отметим, что всегда

$$R_{21} := R_{12} \quad R_{32} := R_{23} \quad R_{31} := R_{13}$$

Введем понятия контурных ЭДС, представляющие алгебраические суммы всех ЭДС соответствующего контура:

$$E_{11} := E_1 - E_2 \quad E_{22} := E_2 + E_3 \quad E_{33} := 0$$

Для решения на MATHCAD зададим любые начальные значения контурных токов (например, все по одному амперу):

$$I_{11} := 1 \quad I_{22} := 1 \quad I_{33} := 1$$

Составим систему уравнений по методу контурных токов и решим ее.

Giver

$$I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11}$$

$$I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22}$$

$$I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33}$$

$$I_{kk} := \text{find}(I_{11}, I_{22}, I_{33}) \quad I_{kk} = \begin{pmatrix} 1.289 \\ 0.972 \\ 0.768 \end{pmatrix}$$

Если бы мы не вводили понятий собственных и смежных сопротивлений и контурных ЭДС, то уравнения выглядели бы так:

$$\begin{aligned} I_{11} \cdot (R_1 + R_2 + R_5) - I_{22} \cdot R_2 - I_{33} \cdot R_5 &= E_1 - E_2, \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - I_{33} \cdot R_4 &= E_2 + E_3, \\ -I_{11} \cdot R_5 - I_{22} \cdot R_4 + I_{33} \cdot (R_4 + R_5 + R_6) &= 0. \end{aligned}$$

В некоторых случаях такая запись даже более наглядна.

Решение системы трех уравнений несложно провести и вручную.

Значения контурных токов оказались равными:

$$I_{11} = 1,289 \text{ А}, \quad I_{22} = 0,972 \text{ А}, \quad I_{33} = 0,768 \text{ А}.$$

Теперь находим значения силы токов в ветвях:

$$I_1 = I_{11} = 1,289 \text{ А}, \quad I_3 = -I_{22} = -0,972 \text{ А}, \quad I_6 = I_{33} = 0,768 \text{ А}, \\ I_2 = I_{22} - I_{11} = -0,317 \text{ А}, \quad I_4 = I_{22} - I_{33} = 0,204 \text{ А}, \quad I_5 = 0,521 \text{ А}.$$

Полученные значения токов совпадают с ранее полученными по законам Кирхгофа.

Метод узловых напряжений (или потенциалов)

Оставим ранее принятые условные положительные направления токов в ветвях. Направления обходов контуров нам теперь не понадобятся.

Обозначим цифрами номера узлов. Выберем точку нулевого потенциала в узле номер 4, т. е. положим $\varphi_4 = 0$. Первый этап метода и главная его идея состоят в том, чтобы отыскать потенциалы остальных узлов: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Введем новые обозначения. Будем называть сумму значений проводимостей всех ветвей, подходящих к K -му узлу, *узловой проводимостью K -го узла* и обозначать G_{kk} .

Сумму значений проводимостей всех ветвей, соединяющих два узла с номерами k и m , будем обозначать G_{km} . Заметим, что в схемах нашего задания каждую пару узлов соединяет не более одной ветви, т. е. в нашем случае G_{km} будет представлена всего одним членом.

Кстати, для обозначения потенциалов в учебниках часто используют буквы латинского алфавита V и U . Будем и мы обозначать потенциалы буквой V , оставив U для обозначения напряжений. Тогда потенциалы узлов у нас будут обозначены V_1, V_2, V_3 и V_4 . Такая замена обозначений не носит принципиального характера. Просто при использовании ЭВМ написание букв греческого алфавита, как правило, тратится больше времени, а при использовании разных программных инструментов могут встретиться и другие сложности. Кроме того, нам понадобится понятие **узлового тока**, представляющего собой алгебраическую сумму произведений значений проводимостей ветвей, подходящих к узлу на ЭДС соответствующих ветвей. Если ЭДС направлена от узла, произведение входит в эту сумму со знаком минус. Обозначать узловые токи будем J .

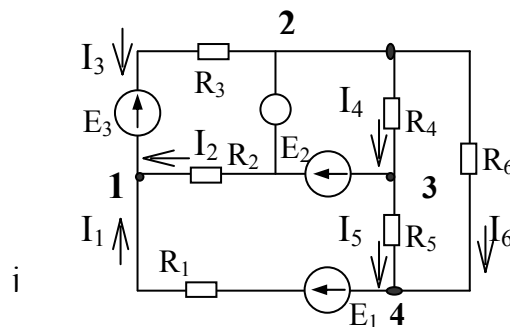


Рис.1.54

Итак:

$$G_{11} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \quad G_{22} := \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}, \quad G_{33} := \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5},$$

$$G_{12} := -\frac{1}{R_3}, \quad G_{23} := -\frac{1}{R_4}, \quad G_{31} := -\frac{1}{R_2}.$$

Заметим, что $G_{21} := G_{12}$, $G_{32} := G_{23}$, $G_{13} := G_{31}$.

$$\text{Узловые токи: } J_1 := E_1 \cdot \frac{1}{R_1} + E_2 \cdot \frac{1}{R_2} - E_3 \cdot \frac{1}{R_3}; \quad J_2 := E_3 \cdot \frac{1}{R_3}; \quad J_3 := -E_2 \cdot \frac{1}{R_2}.$$

Зададим произвольные начальные значения потенциалов для решения на МATHCAD методом итераций:

$$V_1 := 3, \quad V_2 := 2, \quad V_3 := 1, \quad V_4 := 0.$$

Запишем систему уравнений для узловых потенциалов:

Giver

$$G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 + G_{13} \cdot V_3 = J_1$$

$$G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 + G_{23} \cdot V_3 = J_2$$

$$G_{31} \cdot V_1 + G_{32} \cdot V_2 + G_{33} \cdot V_3 = J_3$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} := \text{find}(V_1, V_2, V_3); \quad \text{Значения: } \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.114 \\ 7.683 \\ 2.602 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы определили потенциалы узлов в вольтах.

Токи в ветвях будем искать по общей формуле

$$I_{km} = \frac{(E_{km} + V_k - V_m)}{R_{km}}.$$

Здесь E_{km} , V_k и R_{km} ток, ЭДС и сопротивление в ветви, соединяющей k -й и m -й узлы. При этом ЭДС E_{km} считается положительной, если направлена от k -го узла к m -му. В противном случае ее значение пишется со знаком «-». Если же ток оказался отрицательным, то это означает, что он переносит

положительные заряды от m -го узла к k -му (или отрицательные в направлении, обозначенном нами стрелкой).

$$\text{Итак: } I_1 = I_{41}, \quad I_2 = I_{31}, \quad I_3 = I_{21}, \quad I_4 = I_{24}, \quad I_5 = I_{34}, \quad I_6 = I_{24}.$$

$$I_1 := \frac{E_1 + V_4 - V_1}{R_1}, \quad I_2 := \frac{E_2 + V_3 - V_1}{R_2}, \quad I_3 := \frac{-E_3 + V_2 - V_1}{R_3},$$

$$I_4 := \frac{0 + V_2 - V_3}{R_4}, \quad I_5 := \frac{0 + V_3 - V_4}{R_5}, \quad I_6 := \frac{0 + V_2 - V_4}{R_6}.$$

Числовые значения, полученные по этим формулам:

$$V_1 = 17.114, \quad V_2 = 7.683, \quad V_3 = 2.602$$

$$I_1 = 1.289, \quad I_2 = -0.317, \quad I_3 = -0.972, \quad I_4 = 0.203, \quad I_5 = 0.52, \quad I_6 = 0.768.$$

Разумеется, здесь значения потенциалов приведены в вольтах, а значения силы токов в амперах.

Метод эквивалентного генератора

Метод состоит в том, что **вся цепь, к которой подключается заданная ветвь** (в нашем случае ветвь с сопротивлением R_6), заменяется всего двумя элементами: $R_{\text{эг}}$ и $E_{\text{эг}}$, которые называются *сопротивлением*, и *ЭДС эквивалентного генератора* соответственно. Если правильно подобрать эти элементы, то такая простейшая эквивалентная схема замещения цепи (рис. 1.55) ведет себя так же по отношению к выделенной ветви, как исходная, т. е. при тех же значениях сопротивления R_6 на нем выделится такое же значение напряжения и протечет такой же силы ток, как при включении R_6 в заданную исходную цепь.

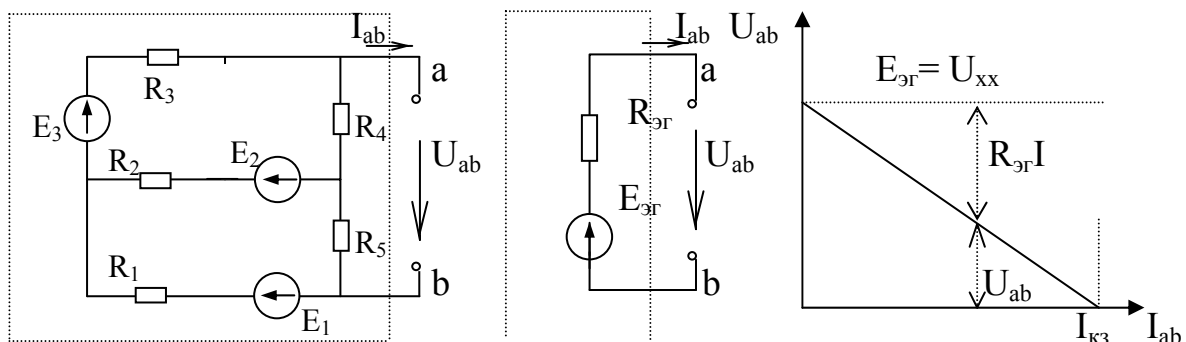


Рис. 1.55 Схема исходной цепи, схема простейшего эквивалентного генератора и график зависимости напряжения от тока $U_{ab}(I_{ab})$ для них

Пунктиром на схемах показаны преобразуемый участок цепи (слева) и преобразованный в эквивалентный генератор (см. средний рисунок).

В теории [1] показано, что при постоянных сопротивлениях и ЭДС зависимость между током и напряжением $U_{ab}(I_{ab})$ имеет линейный характер, график этой зависимости – прямая линия. Так, что достаточно найти две точки на этой прямой, как можно будет определиться со всей зависимостью $U_{ab}(I_{ab})$ целиком. Выберем такие значения R_6 , при которых нам будет легче рассчитать значения $E_{э2}$ и $R_{э2}$. Во-первых, это случай холостого хода, когда R_6 равно бесконечности или, попросту, обрыв шестой ветви. Ток $I_6 = I_{ab}$ при этом не пойдет вовсе (он будет равен нулю), а схема упростится до двухконтурной.

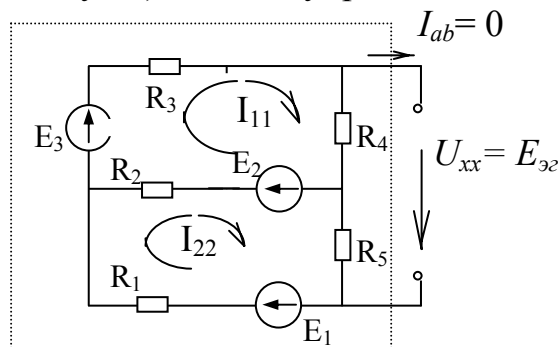


Рис. 1.56 Схема исходной цепи соответствующая режиму холостого хода

Как видим, при этом не будет тока и через сопротивление R_{ab} , или в нашем случае R_6 , напряжение U_{ab} станет равным $U_{xx} = E_{э2}$. Его-то мы и найдем из упрощенной схемы, превратившейся в двухконтурную. Уравнения, составленные по методу контурных токов для нее, выглядят так:

Giver

$$\begin{aligned} I_{11} \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - I_{22} \cdot R_2 &= E_3 + E_2 \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_1 + R_2 + R_5) &= E_1 - E_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{pmatrix} := \text{find}(I_{11}, I_{22}) \qquad \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.576 \\ 0.939 \end{pmatrix}$$

Отсюда ток $I_{11 \text{ хх}} = 0,576 \text{ А}$, а $I_{22 \text{ хх}} = 0,939 \text{ А}$.

Дополнительные индексы контурных токов хх показывают, что это не те токи, которые ранее протекали в этих контурах до исключения из исходной схемы сопротивления R_6 .

Значение напряжения холостого хода (или что то же $E_{э2}$) равно:

$$U_{ab \text{ хх}} = R_4 \cdot I_{11 \text{ хх}} + R_5 \cdot I_{22 \text{ хх}} = 25 \cdot 0,576 + 5 \cdot 0,939 = 19,1 \text{ В.}$$

Кстати, имея доступ к решению систем уравнений на ЭВМ, например в среде MATHCAD, Excel или Tcalc, можно воспользоваться заготовкой системы уравнений для расчета методом узловых напряжений, которая уже составлена и

даже записана на соответствующей странице и, положив в ней проводимость шестой ветви равной нулю, решить систему заново и получить значение $U_{ab_xx} = V_{2xx}$.

Итак, заменим $G_{22} := \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}$ на

$$G_{22} := \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Giver

$$G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 + G_{13} \cdot V_3 = J_1$$

$$G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 + G_{23} \cdot V_3 = J_2$$

$$G_{31} \cdot V_1 + G_{32} \cdot V_2 + G_{33} \cdot V_3 = J_3$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} := \text{find}(V_1, V_2, V_3) \quad ; \quad \text{значения: } \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.606 \\ 19.091 \\ 4.697 \end{pmatrix}$$

Как видим, V_2 xx стало равным 19,1 В, т. е. то же, что и рассчитанное предыдущим способом.

$R_{э2}$ можно рассчитать как сопротивление обведенной пунктиром части исходной схемы между точками а и б (или что то же между точками 2 и 4 в обозначениях, использованных в методе узловых потенциалов).

Для этого надо положить равными нулю все ЭДС и, например, методом преобразования рассчитать сопротивление между точками а и б получившейся мостовой схемы, преобразовав предварительно треугольник сопротивлений R_2, R_3, R_4 в эквивалентную звезду.

Мы же для примера воспользуемся расчетом режима короткого замыкания, т. е. положим $R_6 = 0$ и найдём значение силы тока через него, в этом случае $I_6 \text{ кз} = I_{33} \text{ кз}$.

