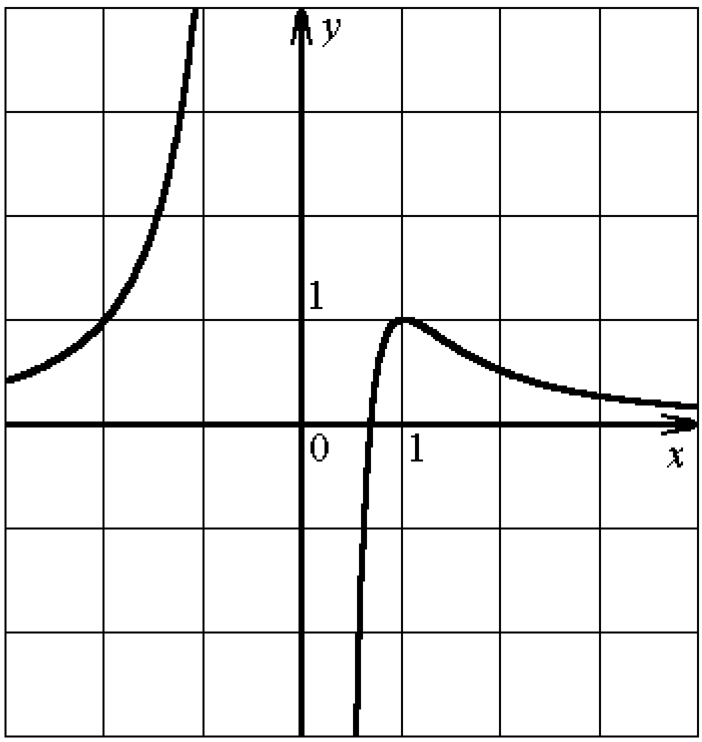
О.И. Судавная, С.В. Фролов

Типовые расчеты по высшей математике

Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения

I семестр



Санкт-Петербург

2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

О.И. Судавная, С.В. Фролов

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения

I семестр

Методическое пособие

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург

2009

О.И. Судавная, С.В. Фролов Типовые расчеты по высшей математике. Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения. I семестр. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 46 с.

Пособие содержит типовые расчеты с методическими указаниями по темам

- линейная алгебра
- векторная алгебра
- аналитическая геометрия
- пределы
- производные
- исследование функций

Пособие адресовано студентам первого курса вечернего отделения СПбГУ ИТМО

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета СПбГУ ИТМО 29 сентября 2009 года, протокол № 2.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

Введение

Типовые расчеты по математике для студентов первого курса вечернего отделения в первом семестре содержат 2 типовых расчета по темам

- «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия»
- «Введение в математический анализ»

Каждый из типовых расчетов включает 26 вариантов по пяти различным разделам. Перед заданиями помещены методические указания, основные теоретические формулы и разобранные решения наиболее типичных задач.

Рекомендуемые пособия:

1. Брылевская Л.И., Лапин И.А., Ратафьева Л.С. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008.
2. Лапин И.А., Ратафьева Л.С., Фролов В.М. Математический анализ I. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008.

Типовой расчет по теме «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия»

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Исследование системы линейных уравнений методом Гаусса.

II. 1) Составление системы линейных уравнений.
2) Решение системы методом Крамера.
3) Решение системы матричным методом.

III. Уравнения прямой и плоскости в пространстве.

IV. Уравнения кривых второго порядка на плоскости и поверхностей второго порядка в пространстве.

.

Образцы решения задач по теме «Системы линейных уравнений»

Пример 1. С помощью метода Гаусса найдите решения системы

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad -2x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 12 \end{cases}$$

, или докажите ее несовместность.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -39 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & 39 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На *первом* шаге ко второй строке прибавлена первая строка, умноженная на (– 2), к третьей строке прибавлена первая строка, умноженная на (– 1), к четвертой строке прибавлена первая строка, умноженная на (– 2). На *втором* шаге к третьей строке прибавлена вторая строка, умноженная на 2, к четвертой строке прибавлена вторая строка, умноженная на (– 3). На *третьем* шаге к четвертой строке прибавлена третья строка.

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad -2x_4 = 9 \\ \quad -x_2 + x_3 + 5x_4 = -15 \\ \qquad\qquad x_3 + 13x_4 = -39 \end{cases}.$$

Придадим переменной x_4 произвольное значение $x_4 = c, \quad c \in R$. Тогда $x_3 = -13c - 39$, $\quad x_2 = -8c - 24$, $\quad x_1 = 2c + 9$. Таким образом получили бесконечное множество решений системы, зависящее от произвольного параметра c:

$$\begin{cases} x_1 = 2c + 9 \\ x_2 = -8c - 24 \\ x_3 = -13c - 39 \\ x_4 = c \end{cases}, \ c \in R.$$

Матричная форма записи полученного множества решений имеет вид:

$$X = c\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -24 \\ -39 \\ 0 \end{pmatrix},\ c \in R.$$

Матрица, стоящая в первом слагаемом, представляет собой общее решение *однородной* системы, соответствующей исходной, а матрица во втором слагаемом – частное решение исходной *неоднородной* системы.

Ответ: $X = c\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -24 \\ -39 \\ 0 \end{pmatrix},\ c \in R.$

Пример 2. . С помощью метода Гаусса найдите решения системы $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$, или докажите ее несовместность.

Решение.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & -19 & 13 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & -2/13 & -20/13 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге из второй строки вычтена ее первая строка, умноженная на 2, а из третьей строки вычтена первая строка, умноженная на 4. На втором шаге к третьей строке прибавлена вторая строка, умноженная на – 19/13.

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ -13x_2 + 9x_3 = 12 \\ -\dfrac{2}{13}x_3 = -\dfrac{20}{13} \end{cases}.$$

Из последнего уравнения следует, что x_3 = 10, тогда из второго уравнения получим $-13x_2$ = – 78, откуда x_2 = 6. Найдем x_1 из первого уравнения: x_1 = – 5 + 40 – 30 = 5. В результате получим

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}. \quad \textit{Ответ}: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Пример 3. С помощью метода Гаусса найдите решения системы
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+x_2-x_3=3 \\ 3x_1+3x_2+2x_3=10 \end{cases}$$, или докажите ее несовместность.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:
$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

На *первом* шаге из второй строки вычтена первая строка, умноженная на 2, а из третьей строки вычтена первая строка, умноженная на 3. На *втором* шаге из третьей строки вычтена вторая строка.

Восстановив по третьей строке матрицы третье уравнение, получим $0\cdot x_3=3$, откуда следует, что уравнение, а значит, и система несовместны.

Ответ: система несовместна.

Образцы решения задач по теме «Векторная алгебра»

Пример 4. Вектор $\vec{d}=\{x,y,z\}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{2,3,-4\}$ равно – 4,

б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{1,2,-2\}$ равна – 1,

в) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{c}=\{1,-1,0\}$.

1) Составьте систему линейных уравнений, связывающих координаты *x*, *y*, *z* вектора $\vec{d}$.
2) Найдите координаты *x*, *y*, *z* вектора $\vec{d}$ двумя способами: **по теореме Крамера** и **с помощью обратной матрицы**.
3) На векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ построена треугольная пирамида. Найдите ее высоту, опущенную на грань, проходящую через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. 1) Запишем условия, которым удовлетворяет вектор $\vec{d}$, в координатной форме:

а) $\vec{d}\cdot\vec{a}=-4 \Rightarrow 2x+3y-4z=-4$;

б) $np_{\vec{b}}\vec{d}=-1 \Rightarrow \dfrac{x+2y-2z}{3}=-1 \Rightarrow x+2y-2z=-3$;

в) $\vec{d}\perp\vec{c} \Rightarrow \vec{d}\cdot\vec{c}=0 \Rightarrow x-y=0$.

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x & +3y & -4z & =-4 \\ x & +2y & -2z & =-3 \\ x & -y & & =0 \end{cases}.$$

2) Решим систему с помощью **теоремы Крамера**. Для этого найдем определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ системы:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot A_{31}-1\cdot A_{32}+0\cdot A_{33}=$$

$$=1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=(-6+8)+(-4+4)=2.$$

При вычислении определителя была применена *теорема разложения* по элементам третьей строки.

Таким образом, $D=2\neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение $x=\dfrac{D_1}{D}$, $y=\dfrac{D_2}{D}$, $z=\dfrac{D_3}{D}$. Найдем определители D_1, D_2, D_3.

$$D_1=\begin{vmatrix} -4 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0\cdot A_{31}-1\cdot A_{32}+0\cdot A_{33}=-1\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8-12=-4$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot A_{31}+0\cdot A_{32}+0\cdot A_{33}=\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8-12=-4$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot A_{31}-1\cdot A_{32}+0\cdot A_{33}=$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=(-9+8)+(-6+4)=-3$$

Координаты вектора $\vec{d}$ равны

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-4}{2}=-2,\; y=\frac{D_2}{D}=\frac{-4}{2}=-2,\; z=\frac{D_3}{D}=\frac{-3}{2}=-1{,}5.$$

Решим ту же систему с помощью **обратной матрицы**. Для этого запишем систему в матричной форме: $AX=B$, где A – матрица системы, X – столбец, составленный из неизвестных, B – столбец, составленный из свободных членов. Умножив матричное уравнение слева на матрицу A^{-1}, получим матричную форму решения системы $X = A^{-1}B$. Поскольку определитель матрицы A отличен от нуля ($D = 2 \neq 0$), обратная матрица A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы системы:

$$A_{11} = -2; \quad A_{12} = -2; \quad A_{13} = -3;$$
$$A_{21} = 4; \quad A_{22} = 4; \quad A_{23} = 5;$$
$$A_{31} = 2; \quad A_{32} = 0; \quad A_{33} = 1.$$

Составим из них матрицу $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Транспонируем полученную матрицу: $C = B^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Для получения обратной матрицы, умножим матрицу C на число $\dfrac{1}{D(A)} = \dfrac{1}{2}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1{,}5 & 2{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Проверка подтверждает правильность вычислений:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4-6+12 & 0 & 0 \\ 0 & 4+8-10 & 0 \\ 0 & 0 & 2+0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь столбец X:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1{,}5 & 2{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 4-6 \\ 6-7{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = -2$, $y = -2$, $z = -1{,}5$. Вектор $\vec{d}$ равен $\vec{d} = \{-2, -2, -1{,}5\}$.