Итак:

$$R_{33} := R_4 + R_5$$

Giver

$$I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11}$$

$$I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22}$$

$$I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33}$$

$$I_{kk} := \text{find}(I_{11}, I_{22}, I_{33}) \quad I_{kk} = \begin{pmatrix} 1.524 \\ 1.238 \\ 1.286 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Решив подновленную систему (вернее, с подновленными данными), получаем для $I_{33\text{кз}}$ значение 1,286 А.

Такой же силы ток короткого замыкания должен проходить и в упрощенной цепи с эквивалентным генератором при $R_6 = 0$, если она действительно эквивалентна исходной. Но в этом случае

$$I_{6\text{кз}} = \frac{E_{\text{эз}}}{R_{\text{эз}}}, \quad \text{откуда } R_{\text{эз}} = \frac{E_{\text{эз}}}{I_{6\text{кз}}} = \frac{19,1}{1,286} = 14,85 \text{ Ом.}$$

Теперь, подставив найденные значения $E_{\text{эз}}$ и $R_{\text{эз}}$ в выражение для тока в преобразованной цепи, найдем окончательно: $I_6 = \frac{E_{\text{эз}}}{R_{\text{эз}} + R_6}$.

$$I_6 := \frac{19,1}{14,85 + 10} \quad I_6 = 0,76$$

Итак, отличие от решения методом контурных токов или по законам Кирхгофа только в последнем знаке.

Конечно, предложенные вычисления I_6 методом эквивалентного генератора могут привести на мысль: «А зачем этот метод нужен, в чем же здесь выигрыш?»

Ведь нам пришлось ради одного значения силы тока рассчитывать по ходу дела три режима цепи: холостой ход, короткое замыкание и только потом реальный ток в шестой ветви! Здесь надо сказать, что метод эквивалентного генератора выгоден не для одноразового расчета, как это задано в качестве учебного примера в этой РГР.

Он выгоден для анализа поведения цепи при различных сопротивлениях R_6 .

Ведь зная простейшую схему замещения реальной цепи (зная $R_{\text{эз}}$ и $E_{\text{эз}}$), по этой преобразованной схеме значительно легче предвидеть реакцию цепи на изменение R_6 , а при случае и многократно просчитать вручную $I_6(R_6)$. Это тем более удобно, важно и выгодно для цепей переменного тока, где расчет исходной сложной цепи достаточно громоздок.

Сравним результаты, полученные разными методами (см. таблицу 1.2).

Таблица 1.2

$I_1, \text{ А}$	$I_2, \text{ А}$	$I_3, \text{ А}$	$I_4, \text{ А}$	$I_5, \text{ А}$	$I_6, \text{ А}$	Метод
1,289	-0,317	-0,972	0,203	0,520	0,768	Узловых напряжений
1,289	-0,317	-0,972	0,204	0,521	0,768	Контурных токов
1,289	-0,317	-0,972	0,203	0,520	0,768	Законов Кирхгофа

Пример 2

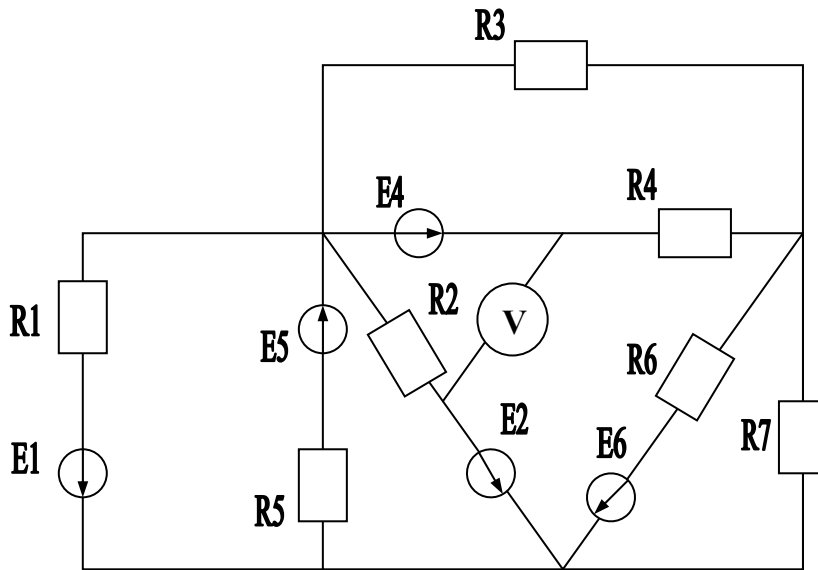


Рис. 1.56. Исходная схема электрической цепи

Параметры элементов схемы: $R_1=10 \text{ Ом}$, $R_2=8 \text{ Ом}$,
 $R_3=20 \text{ Ом}$, $R_4=5 \text{ Ом}$, $R_5=25 \text{ Ом}$, $R_6=50 \text{ Ом}$, $R_7=40 \text{ Ом}$,
 $E_1=50 \text{ В}$, $E_2=40 \text{ В}$, $E_4=80 \text{ В}$, $E_5=120 \text{ В}$, $E_6=20 \text{ В}$.

Составление системы уравнений по законам Кирхгофа

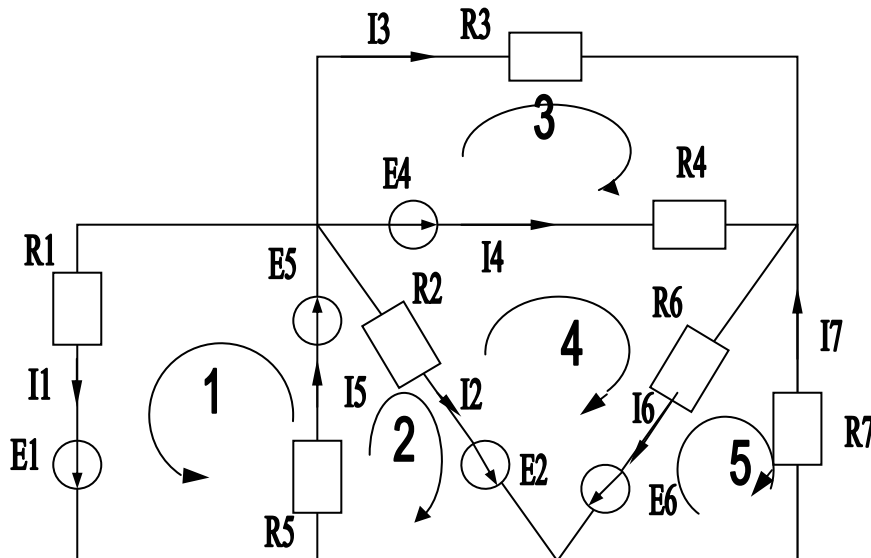


Рис. 1.57. Схема электрической цепи после подготовки ее к составлению уравнений по законам Кирхгофа

Прежде чем приступить к составлению уравнений по законам Кирхгофа, надо обязательно указать выбранные направления для токов, которые будем считать положительными и направления обходов контуров (см. рис. 1.57).

В этом примере не выдерживался принцип однообразия выбора обхода контуров. Часть из них обходятся по часовой, часть против часовой стрелки. Более того, в некоторых ветвях номера токов не совпадают с номерами сопротивлений и ЭДС. Всё это допустимо, однако заставляет внимательней следить за правильностью составления уравнений, что студент, видимо, почувствует сам, следя за изложением, и наученный этим опытом будет изначально стараться избегать таких выборов.

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 I_1 & +I_2 & +I_3 & +I_4 & -I_5 & & & = 0 \\
 & & & I_3 & +I_4 & & -I_6 & +I_7 = 0 \\
 R_1 I_1 & & & & & +R_5 I_5 & & = E_1 + E_5 \\
 & R_2 I_2 & & & & +R_5 I_5 & & = E_2 + E_5 \\
 & & R_3 I_3 & -R_4 I_4 & & & & = -E_4 \\
 -R_2 I_2 & & & +R_4 I_4 & & +R_6 I_6 & & = -E_2 + E_4 + E_6 \\
 & & & & & -R_6 I_6 & -R_7 I_7 & = -E_5
 \end{array}$$

Система оказалась довольно громоздка, однако решение ее сразу дает значения искомых токов в ветвях. Вид у нее незаполненный из-за того, что члены, содержащие одинаковые неизвестные, записаны в разных уравнениях друг под другом.

В случае отсутствия члена с соответствующим неизвестным, оставлялось свободное место. Так потом легче составлять матрицу из коэффициентов и свободных членов: сразу видно, где проставлять нули.

Если подставить в нее числовые значения сопротивлений и ЭДС, в том числе и нулевые она будет выглядеть так:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 1 \cdot I_1 & + 1 \cdot I_2 & + 1 \cdot I_3 & + 1 \cdot I_4 & - 1 \cdot I_5 & + 0 \cdot I_6 & + 0 \cdot I_7 & = 0 \\
 0 \cdot I_1 & + 0 \cdot I_2 & + 1 \cdot I_3 & + 1 \cdot I_4 & + 0 \cdot I_5 & - 1 \cdot I_6 & + 1 \cdot I_7 & = 0 \\
 10 \cdot I_1 & + 0 \cdot I_2 & + 0 \cdot I_3 & + 0 \cdot I_4 & + 25 \cdot I_5 & + 0 \cdot I_6 & + 0 \cdot I_7 & = 50 + 120 \\
 0 \cdot I_1 & + 8 \cdot I_2 & + 0 \cdot I_3 & + 0 \cdot I_4 & + 25 \cdot I_5 & + 0 \cdot I_6 & + 0 \cdot I_7 & = 40 + 120 \\
 0 \cdot I_1 & + 0 \cdot I_2 & + 20 \cdot I_3 & - 5 \cdot I_4 & + 0 \cdot I_5 & + 0 \cdot I_6 & + 0 \cdot I_7 & = -80 \\
 0 \cdot I_1 & - 8 \cdot I_2 & + 0 \cdot I_3 & + 5 \cdot I_4 & + 0 \cdot I_5 & + 50 \cdot I_6 & + 0 \cdot I_7 & = -40 + 80 + 20 \\
 0 \cdot I_1 & + 0 \cdot I_2 & + 0 \cdot I_3 & + 0 \cdot I_4 & + 0 \cdot I_5 & - 50 \cdot I_6 & - 40 \cdot I_7 & = -120
 \end{array}$$

Матрица коэффициентов и свободных членов выглядит так:

1	1	1	1	-1	0	0	0
0	0	1	1	0	-1	1	0
10	0	0	0	25	0	0	170
0	8	0	0	25	0	0	160
0	0	20	-5	0	0	0	-80
0	-8	0	5	0	50	0	60
0	0	0	0	0	-50	-40	-120

Первые семь столбцов этой матрицы составлены из коэффициентов при неизвестных токах, а последний столбец из правых частей (свободных членов) уравнений представленной выше системы.

Главный определитель системы, полученный из этой таблицы без последнего столбца, равен $\Delta = -35\,770\,000$.

Остальные по порядку $\Delta_1 = -84\,690\,000$, $\Delta_2 = -61\,150\,000$, $\Delta_3 = 101\,740\,000$, $\Delta_4 = -165\,280\,000$, $\Delta_5 = -209\,360\,000$, $\Delta_6 = -36\,180\,000$, $\Delta_7 = 27\,340\,000$.

Напомним, что остальные определители получаются из главного определителя путем подстановки столбца свободных членов вместо столбца с номером, равным номеру определителя.

Например, таблица для вычисления Δ_1 выглядит так:

0	1	1	1	1	-1	0	0
0	0	0	1	1	0	-1	1
170	10	0	0	0	25	0	0
160	0	8	0	0	25	0	0
-80	0	0	20	-5	0	0	0
60	0	-8	0	5	0	50	0
-20	0	0	0	0	0	-50	-40

Вычисляем токи в ветвях:

$$I_1 = \Delta_1/\Delta = 2,367, \quad I_2 = \Delta_2/\Delta = 1,709, \quad I_3 = \Delta_3/\Delta = -2,845,$$

$$I_4 = \Delta_4/\Delta = 4,621, \quad I_5 = \Delta_5/\Delta = 5,853, \quad I_6 = \Delta_6/\Delta = 1,011, \quad I_7 = \Delta_7/\Delta = -0,764.$$

Составление системы уравнений по методу контурных токов

Воспользуемся уже имеющимися стрелками в схеме (рис. 1.57) для обозначения условных положительных направлений токов в ветвях и обходов контуров. Будем считать, что в каждом из контуров в направлении обхода течет свой контурный ток: I_{11} в контуре 1; I_{22} в контуре 2 и т. д.

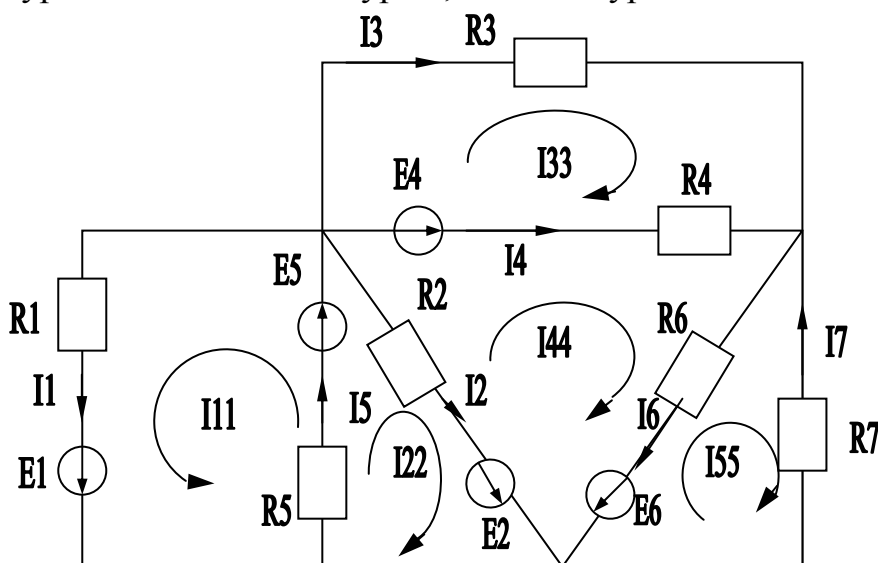


Рис. 1.58. Схема электрической цепи, подготовленная для составления системы уравнений по методу контурных токов

Система уравнений относительно контурных токов выглядит так:

$$\begin{aligned}
 R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} &= E_{11} \\
 R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{24}I_{44} &= E_{22} \\
 R_{33}I_{33} + R_{34}I_{44} &= E_{33} \\
 R_{42}I_{22} + R_{43}I_{33} + R_{44}I_{44} + R_{45}I_{55} &= E_{44} \\
 R_{54}I_{44} + R_{55}I_{55} &= E_{55},
 \end{aligned}$$

где собственные сопротивления контуров равны

$$R_{11}=R_1+R_5, \quad R_{22}=R_2+R_5, \quad R_{33}=R_3+R_4, \quad R_{44}=R_2+R_4+R_6, \quad R_{55}=R_6+R_7.$$

Общие сопротивления смежных контуров равны

$$R_{12}=R_{21}=R_5; \quad R_{24}=R_{42}=-R_2; \quad R_{34}=R_{43}=-R_4; \quad R_{45}=R_{54}=-R_6.$$

Контурные 1-й и 3-й; 1-й и 4-й; 1-й и 5-й, а также 2-й и 3-й; 2-й и 5-й; 3-й и 5-й не имеют общих сопротивлений, поэтому не являются смежными, и в уравнениях пустуют места, предназначенные для членов с соответствующими общими сопротивлениями.