3) Для нахождения высоты h треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, воспользуемся формулой $V = \dfrac{1}{3}hS$, где V – объем, S –

площадь основания пирамиды. Из этой формулы следует, что $h = \dfrac{3V}{S}$ (*).

Объем пирамиды равен $V = \dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. Поскольку $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, то

V = 1/3. Площадь основания, т. е. площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Найдем векторное произведение векторов

$\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Модуль векторного произведения равен

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, значит, $S = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Подставив найденные числа в формулу (*), получим $h = \dfrac{3\cdot(1/3)}{\left(\sqrt{5}/2\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0,4\sqrt{5}$.

Ответ: $\vec{d} = \left\{-2,-2,-1,5\right\}$, $h = 0,4\sqrt{5}$.

Образцы решения задач по теме «Аналитическая геометрия»

Пример 5. Докажите, что прямые $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{3}$ (1) и $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$ (2) пересекаются и напишите уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

Решение. 1) Прямая (1) проходит через точку A_1(1;1;0) параллельно направляющему вектору $\vec{s}_1 = \{2;1;3\}$. Прямая (2) проходит через точку A_2(1;0;1) параллельно направляющему вектору $\vec{s}_2 = \{1;-1;3\}$. Вычислим координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, соединяющего точки A_1 и A_2:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{1-1;0-1;1-0\} = \{0;-1;1\}.$$

Найдем смешанное произведение векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\vec{s}_1\,\vec{s}_2\,\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-3+6-1=0.$$

Из равенства нулю смешанного произведения векторов следует, что они компланарны, значит, прямые лежат в одной плоскости. Поскольку координаты направляющих векторов не пропорциональны, то прямые не параллельны. Следовательно, прямые (1) и (2) пересекаются, что и требовалось доказать.

2) Найдем уравнение плоскости, проходящей через две пересекающие прямые (1) и (2). Для этого введем текущую точку $M(x; y; z)$ искомой плоскости и построим вектор $\overrightarrow{A_1M} = \{x–1; y–1; z\}$. Учитывая компланарность векторов $\overrightarrow{A_1M}$, $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, получим $\overrightarrow{A_1M}\,\vec{s}_1\,\vec{s}_2 = 0$, или $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Вычислим определитель в левой части уравнения:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3+3)(x-1)-(6-3)(y-1)+(-2-1)z = 6x-6-3y+3-3z = 6x-3y-3z-3$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости: $6x-3y-3z-3=0$, или, что то же самое, $2x-y-z-1=0$

Ответ: $2x-y-z-1=0$.

Замечания. 1) Для доказательства **параллельности** двух прямых, уравнения которых записаны в канонической форме, достаточно доказать, что их направляющие векторы коллинеарны, т. е. координаты направляющих векторов пропорциональны.

2) Для доказательства того, что прямые, уравнения которых записаны в канонической форме, **скрещиваются**, достаточно доказать, что их направляющие векторы и вектор, соединяющий две точки, лежащие на прямых, некомпланарны, т. е. смешанное произведение этих векторов не равно нулю. Для этого нужно составить определитель из координат этих векторов и показать, что он отличен от нуля.

Пример 6. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+2y+z=-3 \end{cases}$.

Решение. Выберем произвольную точку, лежащую на прямой, т. е. точку, координаты x_0, y_0, z_0 которой удовлетворяют уравнениям обеих плоскостей. Для этого одной из координат придадим произвольное значение, а остальные найдем, подставив это произвольное значение в систему, составленную из уравнений плоскостей. Пусть, $z_0 = 0$. Тогда x_0, и y_0 найдем из системы $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$. Решив систему, получим $x_0 = 1$, $y_0 = -2$. Таким образом, прямая проходит через точку $M_0(1; -2; 0)$.

В качестве направляющего вектора прямой можно взять любой вектор, перпендикулярный как первой, так и второй плоскости, например, векторное произведение нормальных векторов данных плоскостей.

Найдем векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{2;1;-3\}$ и $\vec{n}_2 = \{1;2;1\}$ плоскостей:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Полученный вектор может служить направляющим вектором прямой: $\vec{s} = \{7;-5;3\}$. Подставив координаты точки M_0 и направляющего вектора в канонические уравнения прямой $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$, будем иметь $\frac{x-1}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{3}$. Приравняв каждое отношение к t и выразив x, y, z через t, получим параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x = 7t + 1 \\ y = -5t - 2 \\ z = 3t \end{cases}$.