Сразу заметим, что при одинаковом выборе направлений контурных токов (все по часовой стрелке или все против часовой стрелки) вероятность сделать ошибку в знаке общих сопротивлений смежных контуров уменьшается.

Контурные ЭДС равны:

$$E_{11}=E_1+E_5; \quad E_{22}=E_2+E_5; \quad E_{33}=-E_4; \quad E_{44}=-E_2+E_4+E_6; \quad E_{55}=-E_6.$$

Как видим, система уравнений оказалась менее громоздкой, однако ее решение дает значение пока только контурных токов. После этого предстоит дополнительная работа по отысканию значений токов в ветвях. Так, I_1 состоит только из контурного тока I_{11} ; I_5 — из I_{11} и I_{22} , т. е. $I_5=I_{11}+I_{22}$, а значение силы тока I_4 представляет алгебраическую сумму значений силы токов I_{44} и I_{33} : $I_4=I_{44}-I_{33}$ и т. д. (следите за знаками).

Решение задачи методом узловых напряжений

Оставив ранее принятые условные положительные направления токов в ветвях, обозначим цифрами узлы цепи, отличающиеся потенциалами.

Точка «а» имеет, очевидно, потенциал узла 3 и не выделяется нами в особый узел, потенциал которого надо искать, хотя к ней подходит более двух проводников. Точка «b» имеет отличный от них потенциал, но не является узлом. Потенциал одного из узлов принимаем равным нулю.

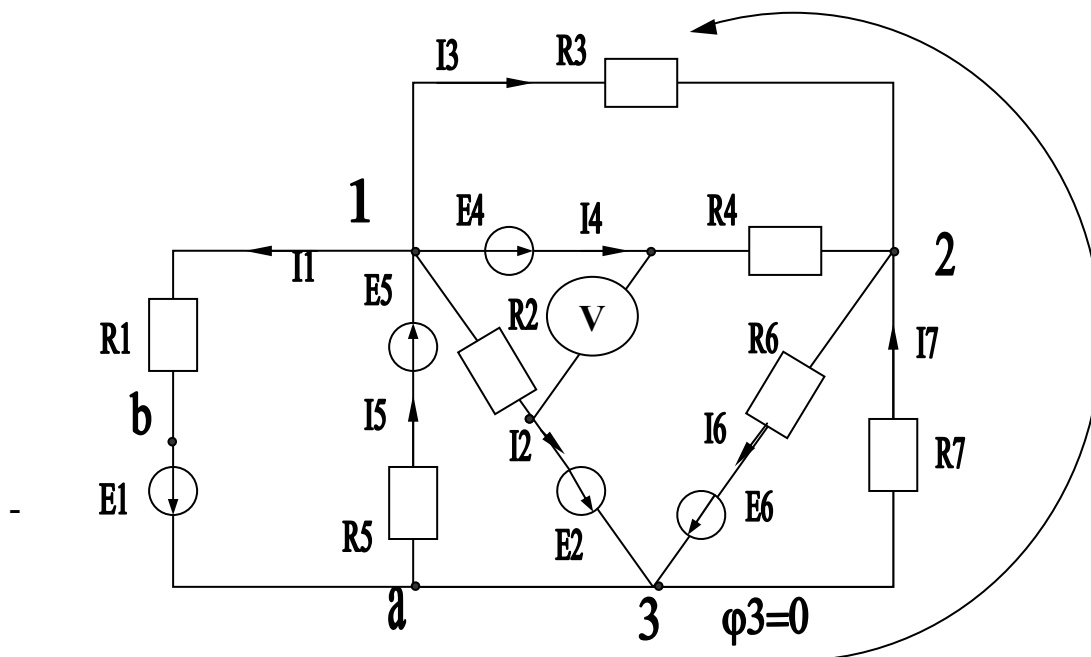


Рис. 1.59. Схема электрической цепи

В нашем случае выбор (произвольно) пал на узел 3, составим систему уравнений

$$\begin{aligned} g_{11}\varphi_1 + g_{12}\varphi_2 &= J_1, \\ g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 &= J_2, \end{aligned}$$

проводимости, входящие в уравнения, равны:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}; \\ g_{22} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}; \\ g_{12} = g_{21} &= -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right). \end{aligned}$$

Узловые токи равны:

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_5} - \frac{E_3}{R_2} - \frac{E_4}{R_4}; \\ J_2 &= \frac{E_4}{R_4} - \frac{E_5}{R_6}. \end{aligned}$$

Как видим, слагаемые, содержащие ЭДС, направленные от соответствующего узла, входят в сумму со знаком «минус», к узлу – со знаком «плюс».

Система уравнений в числовой форме имеет вид:

$$\begin{aligned} 0,515\varphi_1 - 0,3\varphi_2 &= -21,2, \\ -0,3\varphi_1 + 0,293\varphi_2 &= 15,6, \end{aligned}$$

где

$$g_{11} = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = 0,515 \text{ [Ом}^{-1}\text{]},$$

$$g_{22} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50} + \frac{1}{40} = 0,295 \text{ [Ом}^{-1}\text{]},$$

$$g_{12} = g_{21} = -\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{5}\right) = -0,25 \text{ [Ом}^{-1}\text{]},$$

$$J_1 = \frac{50}{10} + \frac{120}{25} - \frac{40}{8} - \frac{80}{5} = 21,2 \text{ [A]},$$

$$J_2 = \frac{80}{5} - \frac{20}{50} = 15,6 \text{ [A]}.$$

Решение системы методом определителей дает значение потенциала узлов 1 и 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,515 & -0,25 \\ -0,25 & 0,295 \end{vmatrix} = 0,0894; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -21,2 & -0,25 \\ 15,6 & 0,295 \end{vmatrix} = -2,354; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,515 & -21,2 \\ -0,25 & 15,6 \end{vmatrix} = 2,734;$$

$$\varphi_1 = \Delta_1 / \Delta = -26,33 \text{ В}; \quad \varphi_2 = \Delta_2 / \Delta = 30,58 \text{ В}.$$

Значения силы токов в ветвях найдем по закону Ома с учетом того, что $\varphi_3 = 0$:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_1}{R_1} = \frac{-26,33 - 0 + 50}{10} = 2,367 \text{ [A]};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_2}{R_2} = \frac{-26,33 - 0 + 40}{8} = 1,709 \text{ [A]};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_3}{R_{31}} = \frac{-26,33 - 30,58 + 0}{20} = -2,845 \text{ [A]};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_4}{R_4} = \frac{-26,33 - 30,58 + 80}{50} = 4,618 \text{ [A]}.$$

Остальные значения силы токов определяются аналогично. Результаты представлены в следующей таблице.

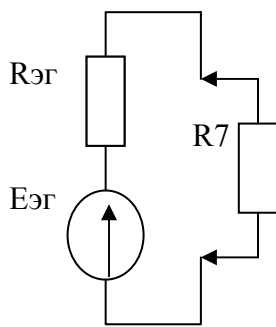
Таблица 1.3

I_1, A	I_2, A	I_3, A	I_4, A	I_5, A	I_6, A	I_7, A	Метод
2,367	1,709	-2,845	4,618	5,853	1,011	-0,763	Узловых напряжений
2,368	1,709	-2,845	4,621	5,853	1,012	-0,764	Контурных токов
2,368	1,709	-2,845	4,621	5,853	1,011	-0,764	Законов Кирхгофа

Метод эквивалентного генератора

Покажем на примере вычисления значения силы тока I_7 суть метода эквивалентного генератора применительно к этой схеме.

Напомним, что вся цепь за исключением самого сопротивления R_7 заменяется цепочкой, состоящей из одного сопротивления $R_{ЭГ}$ и идеальной ЭДС $E_{ЭГ}$, которые называются *внутренним сопротивлением* и *ЭДС эквивалентного генератора*. Если мы их правильно



подберем, то эта цепочка, этот активный двухполюсник, будет вести себя по отношению к сопротивлению R_7 точно так же, как и исходная схема, то есть при одинаковых значениях сопротивления R_7 , включенного в исходную цепь и в цепь, представленную эквивалентным генератором, на нем будет то же самое напряжение и через него будет протекать тот же ток. В этом смысле такую

упрощенную схему замещения и называют *эквивалентным генератором*, то есть генератором, эквивалентным исходной схеме. Однако поскольку новая схема выглядит проще, на ней удобней рассматривать зависимость режима сопротивления R_7 (тока и напряжения на нем) от его величины.

Определение показания вольтметра

Для определения показания вольтметра снова удобней всего воспользоваться вторым законом Кирхгофа. Выберем (см. рис. 1.59) контур с минимальным числом элементов, одним из которых является вольтметр. В нашем случае это контур, образованный элементами R_2, E_4, V . Напряжение на вольтметре обозначим U_V и, выбрав направление обхода контура, например, по часовой стрелке, составим уравнение:

$$U_V - I_2 R_2 = E_4, \quad \text{откуда} \quad U_V = E_4 + I_2 R_2 = 80 \text{ В} + 1,709 \text{ А} \cdot 8 \text{ Ом} = 93,67 \text{ В}.$$

Надо заметить, что мы получим значение напряжения на вольтметре, совпадающее с направлением обхода контура, т. е. от клеммы («+» на вольтметре), присоединенной к E_4 , к клемме, подключенной к R_2 («-» на

вольтметре). Практически в случае $U_V < 0$ клеммы вольтметра (с нулем в начале шкалы) надо поменять местами, иначе стрелка уйдет влево за 0.

Проверка баланса мощности в схеме

Мощность источников $P_{ист}$ равна:

$$P_{ист} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_4 I_4 + E_5 I_5 + E_6 I_6 = 50 \cdot 2,367 + 40 \cdot 1,709 + 80 \cdot 4,62 + 120 \cdot 5,853 + 20 \cdot 1,011 = 1279 \text{ [Вт]}.$$

Значение мощности, потребляемой электрической цепью, равно:

$$P_{номр} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 + R_7 I_7^2 = 10 \cdot 2,367^2 + 8 \cdot 1,709^2 + 20 \cdot 2,845^2 + 5 \cdot 4,62^2 + 25 \cdot 5,853^2 + 50 \cdot 1,011^2 + 40 \cdot 0,764^2 = 1279 \text{ [Вт]}.$$

Баланс выполняется идеально.

Построение потенциальной диаграммы

На потенциальной диаграмме по оси абсцисс откладывается накапливающаяся сумма значений сопротивлений, встречающихся при обходе внешнего контура по избранному направлению. По оси ординат – значения потенциалов, соответствующих этим сопротивлениям.

Выберем направление обхода против часовой стрелки и начнем обход с узла 3 (рис. 1.59). Так как потенциал этой точки принят нами за ноль, то на диаграмме ему будет соответствовать начало координат (см. рис. 1.60).

При обходе контура первым нам встречается сопротивление R_7 , напряжение на котором, создаваемое током I_7 , равно $I_7 R_7 = -0,764 \text{ А} \cdot 40 \text{ Ом} = -30,56 \text{ В}$. Напряжение $U_{32} = \varphi_3 - \varphi_2$ оказалось отрицательным, это означает, что потенциал φ_2 больше, чем φ_3 , на $-30,56 \text{ В}$. Откладываем по оси абсцисс величину R_7 , а по оси ординат $\varphi_2 = \varphi_3 - U_{32} = 0 \text{ В} - (-30,56 \text{ В}) = 30,56 \text{ В}$. Из схемы (рис. 1.59) видно, что $\varphi_1 = \varphi_2 + I_3 R_3 = 30,56 \text{ В} + (-2,845 \text{ А} \cdot 20 \text{ Ом}) = -26,34 \text{ В}$. Добавляем по оси абсцисс к R_7 величину $R_3 = 20 \text{ Ом}$ и находим на диаграмме точку, соответствующую узлу 1. При дальнейшем обходе контура нам встречается сопротивление R_1 значением десять Ом. Добавляем по оси абсцисс еще 10 Ом и приходим в точку, соответствующую 70 Ом по оси сопротивлений от начала координат. Потенциал точки «b» находим из равенства:

$$U_{1-b} = \varphi_1 - \varphi_b = I_1 R_1,$$

откуда $\varphi_b = \varphi_1 - I_1 R_1 = -26.34 \text{ В} - 2,368 \text{ А} \cdot 10 \text{ Ом} = -50,02 \text{ В}$.

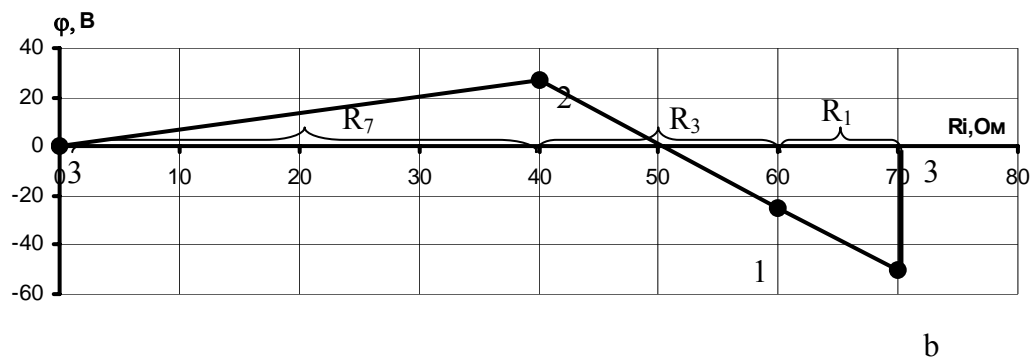


Рис. 1.60. Потенциальная диаграмма

Отметим на диаграмме точку, соответствующую точке «b» цепи. И, наконец, чтобы замкнуть путь по внешнему контуру, нам надо пройти еще один элемент: идеальный источник ЭДС E_1 , который изменяет потенциал в направлении стрелки от точки «b» к точке «a» или то же к точке «3» на величину $E_1 = 50 \text{ В}$ и не имеет внутреннего сопротивления, поэтому $\varphi_3 = \varphi_b + E_1 = -50,02 \text{ В} + 50 \text{ В} = -0,02 \text{ В}$. Вернувшись в точку 3, мы должны были получить снова $\varphi_3 = 0$, однако при таких многоступенчатых расчетах набежала ошибка округления. Обозначим ее $\Delta\varphi_3 = 0,02 \text{ В}$. Величина этой погрешности при правильных расчетах мала и в нашем случае составляет менее 0,025% от интервала потенциалов, показанных на диаграмме (рис. 1.60). Получим значение относительной ошибки: $\Delta\varphi_3 \cdot 100\% / (\varphi_{max} - \varphi_{min}) = \Delta\varphi \cdot 100\% / (\varphi_2 - \varphi_b) = 0,02 \cdot 100\% / (30,56 - (-50,02)) = 0,0248\%$.

ЗАДАЧА 2. РАСЧЕТ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1. По номеру варианта найти в таблице 2.1 схему электрической цепи и параметры ее элементов. Частоту колебаний ЭДС принять равной $f = 50 \text{ Гц}$.
2. Найти все токи методом преобразования или любым из использованных в предыдущей задаче.
3. Построить топографическую диаграмму потенциалов, совмещенную с векторной диаграммой токов.
4. Проверить баланс активной и реактивной мощностей.
5. Найти показания вольтметра и ваттметра.

Таблица 2.1

Номера		Е,В	С1, мкФ	С2, мкФ	С3, мкФ	L1, мГн	L2, мГн	L3, мГн	R1, Ом	R2, Ом	R3, Ом
Вар.	Рис.										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2.1	150	637	300	-	-	-	15,9	2	3	4
2	2.2	100	-	-	100	15,9	9	15,9	8	3	4
3	2.3	120	637	-	-	-	15,9	15,9	8	3	4
4	2.4	200	-	300	-	15,9	-	15,9	8	3	4
5	2.5	220	637	-	100	-	47,7	-	8	-	4
6	2.6	100	100	300	-	15,9	-	115	10	-	10
7	2.7	120	-	-	100	15,9	-	115	-	4	100
8	2.8	200	-	159	-	-	-	115	10	4	100
9	2.9	220	-	318	-	15,9	-	-	10	4	100
10	2.10	50	-	637	-	15,	-	6,37	5	-	8
11	2.11	100	637	-	100	-	15,7	-	-	10	8
12	2.12	120	-	300	100	31,8	-	-	5	-	8
13	2.13	200	-	-	100	31,8	-	-	5	10	8
14	2.14	220	637	-	200	-	15,9	-	5	10	8
15	2.15	150	100	-	200	-	15,9	-	10	2	10
16	2.16	100	-	1600	200	31,8	-	-	-	8	10
17	2.17	120	100	-	200	-	15,9	-	10	8	10
18	2.18	200	637	-	200	-	31,8	-	-	8	10
19	2.19	220	-	1600	-	31,8	-	95	10	8	-
20	2.20	50	-	159	-	31,8	-	95	15	10	10
21	2.21	100	-	159	200	15,9	-	-	15	-	10
22	2.22	120	-	159	200	15,9	-	-	-	10	20
23	2.23	200	637	159	200	-	31,8	95	15	10	20
24	2.24	220	637	159	-	-	-	95	-	10	20
25	2.25	150	-	159	-	25	-	95	6	10	20
26	2.26	100	637	159	637	-	-	95	6	-	20
27	2.27	100	-	159	-	25	-	95	6	4	-
28	2.28	200	-	159	637	25	-	95	6	-	20
29	2.29	220	637	-	637	-	9	-	6	-	20
30	2.30	50	318	637	-	-	-	31,8	-	10	40
31	2.31	100	318	-	300	-	-	31,8	-	10	10
32	2.32	120	-	-	300	19,1	15,9	31,8	40	-	10
33	2.33	200	318	-	300	-	15,9	31,8	10	10	40
34	2.34	220	318	-	300	-	15,9	31,8	-	10	10
35	2.35	50	-	318	-	19,5	-	31,8	8	10	4
36	2.36	100	637	-	200	-	31,8	95	8	-	4
37	2.37	150	637	-	200	-	31,8	-	8	10	4
38	2.38	200	-	318	200	15,9	-	95	8	-	4
39	2.39	220	-	-	200	15,9	31,8	95	8	-	4
40	2.40	50	637	-	200	-	31,8	95	4	40	40
41	2.41	100	-	318	200	9,55	-	-	4	40	4
42	2.42	120	500	-	-	-	15,9	95	4	-	4
43	2.43	200	500	-	159	-	15,9	-	40	10	40
44	2.44	220	-	318	159	9,55	-	95	-	10	40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	2.45	50	500	159	159	-	-	31,8	35	20	40
46	2.46	100	500	-	-	-	15,9	31,8	35	-	40
47	2.47	120	-	159	-	15,9	-	31,8	35	20	80
48	2.48	200	318	318	159	-	-	31,8	35	20	80
49	2.49	220	318	-	159	-	31,8	31,8	35	20	80
50	2.50	50	-	318	-	15,9	-	31,8	5	10	80