Ответ: $\frac{x-1}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{3}$; $\begin{cases} x = 7t + 1 \\ y = -5t - 2 \\ z = 3t \end{cases}$.

Пример 7. Геометрическое тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 + 4z^2 = 25$ и $x^2 + y^2 - z^2 = 5$ и содержит точку $O(0;0;0)$.

1) Изобразите сечение тела координатной плоскостью Oyz. Определите вид кривых, ограничивающих сечение. Найдите координаты точек их пересечения.
2) Определите вид поверхностей, ограничивающих тело. Сделайте его схематический рисунок.

Решение. 1) Для всех точек плоскости Oyz справедливо условие $x = 0$. Подставив это значение в уравнения поверхностей, получим уравнения кривых, ограничивающих сечение: $y^2 + 4z^2 = 25$ и $y^2 - z^2 = 5$.

Разделив первое уравнение на 25, получим $\frac{y^2}{5^2} + \frac{z^2}{(2,5)^2} = 1$ – уравнение эллипса с полуосями $a = 5$, $b = 2,5$. Разделив второе уравнение на 5, получим $\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ – уравнение гиперболы с действительной полуосью $a = \sqrt{5}$ и мнимой полуосью $b = \sqrt{5}$. Эти кривые изображены на рис. 1а.

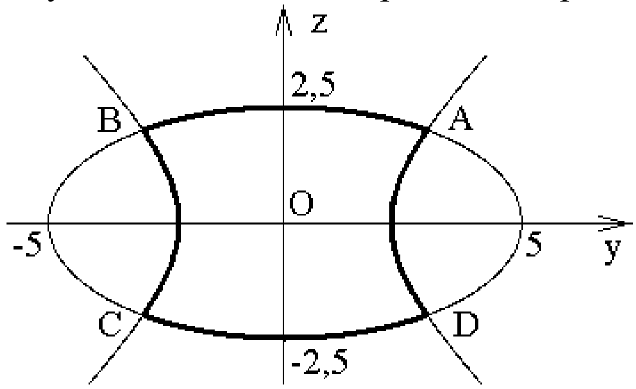


Рис. 1а

Для нахождения координат точек пересечения кривых составим и решим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} y^2 + 4z^2 = 25 \\ y^2 - z^2 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5y^2 = 45 \\ 5z^2 = 20 \end{cases}; \quad \begin{cases} y^2 = 9 \\ z^2 = 4 \end{cases}.$$ Система имеет 4 решения:

(3; 2),(– 3; 2), (– 3; – 2), (3; – 2). Таким образом, кривые пересекаются в четырех точках $A(3;2)$, $B(-3;2)$, $C(-3;-2)$, $D(3;-2)$. Согласно условию, искомое сечение содержит точку $O(0;0)$. На рис 1а оно представлено фигурой $ABCD$.

2) Тело, ограниченное указанными поверхностями получим, если будем вращать фигуру $ABCD$ вокруг оси Oz.

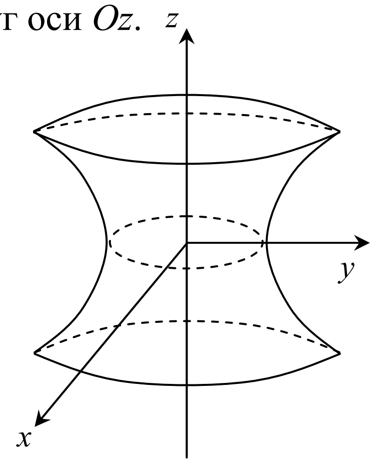


Рис. 1б

Данное тело схематически изображено на рис 1б. Оно ограничено эллипсоидом $x^2+y^2+4z^2=25 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{5^2}+\dfrac{z^2}{2{,}5^2}=1$ и однополостным гиперболоидом $x^2+y^2-z^2=5 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{5})^2}-\dfrac{z^2}{(\sqrt{5})^2}=1$.

Пример 8. Геометрическое тело ограничено поверхностями $2z=x^2+y^2$ и $x+z=4$.

1) Изобразите сечение тела координатной плоскостью Oxz. Определите вид кривых, ограничивающих сечение. Найдите координаты точек их пересечения.
2) Определите вид поверхностей, ограничивающих тело. Сделайте его схематический рисунок.

Решение. 1) Для всех точек плоскости Oxz справедливо условие $y = 0$. Подставив это условие в уравнения поверхностей, получим уравнения линий, ограничивающих сечение: $2z=x^2$ и $x+z=4$.

Первое уравнение задает параболу, а второе – прямую. Для нахождения координат их точек пересечения составим и решим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}2z=x^2\\x+z=4\end{cases};\ \begin{cases}2(4-x)=x^2\\z=4-x\end{cases};\ \begin{cases}x^2+2x-8=0\\z=4-x\end{cases};\ \begin{cases}x=2\\z=2\end{cases};\ \begin{cases}x=-4\\z=8\end{cases}.$$

Парабола и прямая пересекаются в точках $K(2;\ 2)$ $L(-2;\ 8)$. Искомое сечение, представляющее собой фигуру OKL, изображено на рис. 2а.

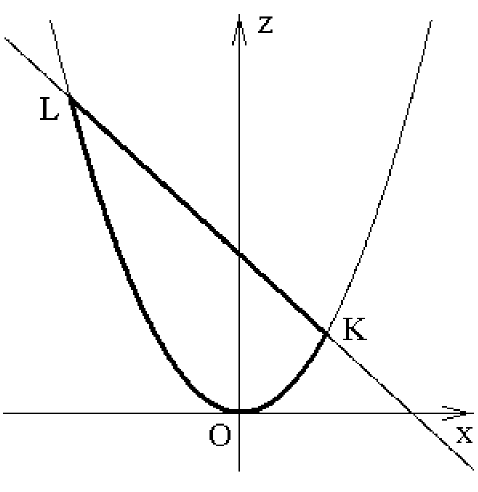


Рис. 2а

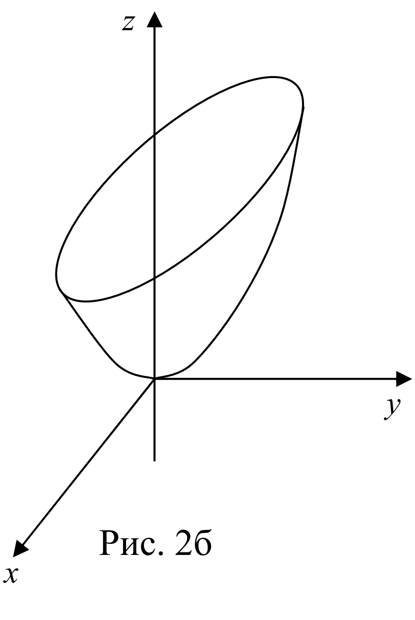


Рис. 2б

2) Тело ограничено следующими поверхностями:

$2z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ – эллиптическим параболоидом и $x + z = 4$ – плоскостью, параллельной оси Oy. Искомое тело схематически изображено на рис. 2б.

Расчетные задания

I. С помощью **метода Гаусса** найдите решения системы линейных уравнений или докажите ее несовместность.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -5 \\ 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$
16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - x_3 = -2 \end{cases}$
18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$
20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 7x_3 = -3 \end{cases}$
22. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$
24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -5 \\ 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$
26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$

II. Вектор $\vec{d}=\{x;y;z\}$ удовлетворяет условиям а), б) и в).

1) Составьте систему линейных уравнений, связывающих координаты вектора $\vec{d}$.
2) Решите эту систему двумя способами: по **формулам Крамера** и с помощью **обратной матрицы**.
3) На векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ построена треугольная пирамида. Найдите ее высоту, опущенную на грань, проходящую через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1. а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{2;-1;-1\}$, б) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b}=\{0;1;-3\}$ равно –11, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{-2;2;-1\}$ равна – 8/3.

2. а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{3;-2;6\}$ равно 4, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{1;0;2\}$ равна $0{,}2\sqrt{5}$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{0;2;1\}$ равно –2.

3. а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{1;1;2\}$ равно 2, б) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b}=\{1;-1;0\}$ равно 3, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{-2;1;-2\}$ равна – 2.

4. а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{2;3;1\}$, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{0;-1;1\}$ равна $0{,}5\sqrt{2}$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{2;-1;6\}$ равно 6.

5. а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{3;-2;-1\}$, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{1;1;1\}$ равна $\sqrt{3}/3$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{0;3;2\}$ равно 1.

6. а) Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{1;3;0\}$ равна $0{,}5\sqrt{10}$, б) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b}=\{-3;1;2\}$ равно 10, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{-1;1;1\}$ равна $2\sqrt{3}$.

7. а) Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{1;1;-1\}$ равна $\sqrt{3}$, б) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{b}=\{1;-1;1\}$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{1;-1;0\}$ равно 1.

8. а) Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{2;-1;2\}$ равна 4/3, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{1;1;0\}$ равна $\sqrt{2}$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{3;1;2\}$ равно 5.

9. а) Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{-1;1;0\}$ равна $0{,}5\sqrt{2}$, б) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{b}=\{3;1;2\}$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{-1;6;2\}$ равно 6.

10. а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{3;-2;-1\}$ равно 1, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{-1;-1;-1\}$ равна $-\sqrt{3}$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{0;3;2\}$ равно 4.

11. а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{1;-1;0\}$, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{1;1;-1\}$ равна $\sqrt{3}$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{1;-1;1\}$ равно 1.

12. а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{1;1;-1\}$ равно 2, б) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{b}=\{0;1;-1\}$, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{1;1;2\}$ равна $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

13. а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{1;1;0\}$ равно 1, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{2;1;-1\}$ равна $\sqrt{6}/3$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{0;1;2\}$ равно – 1.