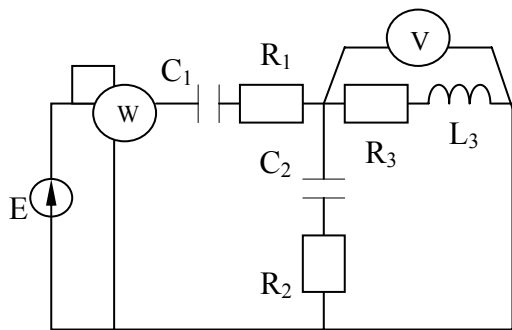


Рис. 2.1

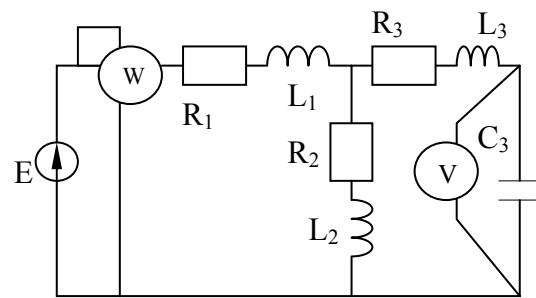


Рис. 2.2

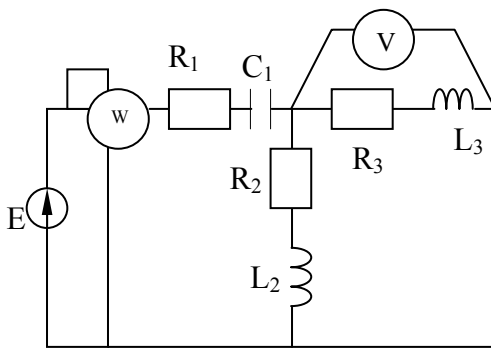


Рис. 2.3

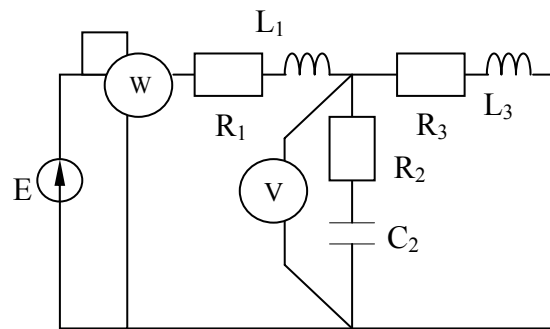


Рис. 2.4

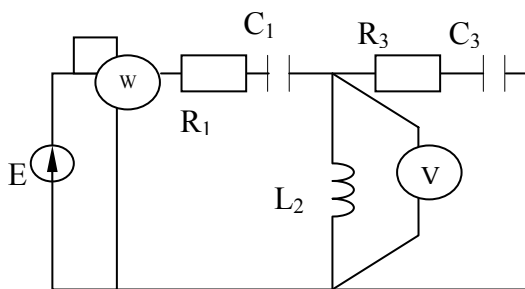


Рис. 2.5

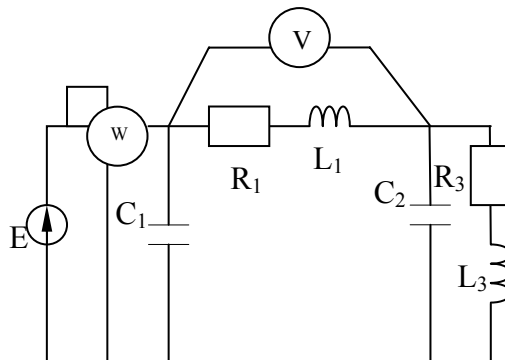


Рис. 2.6

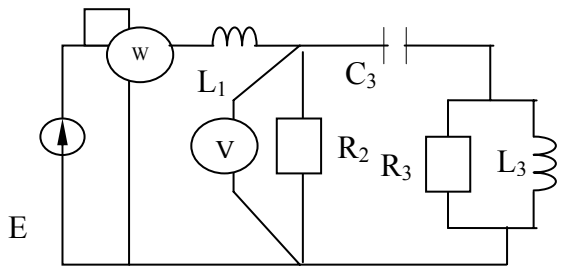


Рис. 2.7

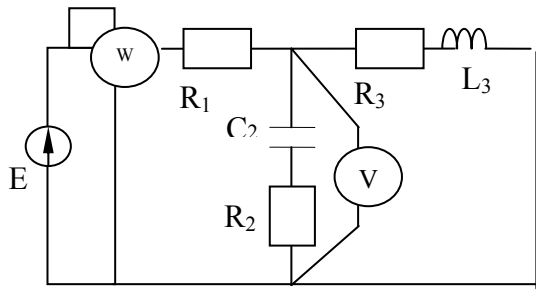


Рис. 2.8

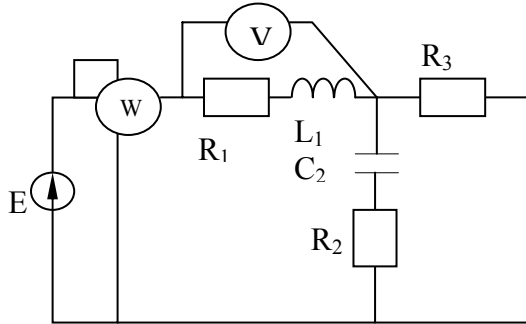


Рис.2.9

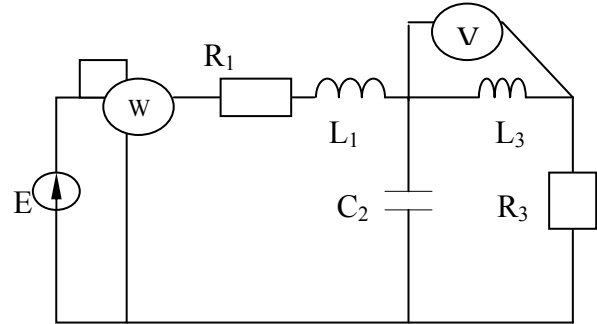


Рис.2.10

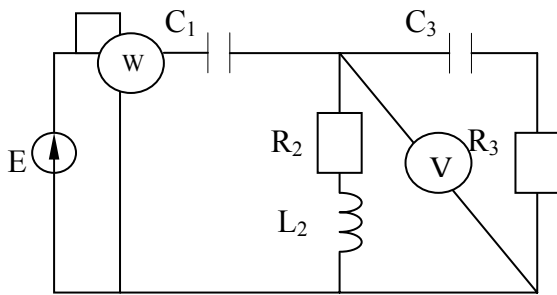


Рис. 2.11

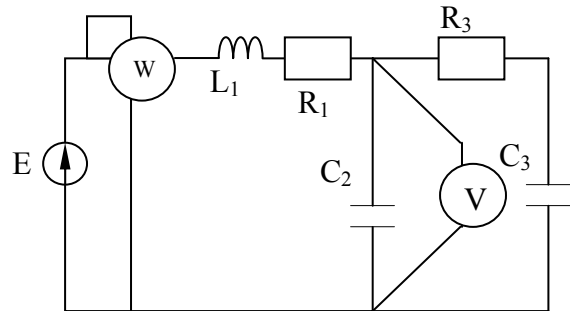


Рис. 2.12

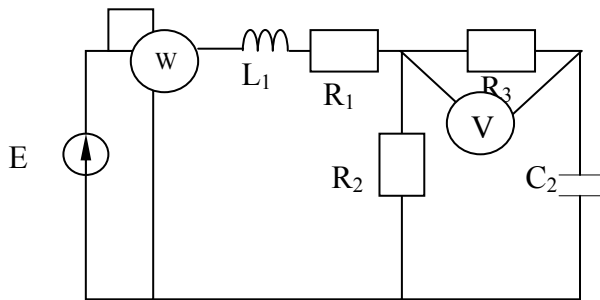


Рис. 2.13

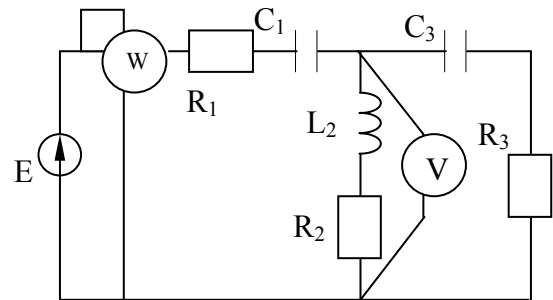


Рис. 2.14

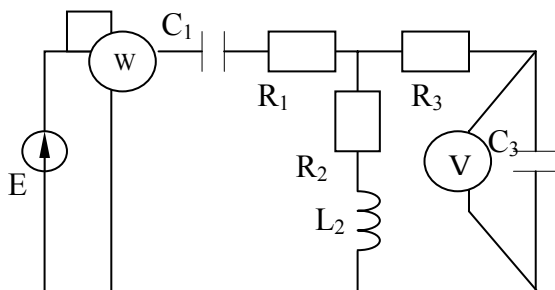


Рис. 2.15

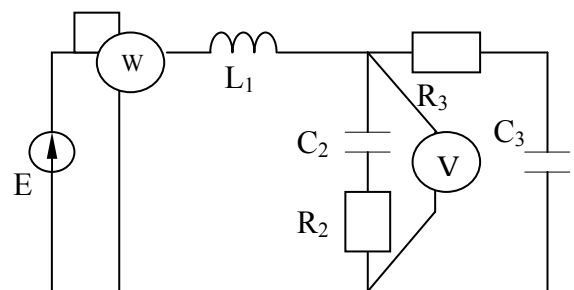


Рис. 2.16

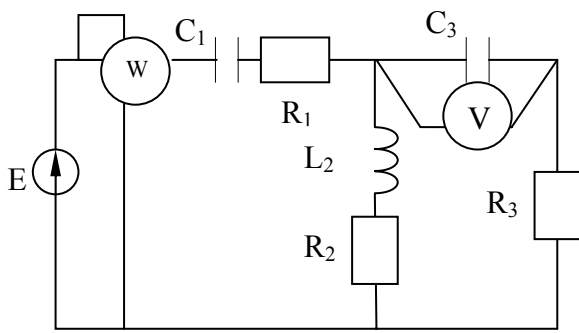


Рис. 2.17

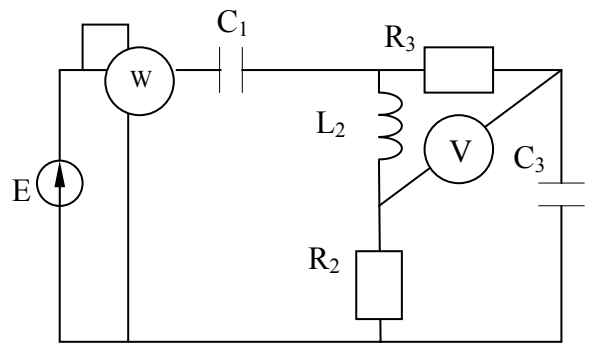


Рис. 2.18

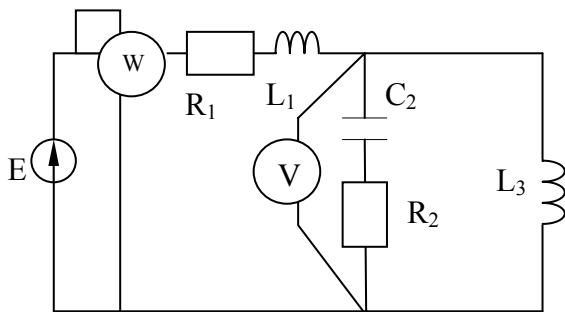


Рис. 2.19

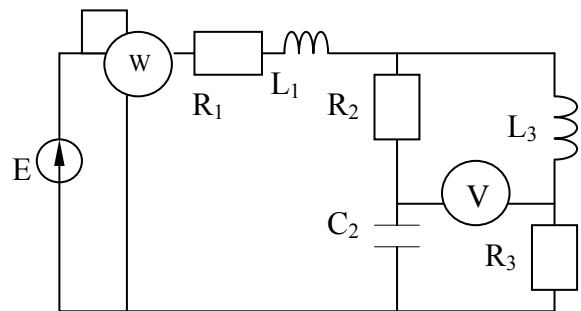


Рис. 2.20

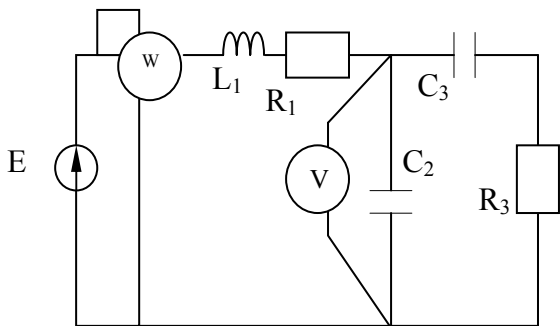


Рис. 2.21

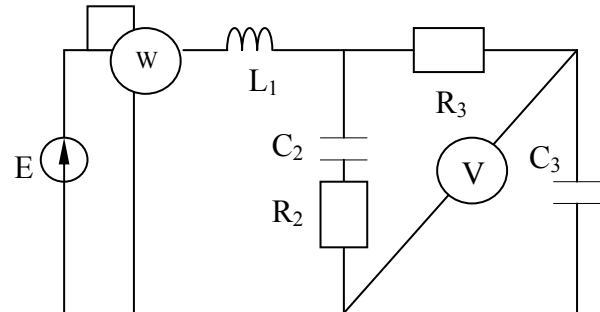


Рис. 2.22

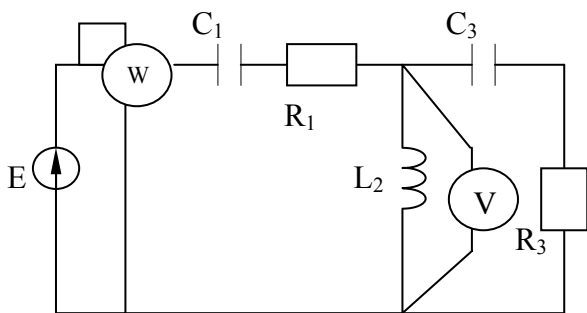


Рис. 2.23

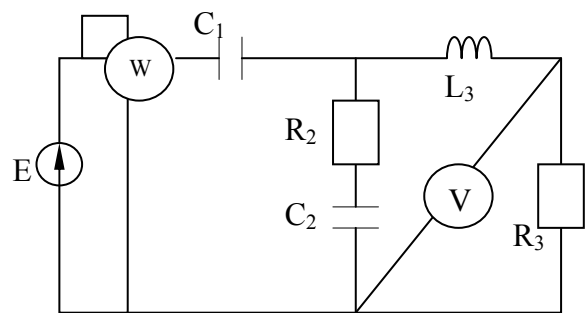


Рис. 2.24

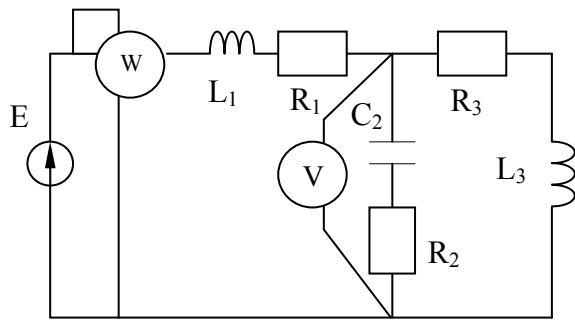


Рис. 2.25

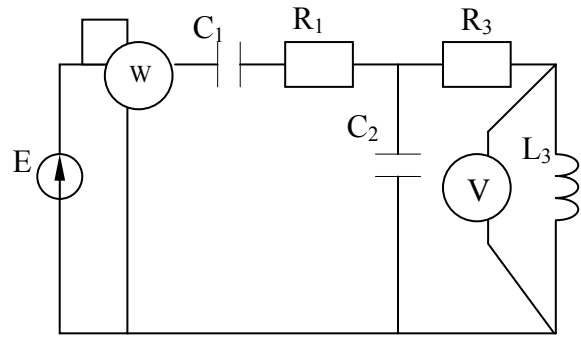


Рис. 2.26

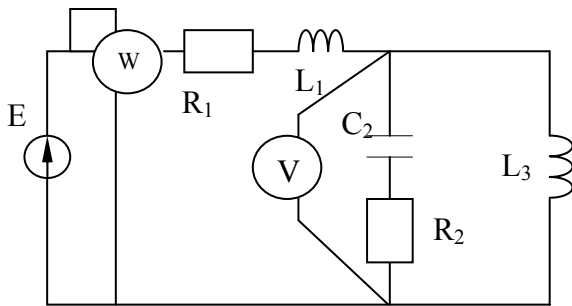


Рис. 2.27

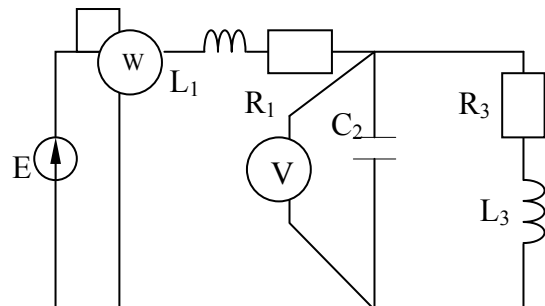


Рис. 2.28

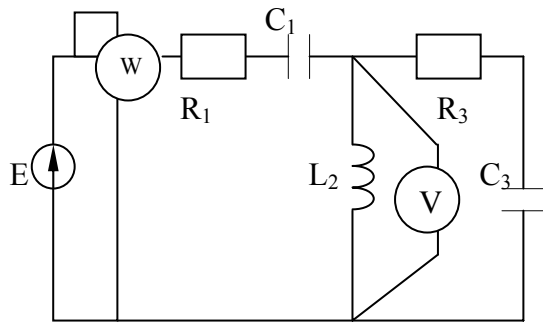


Рис. 2.29

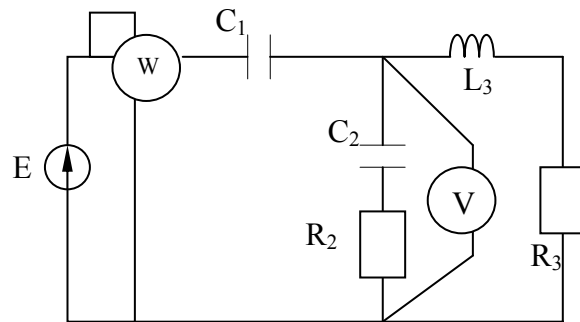


Рис. 2.30

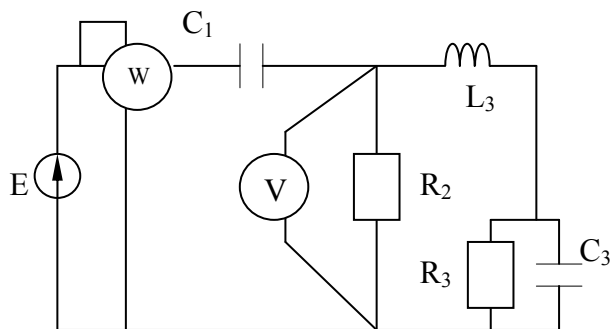


Рис. 2.31

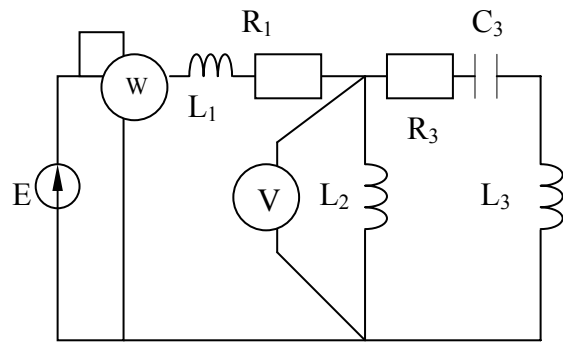


Рис. 2.32

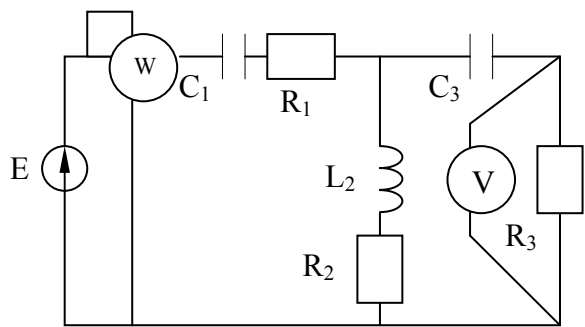


Рис. 2.33

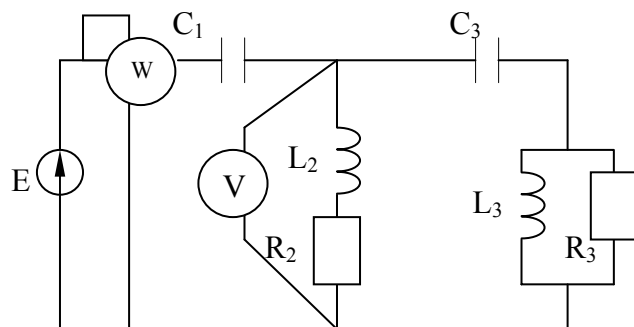


Рис. 2.34

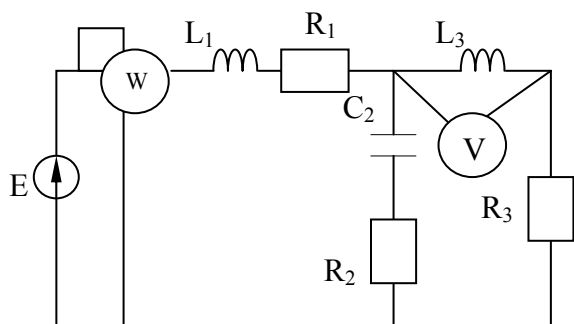


Рис. 2.35

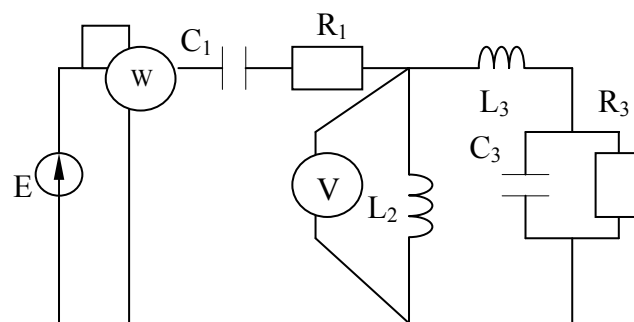


Рис. 2.36

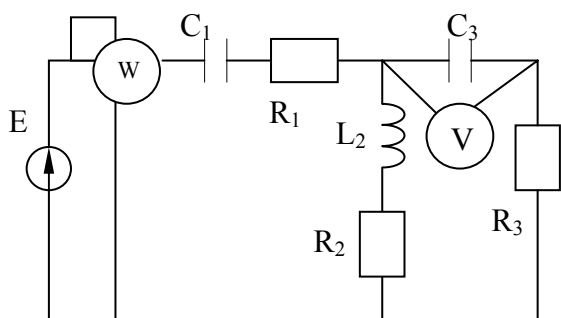


Рис. 2.37

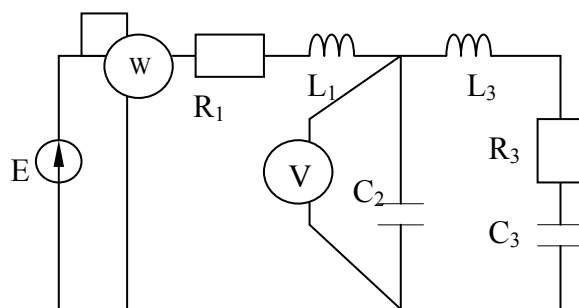


Рис. 2.38

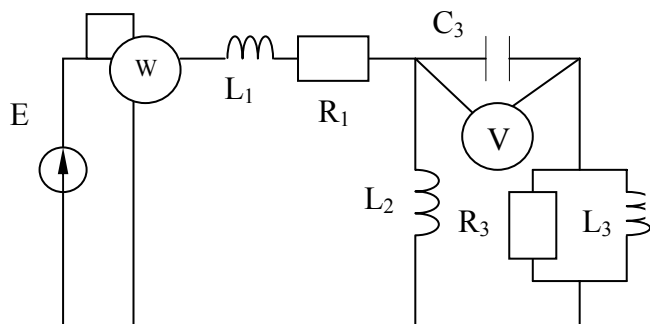


Рис. 2.39

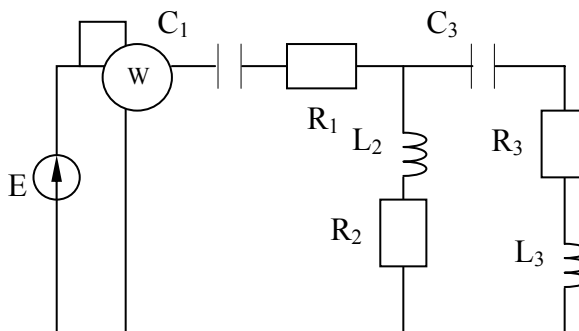


Рис. 2.40

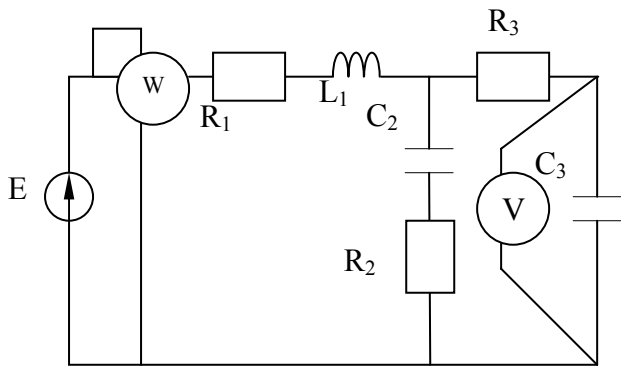


Рис. 2.41

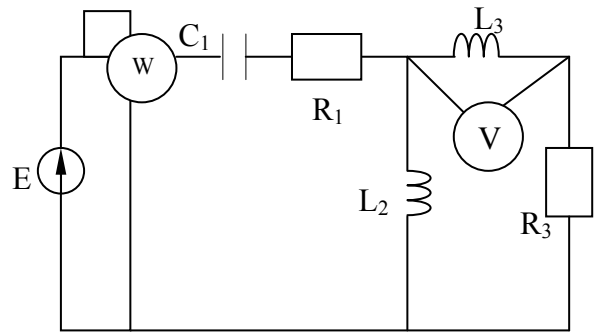


Рис. 2.42

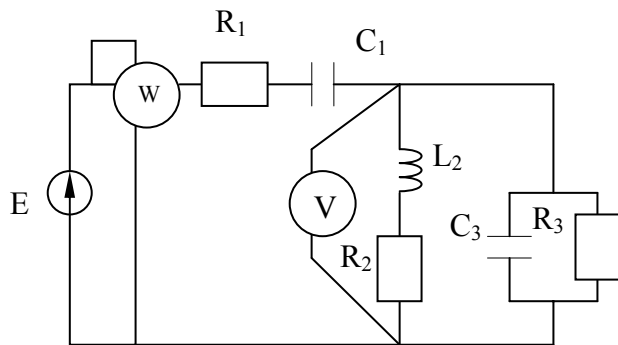


Рис. 2.43

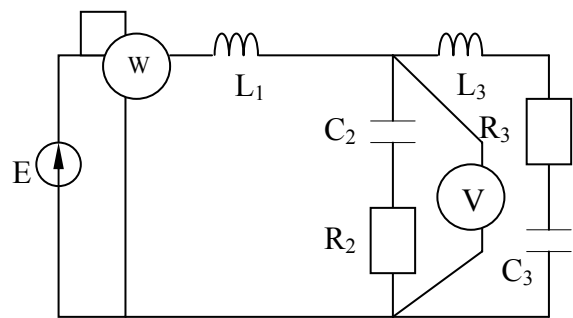


Рис. 2.44

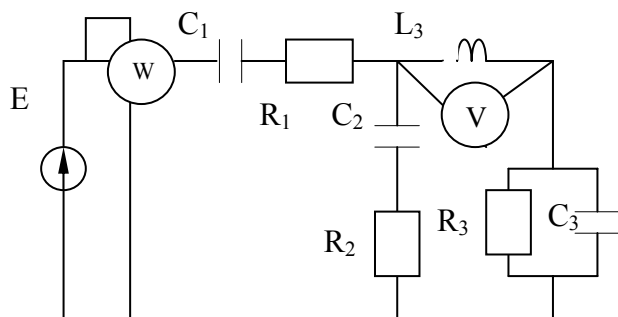


Рис. 2.45

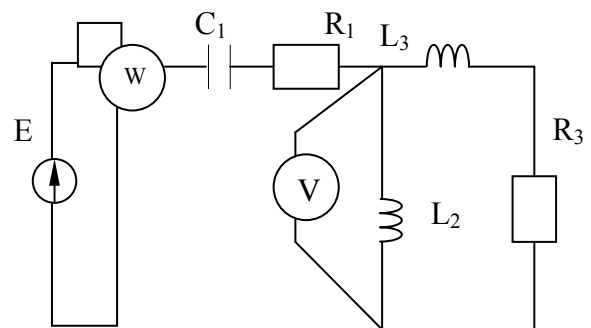


Рис. 2.46

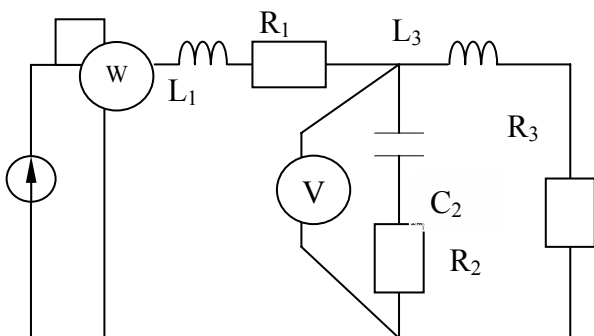


Рис. 2.47

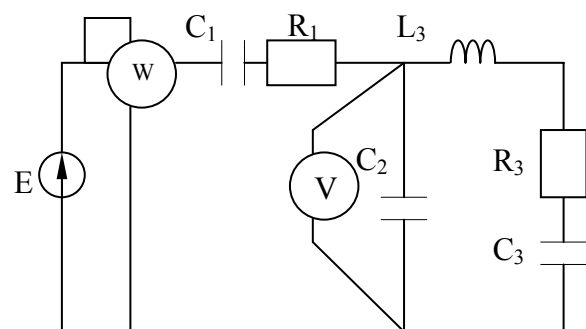


Рис. 2.48

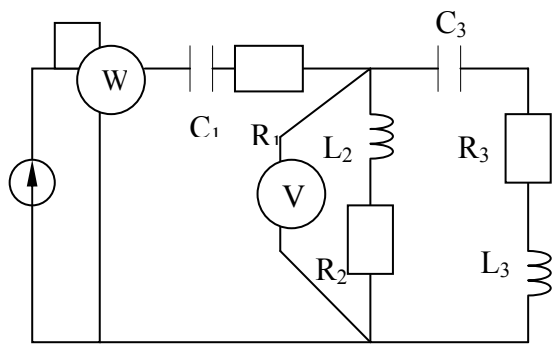


Рис. 2.49

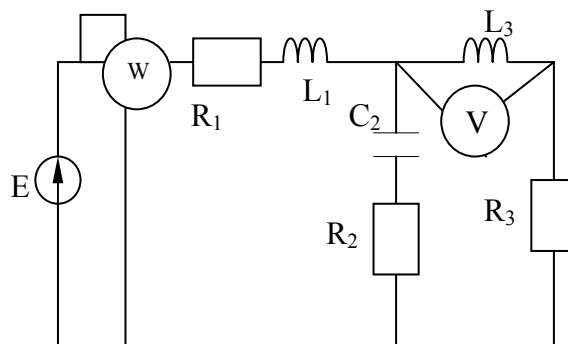


Рис. 2.50

Методические указания к задаче 2

Использование комплексных токов, сопротивлений, напряжений и ЭДС при расчете цепей синусоидального тока символическим методом позволяет использовать все методы, известные нам, для расчета цепей постоянного тока. Только вместо алгебраических уравнений с действительными коэффициентами придется составлять и решать уравнения с комплексными коэффициентами. Это касается и законов Кирхгофа, и метода узловых напряжений и т. д.

Пример. Рассчитать электрическую цепь синусоидального тока со смешанным соединением приемников.

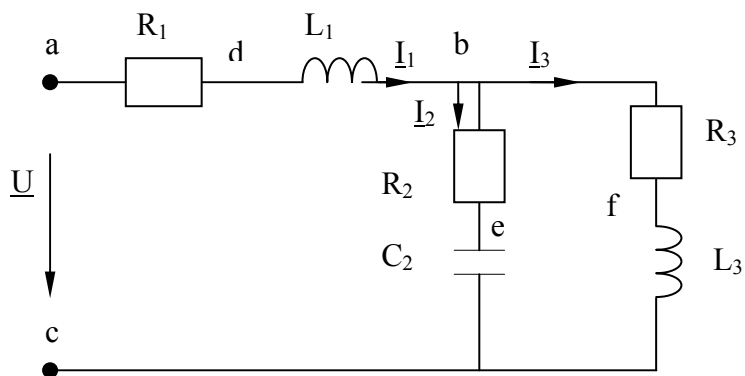


Рис. 2.51. Схема электрической цепи синусоидального тока

Для схемы, изображенной на рис. 2.51, известно, что

$$U = 120 \text{ В}, \quad R_1 = 10 \text{ Ом}, \quad R_2 = 24 \text{ Ом}, \quad R_3 = 15 \text{ Ом}, \\ L_1 = 19,1 \text{ мГн}, \quad L_3 = 63,5 \text{ мГн}, \quad C_2 = 455 \text{ мкФ}, \quad f = 50 \text{ Гц}.$$

Определить значения силы токов I_1 , I_2 , I_3 в ветвях цепи, составить баланс мощностей и построить векторную диаграмму токов, совмещенную с топографической диаграммой потенциалов.

Решение методом преобразования

Рассмотрим это на примере расчета токов в электрической цепи синусоидального тока методом, известным нам со школьного курса физики, методом преобразования, когда параллельное соединение сопротивлений заменяется их общим сопротивлением, последовательное соединение тоже одним эквивалентным ему сопротивлением, и таким образом схему упрощают, пока не получат нагрузку источника в виде одного единственного сопротивления. Далее решение сводится в основном к использованию закона Ома.

Выражаем сопротивления ветвей цепи в комплексной форме:

$$\underline{z} = R + jX = ze^{j\varphi},$$

$$\underline{z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j2\pi \cdot 50 \cdot 19,1 \cdot 10^{-3} = 10 + j6 \text{ [Ом]}.$$

Переходя от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной, получаем:

$$\underline{z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1} = 11,6 e^{j31^\circ} \text{ Ом},$$

$$\text{где } \underline{z}_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}; \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{R_1};$$

$$\underline{z}_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = 24 - \frac{10^6}{2\pi \cdot 50 \cdot 455} = 24 - j7 = 25 e^{-j16^\circ 15'} \text{ [Ом]},$$

$$\underline{z}_3 = R_3 + j\omega L_3 = 15 + j2\pi \cdot 50 \cdot 63,5 \cdot 10^{-3} = 15 + j20 = 25 e^{j53^\circ 5'} \text{ [Ом]}.$$

Выражаем заданное напряжение в комплексной форме. Если начальная фаза напряжения не задана, то ее можно принять равной нулю и считать вектор напряжения совпадающим по направлению с положительным направлением оси действительных на комплексной плоскости. В этом случае мнимая составляющая комплексного числа, выражающего значение напряжения, будет отсутствовать (рис. 2.52): $\underline{U} = U = 120 \text{ В}$.

Значение полного комплексного сопротивления цепи

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \frac{\underline{z}_2 \cdot \underline{z}_3}{\underline{z}_2 + \underline{z}_3} = 10 + j6 + \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} = 10 + j6 + \frac{25e^{-j16^\circ 15'} \cdot 25e^{j53^\circ 5'}}{41e^{j18^\circ 25'}} =$$

$$= 24,4 + j10,8 = 26,7e^{j23^\circ 55'} \text{ Ом.}$$

Определяем значение силы тока \underline{I}_1 в неразветвленной части цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{z}} = \frac{120}{26,7e^{j23^\circ 55'}} = 4,5e^{-j23^\circ 55'} [\text{A}].$$

Токи в параллельных ветвях могут быть выражены через ток в неразветвленной части цепи:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{z}_3}{\underline{z}_2 + \underline{z}_3} = 4,5e^{-j23^\circ 55'} \cdot \frac{15 + j20}{39 + j13} = 2,74e^{j10^\circ 45'},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_2 + \underline{z}_3} = 4,5e^{-j23^\circ 55'} \cdot \frac{24 - j7}{39 + j13} = 2,74e^{-j58^\circ 35'}.$$

Значения силы токов \underline{I}_2 и \underline{I}_3 можно найти и по-другому:

$$\underline{U}_{bc} = \underline{z}_{bc} \underline{I}_1 \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_2 + \underline{z}_3} = \underline{I}_1 \frac{(24 - j7)(15 + j20)}{39 + j13} 4,5e^{j23^\circ 55'} = 68,4e^{-j5^\circ 30'} [B];$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{z}_2} = \frac{68,4e^{-j5^\circ 30'}}{25e^{-j16^\circ 15'}} = 2,74e^{j10^\circ 45'};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{z}_3} = \frac{68,4e^{-j5^\circ 30'}}{25e^{j53^\circ 5'}} = 2,74e^{-j58^\circ 38'} [A].$$

Метод контурных токов

Для сравнения приведем решение этой же задачи методом контурных токов.