14.а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{3;2;1\}$ равно 3, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{1;0;-1\}$ равна $\sqrt{2}/2$, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{2;1;1\}$ равна $\sqrt{6}/6$.

15.а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{3;1;1\}$, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{2;-1;1\}$ равна $\sqrt{6}/3$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{1;1;-1\}$ равно – 2.

16.а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{1;0;2\}$ равно – 5, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{2;1;2\}$ равна 2, в) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{c}=\{1;1;2\}$.

17.а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{1;-1;3\}$ равно 2, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{2;1;-1\}$ равна $\sqrt{6}/6$, в) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{c}=\{1;0;1\}$.

18.а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{-3;1;1\}$, б) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b}=\{-2;1;0\}$ равно – 2, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{1;0;1\}$ равна $2\sqrt{2}$.

19.а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{5;3;-4\}$, б) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b}=\{2;3;0\}$ равно 4, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{2;1;-2\}$ равна – 1/3.

20.а) Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{2;2;1\}$ равна 2, б) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{b}=\{2;-1;1\}$, в) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c}=\{2;-1;0\}$ равно 5.

21.а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{3;5;-1\}$, б) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b}=\{1;1;0\}$ равно – 1, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{2;6;-3\}$ равна 4/7.

22.а) Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{2;1;2\}$ равна 7/3, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{2;-2;1\}$ равна – 1/3, в) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{c}=\{1;-1;0\}$.

23.а) Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{1;0;1\}$ равна – $0{,}5\sqrt{2}$, б) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b}=\{6;-3;2\}$ равно 4, в) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{c}=\{-5;1;-3\}$.

24. а) Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{a}=\{-2;1;2\}$ равно – 1, б) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{b}=\{-1;0;1\}$, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{1;2;2\}$ равна $2\frac{1}{3}$.

25.а) Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}=\{-3;2;6\}$ равна – 4/7, б) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=\{0;1;1\}$ равна $0{,}5\sqrt{2}$, в) вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{c}=\{1;-3;-5\}$.

26.а) Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{a}=\{0;-1;1\}$, б) скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b}=\{2;2;1\}$ равно – 7, в) проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}=\{1;-2;2\}$ равна 1/3.

III. Решите задачи средствами аналитической геометрии.

1. Докажите, что прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ и $\frac{x-6}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{1}$ пересекаются и напишите уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

2. Докажите, что прямые $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$ параллельны и напишите уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

3. Докажите, что точка $A(1;\ 2;\ -1)$ не лежит на прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ и напишите уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и точку A.

4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\ 2;\ -1)$ и $B(2;\ -2;\ 0)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+3z=4$.

5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$ перпендикулярно плоскости $x + 2y - 2z = 2$.

6. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку M_1 перпендикулярно плоскости, проходящей через три точки $M_1(0;\ 1;\ 2)$, $M_2(1;\ 0;\ 2)$, $M_3(1;\ 2;\ 0)$.

7. Найдите координаты проекции точки $A(3;\ -5;\ 5)$ на плоскость $x-2y+2z+4=0$.

8. Составьте канонические уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$.

9. Найдите координаты проекции точки $A(3;-5;5)$ на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

10. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;\ -1;\ 2)$ параллельно двум плоскостям $x - y + 2z = 5$ и $2x + y - z = 3$.

11. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1;\ 2;\ -1)$ и $B(-1;\ 8;\ 2)$ и найдите координаты точек пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

12. Найдите координаты точек пересечения с осями координат плоскости, проходящей через три точки $A(1;\ 0\ \ -4)$, $B(0;\ -1;\ -3)$, $C(1;\ -2;\ 2)$.

13. Прямая, проходящая через точку $A(-2;\ 1;\ -1)$, образует с осью Ox угол 30°, а с осью Oz – угол 60°. Определите угол, образованный прямой с осью Oy и составьте параметрические уравнения этой прямой.

14. Докажите, что прямая $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ параллельна плоскости $2x-y+2z+4=0$ и найдите расстояние от этой прямой до плоскости.

15. Докажите, что прямые $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ (1) и $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-1}$ (2) скрещиваются и составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую (1) параллельно прямой (2).

16. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2; -1; -1)$ параллельно плоскости $2x + 3y - 6z = 6$ и найдите расстояние между плоскостями.

17. Составьте уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x + 2y + 2z = 3$ и расположенных на расстоянии 6 от данной плоскости.

18. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1; -2; 1)$ и $B(1; -8; -2)$ и найдите угол, образованный этой прямой и плоскостью $x + 2y - 2z = 3$.

19. Найдите угол, образованный прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+2}{-1}$ и плоскостью $-x + z = 3$, а также координаты их точки пересечения.

20. Через точку $M(1; -2; 2)$ проведена прямая, образующая угол 60° с осью Oy и угол 45° с осью Oz. Найдите угол, образованный этой прямой с осью Ox, если известно, что он острый, и составьте канонические уравнения этой прямой.