Подготовим схему к составлению уравнений по методу контурных токов. Для этого на схеме (рис. 2.52) надо показать направления обхода контуров и обозначить сами контурные токи.

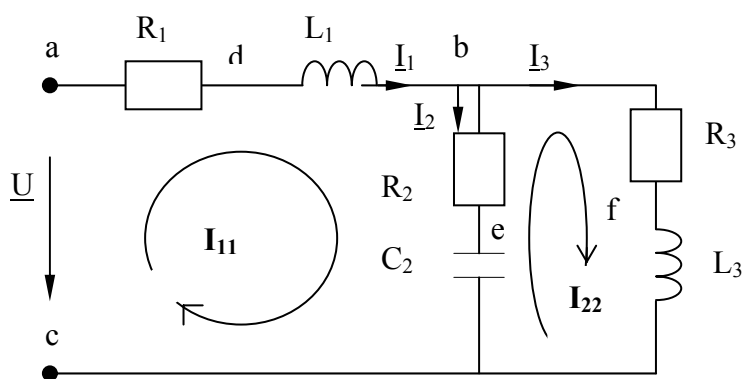


Рис. 2.52. Схема цепи для расчета методом контурных токов

Теперь, как и в предыдущей задаче, составляем уравнения, в которые в качестве неизвестных входят контурные токи, а в качестве коэффициентов при них собственные и смежные сопротивления контуров. Разница в том, что и токи, и коэффициенты будут комплексные:

$$\begin{aligned}
 -\underline{U} + \underline{I}_{11} \left(R_1 + j\omega L_1 + R_2 - \frac{j}{\omega C} \right) - \underline{I}_{22} \left(R_2 - \frac{j}{\omega C} \right) &= 0, \\
 -\underline{I}_{11} \left(R_2 - \frac{j}{\omega C} \right) - \underline{I}_{22} \left(R_2 + \frac{j}{\omega C} + R_3 + j\omega L_3 \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Значения активных сопротивлений нам даны в условии задачи, а реактивные сопротивления вычислены при расчетах методом преобразования. Воспользуемся ими и получим уравнения с численными комплексными коэффициентами. Заодно перенесем свободный член $-\underline{U}$ в правую часть, изменив его знак:

$$+\underline{I}_{11} (10 + j6 + 24 - j7) - \underline{I}_{22} (24 - j7) = 120,$$

$$-\underline{I}_{11} (24 - j7) + \underline{I}_{22} (24 - j7 + 15 + j20) = 0,$$

или

$$+\underline{I}_{11} (34 - j1) - \underline{I}_{22} (24 - j7) = 120,$$

$$-I_{11}(24 - j7) + I_{22}(39 + j13) = 0.$$

Главный определитель системы

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (34 - j1) & -(24 - j7) \\ -(24 - j7) & (39 + j13) \end{vmatrix} &= (34 - j1) \cdot (39 + j13) - (24 - j7) \cdot (24 - j7) = \\ &= 34 \cdot 39 + 34 \cdot j13 + 39 \cdot (-j1) + (-j1) \cdot j13 - 24 \cdot 24 + 2 \cdot 24 \cdot j7 - j7 \cdot j7 = \\ &= 1326 + 13 - j39 + j442 - 576 + 49 + j336 = 812 + j739 = 1098e^{j42,3^\circ} \end{aligned}$$

При этих расчетах студенты очень часто забывают, что $j \cdot j = -1$, и то, что большинство калькуляторов, для вычисления арктангенса используют только результат деления, выдают ответ для первой четверти при положительном результате деления, тогда как при отрицательных значениях одновременно и числителя, и знаменателя значение угла должно лежать в третьей четверти тригонометрического круга. Если же результат деления отрицательный, то калькулятор выдает ответ для угла в четвертой четверти, хотя при отрицательном знаменателе и положительном числителе правильное значение угла находится во второй четверти. За этим приходится следить самому расчетчику и иногда делать дополнительные поправки. Заметим так же, что показатель степени в последнем выражении записан в градусах, хотя с математической точки зрения это не корректно. Формулы преобразования алгебраической формы комплексного числа в показательную предполагают запись аргумента (показателя степени e) в радианах. В литературе же по использованию комплексного метода в электротехнических расчетах такая «вольность» допускается и привилась достаточно широко.

Найдем значения первого и второго определителей, заменив сначала первый столбец в главном определителе на столбец свободных членов, для нахождения второго определителя второй столбец:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 120 & -(24 - j7) \\ 0 & (39 + j13) \end{vmatrix} = (39 + j13) \cdot 120 = 4680 + j1560 = 4933e^{j18,4^\circ},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (34 - j) & 120 \\ -(24 - j7) & 0 \end{vmatrix} = (24 - j7) \cdot 120 = 2880 + j840 = 3000e^{j16,26^\circ}.$$

Найдем значения контурных токов и токов в ветвях.

$$I_1 = I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4933e^{j18,4^0}}{1098e^{j42,3^0}} = 4,5e^{-j23,9^0} = 4,1 - j1,82 \text{ [A]};$$

$$I_3 = I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3000e^{-j16,26^0}}{1098e^{j42,3^0}} = 2,73e^{-j58,56^0} = 1,424 - j2,3 \text{ [A]};$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = (4,1 - j1,82) - (1,424 - j2,3) = 2,676 + j0,51 = 2,73e^{j10,77^0}.$$

Как видим, отличия очень небольшие, да и те, по-видимому, за счет округлений во время вычислений.

Проверка баланса мощности

Полная комплексная мощность всей цепи равна:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = 120 \cdot 4,5e^{j23^{\circ}55'} = 540 e^{j23^{\circ}55'},$$

где \underline{I}^* – число комплексно-сопряженное комплексу действующего значения тока \underline{I} , потребляемого от источника.

Для получения \underline{I}^* – надо изменить знак перед мнимой частью \underline{I} в алгебраической форме или перед показателем степени e в показательной (экспоненциальной) форме.

Для определения значений активной и реактивной мощностей представим полную комплексную мощность в алгебраической форме. Тогда действительная часть комплекса будет представлять собой активную мощность, а коэффициент при мнимой – реактивную.

$$\underline{S} = 540 e^{j23^{\circ}55'} = 540 \cos 23^{\circ}55' + j540 \sin 23^{\circ}55' = 494 + j218,$$

откуда $P = 494 \text{ Вт}, \quad Q = 218 \text{ вар}.$

Иная запись этого же действия выглядит так:

$$P = \text{Re}[\underline{U} \underline{I}^*] = \text{Re}[120 \cdot 4,5 e^{j23^{\circ}55'}] = 120 \cdot 4,5 \cos 23^{\circ}55' = 494 \text{ [Вт]};$$

$$Q = \text{Im}[\underline{U} \underline{I}^*] = \text{Im}[120 \cdot 4,5 e^{j23^{\circ}55'}] = 120 \cdot 4,5 \sin 23^{\circ}55' = 218 \text{ [вар]}.$$

В этом случае Re означает реальную часть комплексного числа (произведения $\underline{U} \underline{I}^*$), а Im – мнимую часть.

Отметим, что значение полной мощности измеряется в вольт-амперах (В·А), а реактивная – в вольт-амперах реактивных (вар).

Значения активной и реактивной мощности можно найти и по-другому, как мощности, потребляемые отдельными потребителями цепи:

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 10 \cdot 4,5^2 = 202 \text{ Вт}; \quad P_2 = R_2 I_2^2 = 180 \text{ Вт}; \quad P_3 = R_3 I_3^2 = 112 \text{ Вт};$$

$$Q_1 = X_1 I_1^2 = 6 \cdot 4,5^2 = 122 \text{ вар}; \quad Q_2 = X_2 I_2^2 = -52,5 \text{ вар}; \quad Q_3 = X_3 I_3^2 = 150 \text{ вар}.$$

Проверка показывает, что $P = P_1 + P_2 + P_3$, что $Q \approx Q_1 + Q_2 + Q_3$.

Эти равенства значений для активной и реактивной мощностей называются *балансом мощности* и, в частности, могут служить проверкой правильности решения задачи. Суть в том, что в силу закона сохранения энергии суммы активных и реактивных мощностей, выданных источниками, должна быть равна суммам значений активных и реактивных мощностей, израсходованных потребителями.

На рисунке (рис. 2.52) приведена векторная диаграмма токов, совмещенная с топографической диаграммой потенциалов цепи. Порядок ее построения следующий.

Строим оси комплексной плоскости: ось действительных (как правило, горизонтальная ось) и ось мнимых (как правило, вертикальная ось). Выбрав удобный масштаб для тока, из начала координат проводим векторы I_1 , I_2 и I_3 . Можно воспользоваться алгебраической формой записи, откладывая по осям действительные и мнимые части комплексных изображений этих токов, можно использовать показательную форму, тогда вектор, изображающий соответствующий ток $\underline{I} = I e^{j\psi_i}$, откладывается из начала координат под углом ψ_i к оси действительных (против часовой стрелки, если $\psi_i > 0$, и по часовой, если $\psi_i < 0$). Это и будет векторной диаграммой токов. Конечно, при правильном решении должен выполняться 1-й закон Кирхгофа в векторной и в комплексной формах: $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ или $I_1 + I_2 = I_3$.

Топографическая диаграмма напряжений показывает на комплексной плоскости значения комплексных потенциалов всех точек цепи, разделенных какими-либо элементами. Отрезки, соединяющие точки на этой диаграмме, представляют собой векторные изображения на комплексной плоскости напряжений между соответствующими точками цепи. Надо только помнить, что в отличие от стрелок, изображающих напряжение на схеме цепи, векторы напряжений на топографической диаграмме направлены в сторону потенциала, обозначенного первым индексом напряжения. Так, вектор U_{ab} направлен от точки φ_b к точке φ_a .

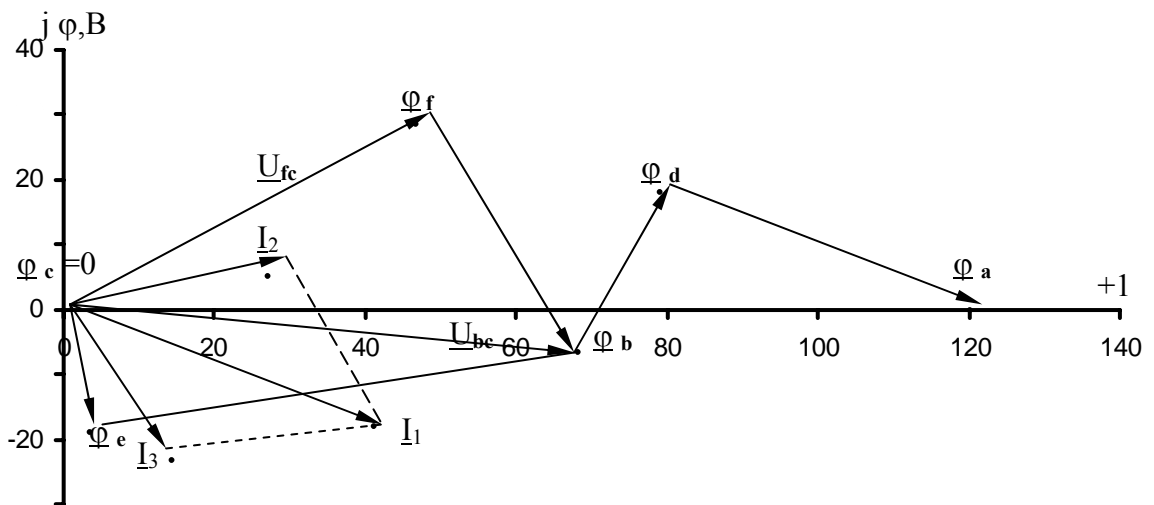


Рис. 2.52. Векторная диаграмма токов, совмещенная с топографической диаграммой потенциалов

Расчет самих комплексных потенциалов ведется почти так, как мы это делали для потенциальной диаграммы в задаче 1. Так, приняв потенциал нижней клеммы источника (или, что тоже, точки С) равным нулю, поместим его в начало координат комплексной плоскости. $\underline{U}_{bc} = \varphi_b - \varphi_c = \varphi_b$. Из последнего ясно, что найденное нами ранее значение \underline{U}_{bc} как раз и есть потенциал точки «b» и может быть показан на комплексной плоскости в точке, на которую укажет вектор длиной, соответствующей 68,4 В, проведенной под углом $-5^\circ 30'$ к оси действительных. Путь тока между точками «b» и «с» может лежать через две ветви, в каждой из которых есть своя точка, потенциал которой отличен как от φ_b , так и от φ_c . Это точки «e» и «f». Их потенциалы можно определить как

$$\varphi_e = \underline{U}_{ec} = \underline{I}_2(-jX_c) = 2,74e^{j10^\circ 45'}(-j7) = 19,18e^{-j79^\circ 15'},$$

$$\varphi_f = \underline{U}_{fc} = \underline{I}_3 \cdot jX_{L3} = 2,74e^{j58^\circ 35'} \cdot j20 = 54,8e^{j31^\circ 25'}.$$

При вычислениях надо помнить, что $j = e^{j90^\circ}$, а $-j = e^{-j90^\circ}$. Остается определить положение потенциалов точек «d» и «a». Имеем:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{db} &= \varphi_d - \varphi_b = \underline{I}_1 jX_{L1} \Rightarrow \varphi_d = \varphi_b + \underline{U}_{db} \\ \varphi_d &= \varphi_b + \underline{I}_1 jX_{L1} = 68,4e^{-j5^\circ 30'} + 4,5e^{-j23^\circ 55'} = 68,4\cos 5^\circ 30' - \\ &- j 68,4 \sin 5^\circ 30' + 4,5 \cdot 6\cos(90^\circ - 23^\circ 55') + j 4,5 \cdot 6\sin(90^\circ - 23^\circ 55') = \\ &= 68,01 - j 6,56 + 11 + j 24,67 = 79 + j 18,1 \text{ [B]}; \\ \varphi_a &= \varphi_d + \underline{I}_1 \cdot R_1 = 79 + j 18,1 + 4,5\cos 23^\circ 55' \cdot 10 - j 4,5\sin 23^\circ 55' \cdot 10 = \\ &= 120,14 - j 0,13. \end{aligned}$$

Как видим, мы пришли в точку, лежащую почти на оси действительных на расстоянии, соответствующем 120 В от начала координат (от точки \varnothing). Сюда мы и должны были прийти, если учесть, что напряжение между точками «а» и «с» по условию равно 120 В, а начальную фазу этого входного напряжения мы приняли равной нулю.

ЗАДАЧА 3. РАСЧЕТ ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

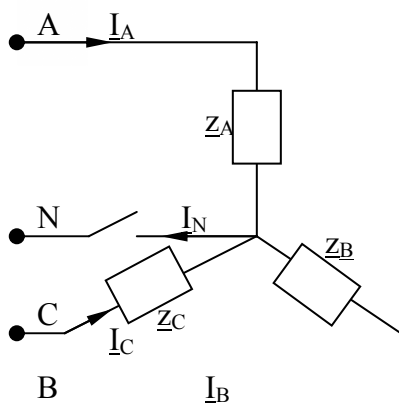


Рис. 3.1. Обобщенная схема расчетной цепи.

1. Выбрать из таблицы 3.1 величины активных и реактивных сопротивлений фаз для цепи, заданной схемой (рис. 3.1).

2. Нарисовать простейшую схему трехфазной цепи с условным изображением активных сопротивлений, индуктивностей и емкостей, соответствующих данной задаче.

3. Рассчитать значения всех токов в цепи с подключенным нейтральным проводом.

4. Рассчитать значения всех токов в цепи при отключении нейтрального провода.

5. Рассчитать значения всех токов при обрыве фазы, указанной, в таблице 3.1 с подключенным нейтральным проводом.

6. Рассчитать значения всех токов при обрыве фазы с отключенным нейтральным проводом.

7. Рассчитать значения всех токов в цепи при коротком замыкании фазы и отключенном нейтральном проводе.

8. Построить топографические диаграммы для рассчитанных в предыдущих пунктах режимов.

9. Подсчитать активную мощность, потребляемую цепью, для рассчитанных режимов.

Таблица 3.1

Варианты	$U_{л}$ В	R_A Ом	X_A Ом	R_B Ом	X_B Ом	R_C Ом	X_C Ом	Обрыв фазы	КЗ фазы
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	127	30	30	30	-	30	-	С	В
2	127	30	-20	40	-	40	-	С	В
3	127	40	30	50	-	-	50	С	В
4	127	20	-40	30	-	-	30	С	В
5	127	40	40	40	-	-	-50	С	В
6	220	20	-20	30	-	-	-30	С	В
7	220	15	15	-	15	15	-	В	С
8	220	20	-15	-	30	30	-	В	С
9	220	20	20	-	-30	30	-	В	С
10	220	30	-30	-	-40	40	-	В	С

Продолжение таблицы 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	380	20	20	-	40	-	40	B	C
12	380	20	-30	-	30	-	40	B	C
13	380	40	40	-	-50	-	50	B	C
14	380	40	-40	-	-50	-	50	B	C
15	380	30	40	-	40	-	-40	B	C
16	127	8	-10	-	15	-	-50	B	C
17	127	15	15	-	-20	-	-20	B	C
18	127	15	-20	-	-15	-	-20	B	C
19	127	20	-	30	15	30	-	C	A
20	127	25	-	20	-15	25	-	C	A
21	220	15	-	10	10	-	15	C	A
22	220	20	-	20	-15	-	25	A	C
23	220	50	-	30	40	-	-50	A	C
24	220	50	-	30	-40	-	12	A	C
25	220	-	-20	-	20	16	-	A	B
26	380	-	20	16	12	20	-	A	C
27	380	-	-30	24	18	30	-	A	C
28	380	-	25	20	-15	25	-	A	C
29	380	-	50	40	30	50	-	A	C
30	380	-	40	32	24	-	40	C	A
31	127	-	10	-	-10	8	-6	B	A
32	127	-	-15	-	-15	12	9	B	A
33	127	-	-20	-	-20	12	-16	B	A
34	127	-	30	-	-30	24	-18	B	A
35	127	-	45	-	-45	27	36	B	A
36	220	-	45	27	36	-	-45	B	C
37	220	-	-50	40	-30	-	-50	A	C
38	220	-	-30	-	30	24	-18	A	B
39	220	-	35	-	35	21	-28	B	A
40	220	-	25	-	25	16	20	B	A
41	380	24	32	40	-	40	-	C	B
42	380	30	-40	50	-	50	-	B	C
43	380	15	20	25	-	-	25	B	C
44	380	28	-21	35	-	-	35	B	C
45	380	48	36	60	-	-	-60	C	B
46	127	6	-8	10	-	-	-10	C	B
47	127	6	8	-	10	10	-	C	B
48	127	6	-8	-	10	10	-	B	C
49	127	6	8	-	-10	10	-	B	C
50	127	6	-8	-	-10	10	-	C	B
51	220	30	40	-	50	-	50	C	B
52	220	20	-15	-	25	-	25	B	C
53	220	12	16	-	-20	-	20	B	C
54	220	16	-12	-	-20	-	20	C	B
55	220	28	21	-	35	-	-35	C	B

Окончание таблицы 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
56	380	40	-30	-	50	-	-50	В	С
57	380	15	20	-	-25	-	-25	В	С
58	380	21	-28	-	-35	-	-35	В	С
59	380	50	-	40	30	50	-	А	С
60	380	50	-	40	-30	50	-	С	А
61	127	20	-	16	-12	-	20	С	А
62	127	20	-	12	16	-	20	А	С
63	127	25	-	20	15	-	-25	А	С
64	127	15	-	12	-9	-	-15	С	А
65	127	-	-10	-	10	8	6	В	С
66	220	-	20	16	12	20	-	В	С
67	220	-	-25	15	20	25	-	С	В
68	220	-	25	15	-20	25	-	В	С
69	220	-	15	12	9	-	20	А	С
70	220	-	-15	12	9	-	-20	С	А
71	380	-	60	-	-48	18	-360	В	С
72	380	-	-60	-	48	48	36	В	А
73	380	-	-30	-	-24	24	-18	А	В
74	380	-	45	-	-36	36	-27	А	В
75	380	-	90	-	-72	72	54	В	А
76	127	-	18	19	24	-	-30	А	С
77	127	-	-30	18	-24	-	-30	С	А
78	127	-	-30	-	30	24	-18	В	А
79	127	-	30	-	30	24	-18	В	А
80	127	-	15	-	15	12	-9	А	В

Методические указания к задаче 3

Как уже упоминалось во введении, расчет режимов трехфазных цепей основывается на тех же приемах и методах, что и расчет любой электрической цепи синусоидального тока. Поэтому предполагается, что, справившись со второй задачей, студент готов рассчитать и цепь, в которой действуют три одинаковые по величине ЭДС, начальные фазы которых сдвинуты между собой на 120° . Для демонстрации учета этой особенности приводится пример расчета режима для наиболее сложного пункта задания: расчет режима трехфазной цепи с несимметричной нагрузкой, соединенной звездой без нейтрального провода.

Пример. В трехфазную сеть с линейным напряжением $U_n=380$ В включен звездой приемник. Известно, что в фазе А активное $R = 22$ Ом, в фазе В отрицательное реактивное, т. е. емкостное сопротивление

$X = -22$ Ом и в фазе С положительное, т. е. индуктивное $X = 22$ Ом. Выбор индуктивного или емкостного сопротивления определяется исходя из формулы реактивного сопротивления последовательного соединения $X = X_L - X_C$. Таким образом, простейшая эквивалентная схема замещения для ветви может содержать либо одну емкость при отрицательном реактивном сопротивлении (если положим $X_L = 0$) или одну индуктивность при положительном реактивном сопротивлении ветви (если положим $X_C = 0$).

В результате схема заданной цепи должна выглядеть так (рис. 3.2):

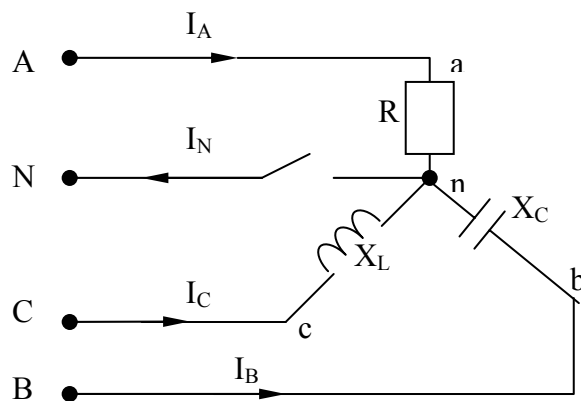


Рис. 3.2. Схема цепи с конкретными элементами, соответствующими данным варианта задачи

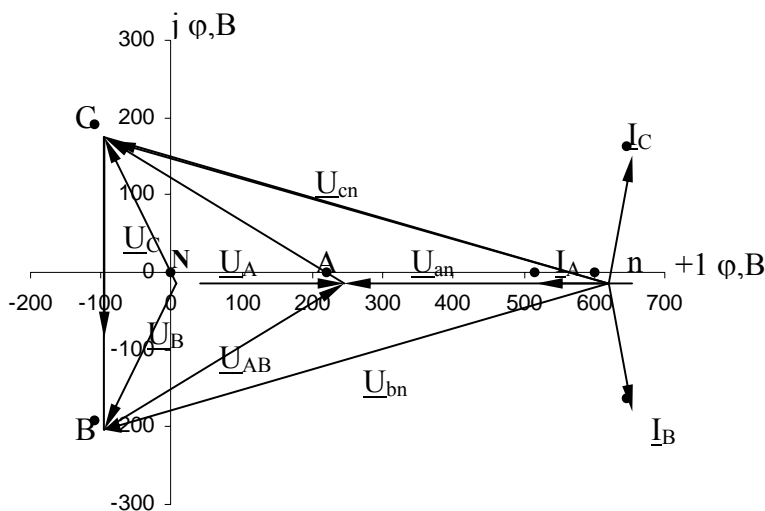


Рис.3.3. Топографическая диаграмма потенциалов, совмещенная с векторной диаграммой токов

Решение. Расчет производится комплексным методом. Находим значения фазных напряжений:

$$U_{\phi} = \frac{U_{\lambda}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{1,73} = 220 \text{ В};$$

$$\underline{U}_A = 220 \text{ В}; \quad \underline{U}_B = 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j191) \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = 220e^{j120^\circ} = (-110 + j191) \text{ В}.$$

Определяем значения напряжения между нейтральными точками приемника и источника питания:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_A \underline{U}_A + \underline{Y}_B \underline{U}_B + \underline{Y}_C \underline{U}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\frac{1}{22} \cdot 220 + j \frac{1}{22} (-110 - j191) - j \frac{1}{22} (-110 + j191)}{\frac{1}{22} + j \frac{1}{22} - j \frac{1}{22}} = 602 \text{ В}.$$

Определяем значения напряжений на зажимах фаз приемника:

$$\underline{U}_{an} = 220 - 602 = -382 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{bn} = (-110 - j191) - 602 = -712 - j191 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{cn} = (-110 + j191) - 602 = 712 + j191 \text{ В}.$$

Определяем значения фазных (линейных) токов:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{an}}{R} = \frac{-382}{22} = -17,3 \text{ [A]};$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bn}}{-jX_C} = \frac{-712 - j191}{-j22} = 8,68 - j32,4 \text{ [A]};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cn}}{-jX_L} = \frac{-712 + j191}{j22} = 8,68 + j32,4 \text{ [A]}.$$

Векторная диаграмма токов с топографической диаграммой потенциалов изображена на рис. 3.3. Из рассмотрения этой задачи следует, что значения напряжений на зажимах фаз приемника получаются неодинаковыми. Поэтому несимметричные приемники (бытовые и др.) соединяют либо четырехпроводной звездой, либо треугольником.

На приведенной топографической диаграмме точка «n» попала на ось действительных. Однако она может быть и далеко в стороне от нее в

задачах других вариантов. Ведь не везде модули комплексных сопротивлений всех фаз одинаковы.

Надо заметить, что это не единственный метод решения задачи. Студент может воспользоваться любым другим, известным ему методом, например, методом контурных токов. В самом деле, представив напряжения источника в виде ЭДС фаз генератора или трансформатора, можно рассматривать цепь как достаточно простую двухконтурную.

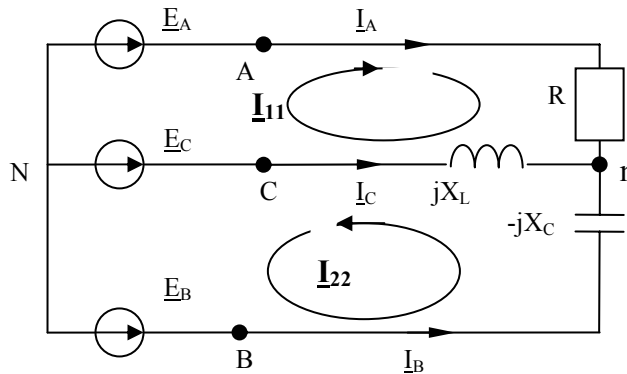


Рис. 3.4. Схема цепи без нейтрального провода, преобразованная для решения задачи методом контурных токов

Как видим, для решения задачи предстоит составить и решить систему двух уравнений относительно контурных токов \underline{I}_{11} и \underline{I}_{22} , после чего находим значения силы токов в ветвях $\underline{I}_A = \underline{I}_{11}$, $\underline{I}_B = \underline{I}_{22}$, $\underline{I}_C = -(\underline{I}_{11} + \underline{I}_{22})$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Борисов, Ю. М. Электротехника. Учебник для вузов – 2-е изд., перераб. и доп. /Ю. М. Борисов и др. – М.: Энергоатомиздат, 1985 (и все последующие издания).
2. Касаткин, А. С. Электротехника. Учебное пособие для вузов. – 4-е изд. /А. С. Касаткин, М. В. Немцов: – М.: Энергоатомиздат, 1983 (и последующие издания).
3. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники /Л. А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1973 (и все последующие издания).
4. Нейман, Л. Р. Теоретические основы электротехники т.1 /Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – М. – Л.: Энергия, 1965 (и все последующие издания).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Задача 1. Расчет цепи постоянного тока.....	4
Задача 2. Расчет цепи синусоидального тока.....	30
Задача 3. Расчет трехфазной цепи.....	46
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	52

Учебное издание
**Методические указания
к расчетно-графическим работам
по теме «Цепи постоянного и синусоидального тока»
курса «Электротехника и электроника»
для студентов неэлектротехнических специальностей**

Составитель ГОЛОБОРОДЬКО Евгений Иванович

Редактор Н. А. Евдокимова

Подписано в печать 30.11.2004 Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3.03
Уч.-изд. л. 3.0 Тираж 150 экз. Заказ .

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, Сев.Венец, 32.

Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, Сев.Венец, 32.