21. Плоскость отсекает от оси Ox отрезок длиной 6, от оси Oy – длиной 2, от оси Oz – длиной 3. Определите, сколько плоскостей удовлетворяют этому условию. Найдите расстояние от начала координат до одной из таких плоскостей. Докажите, что расстояния от начала координат до каждой из таких плоскостей равны.

22. Нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости образует углы в 60° с осями Ox и Oy. Определите, сколько плоскостей, удовлетворяющих такому условию, удалены от начала координат на $\sqrt{6}$ и найдите их уравнения.

23. Докажите, что прямые $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ и $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$ скрещиваются и найдите расстояние между ними.

24. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; -1; 3)$ перпендикулярно двум плоскостям $2x - 2y + 3z - 1 = 0$ и $x - y + 2z - 1 = 0$.

25. Составьте параметрические уравнения линии пересечения двух плоскостей $2x + 3y + z - 2 = 0$ и $-3x - 5y + 2z - 2 = 0$.

26. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; -1; -1)$ и $B(-2; -3; 1)$ перпендикулярно плоскости $2x + 4y - 3z + 3 = 0$.

IV. Геометрическое тело удовлетворяет перечисленным ниже условиям.

1) Изобразите сечение тела координатной плоскостью, указанной в условии задачи. Определите вид кривых, ограничивающих сечение. Найдите координаты точек их пересечения.
2) Определите вид поверхностей, ограничивающих тело. Сделайте его схематический рисунок.

1. Тело ограничено поверхностями $4z = x^2 + y^2 + 12$ и $z = x^2 + y^2$ и содержит точку $M(0;0;1)$. Секущая плоскость: Oxz.

2. Тело ограничено поверхностями $4z = 16 - x^2 - y^2$ и $z = x^2 + y^2 - 1$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oyz.

3. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 + 16z^2 = 25$ и $25(x^2 + y^2) - 81z^2 = 144$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oxz.

4. Тело ограничено поверхностями $9z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + 16z^2 = 25$ и содержит точку $M(0;1;0)$. Секущая плоскость: Oyz.

5. Тело ограничено поверхностями $16(x^2 + y^2) + z^2 = 25$ и $25z^2 - 81(x^2 + y^2) = 144$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oxz.

6. Тело ограничено поверхностями $z = 9(x^2 + y^2)$ и $16(x^2 + y^2) = 25 - z^2$ и содержит точку $M(0;0;-1)$. Секущая плоскость: Oyz.

7. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ и $x^2 + y^2 = z^2 - 7$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oxz.

8. Тело ограничено поверхностями $9z = 5(x^2 + y^2)$ и $z + 4 = x^2 + y^2$ и содержит точку $M(0;0;-1)$. Секущая плоскость: Oyz.

9. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$, $x^2 + y^2 = 5 - z$ и $z = -1$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oxz.

10. Тело ограничено поверхностями $4(x^2 + y^2) = z^2$ и $z = x^2 + y^2 - 3$ и содержит точку $M(0;1;0)$. Секущая плоскость: Oyz.

11. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ и $9z = 4(x^2 + y^2)$ и содержит точку $M(0;0;-1)$. Секущая плоскость: Oxz.

12. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = 9$ и $9(x^2 + y^2) + 25z^2 = 225$ и содержит точку $M(0;4;0)$. Секущая плоскость: Oyz.

13. Тело ограничено поверхностями $y + 2z - 8 = 0$, $y - 2z - 8 = 0$ и $y = 0{,}5x^2$ и содержит точку $M(0;4;0)$. Секущая плоскость: Oxy.

14. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и содержит точку $M(2;0;0)$. Секущая плоскость: Oxz.

15. Тело ограничено поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$, $x + 2z = 3$ и $x - 2z = 3$ и содержит точку $M(0;0;1)$. Секущая плоскость: Oxz.

16. Тело ограничено поверхностями $z^2 - x^2 = 5$ и $x^2 + y^2 = 4$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oxz.

17. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = z^2 - 5$ и $4z^2 = 9(x^2 + y^2)$ и содержит точку $M(0;0;1)$. Секущая плоскость: Oxz.

18. Тело ограничено поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 = 16 - z^2$ и содержит точку $M(0;0;2)$. Секущая плоскость: Oyz.

19. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = 25 - z^2$ и $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ и содержит точку $M(-2;0;0)$. Секущая плоскость: Oxz.

20. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = z^2 + 5$ и $x^2 + y^2 = 9$ и содержит точку $M(0;2{,}5;0)$. Секущая плоскость: Oyz.

21. Тело ограничено поверхностями $z = x^2 + y^2 - 4$ и $4(x^2 + y^2) - (z - 4)^2 = 0$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oyz.

22. Тело ограничено поверхностями, $z + 4 = x^2 + y^2$ $z + y = 2$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oyz.

23. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = z^2 - 5$ и $25(x^2 + y^2) - 4z^2 = 64$ и содержит точку $O(0;0;0)$. Секущая плоскость: Oxz.

24. Тело ограничено поверхностями $2x = y^2$, $x + 2z = 8$ и $x - 2z = 8$ и содержит точку $M(4; 0; 0)$. Секущая плоскость: Oxz.

25. Тело ограничено поверхностями $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, $y + z = 3$ и $y - z = 3$ и содержит точку $M(0; 1; 0)$. Секущая плоскость: Oyz.

26. Тело ограничено поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 13$ и $x^2 + y^2 - z^2 = 5$ и содержит точку $M(3; 0; 0)$. Секущая плоскость: Oxz.

Типовой расчет по теме «Введение в математический анализ»

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Нахождение пределов различными способами.
II. Нахождение производных сложных функций.
III. Нахождение производных с помощью предварительного логарифмирования.
IV. Нахождение производных функций, заданных параметрически.
V. Исследование функций и построение их графиков.

Образцы решения задач по теме «Пределы»

Пример 1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to -3/2} \dfrac{14x^2+19x-3}{4x^2-9}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль в точке $x = -3/2$. Следовательно, в данном случае имеет место неопределенность типа 0/0. Для устранения неопределенности разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь:

$$\lim_{x\to -3/2} \frac{14x^2+19x-3}{4x^2-9} = \lim_{x\to -3/2} \frac{14(x-1/7)(x+3/2)}{(2x+3)(2x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to -3/2} \frac{(7x-1)(2x+3)}{(2x+3)(2x-3)} = \lim_{x\to -3/2} \frac{7x-1}{2x-3}.$$

Найдем предел непосредственной подстановкой:

$$\lim_{x\to -3/2} \frac{7x-1}{2x-3} = \frac{7(-3/2)-1}{2(-3/2)-3} = \frac{-23/2}{-6} = \frac{23}{12}.$$

Ответ: 23/12.

Пример 2. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль в точке $x = 3$. Следовательно, в данном случае имеет место неопределенность типа 0/0. Для ее устранения, во-первых, разложим на множители числитель, а во-вторых, умножим числитель и знаменатель на сумму корней, стоящих в знаменателе:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+1)(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x-2}\right)}{\left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}\right)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x-2}\right)}{5x+1-6x+2} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x-2}\right)}{3-x} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\left(-(x+1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x-2}\right)\right) = -(3+1)(4+4) = -32.$$

Ответ: – 32.

Пример 3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x^3+5x^2-1}{x^2\sqrt{9x^2+11}}$.

Решение. Числитель дроби стремится к $-\infty$, а знаменатель – к $+\infty$, поэтому получается неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для устранения неопределенности вынесем за скобку в числителе множитель x^3, а в подкоренном выражении знаменателя вынесем x^2.

Далее преобразуем дробь с учетом того, что $|x| = -\ x$ при $x < 0$ ($x \to -\infty$):

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{8x^3+5x^2-1}{x^2\sqrt{9x^2+11}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(8+5/x-1/x^3\right)}{x^2\sqrt{x^2\left(9+11/x^2\right)}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(8+5/x-1/x^3\right)}{x^2|x|\sqrt{9+11/x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(8+5/x-1/x^3\right)}{-x^3\sqrt{9+11/x^2}} = \lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{\left(8+5/x-1/x^3\right)}{\sqrt{9+11/x^2}}\right) = -\frac{8}{3}.$$

На последнем шаге принято во внимание, что функции $5/x$, $1/x^3$, $11/x^2$ являются бесконечно малыми при $x \to -\infty$.

Ответ: – 8/3.

Пример 4. Найдите предел $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{2x-3}\right)$.

Решение. В данном случае имеется неопределенность типа $\infty-\infty$. Для ее устранения умножим и разделим функцию на сумму корней:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{2x-3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{2x-3}\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{2x-3}\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{2x-3}} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x-3-2x+3}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{2x-3}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{2x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{|x|\left(\sqrt{1+2/x-3/x^2}+\sqrt{2/x-3/x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+2/x-3/x^2}+\sqrt{2/x-3/x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+2/x-3/x^2}+\sqrt{2/x-3/x^2}} = +\infty .$$

Ответ: $+\infty$.

Пример 5. Найдите предел $\lim\limits_{x\to0+0} \dfrac{\left(5^{\sqrt{x}}-1\right)\arcsin\left(x^2\sqrt{x}\right)}{\sqrt[5]{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}\,\log_5\left(1+(2\sin x)^2\right)}$.

Решение. Непосредственная замена аргумента функции числом $x = 0$ дает неопределенность типа 0/0. Чтобы избавиться от этой неопределенности, построим цепочку эквивалентных бесконечно малых (см. приложение) для каждого множителя в числителе и знаменателе дроби:

$$5^{\sqrt{x}}-1 \underset{x\to0}{\sim} \sqrt{x}\ln 5;\ \arcsin\left(x^2\sqrt{x}\right) \underset{x\to0}{\sim} x^2\sqrt{x};$$

$$\sqrt[5]{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{5}\operatorname{tg}^2\sqrt{x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{5}\left(\sqrt{x}\right)^2 = \frac{1}{5}x;$$

$$\log_5\left(1+(2\sin x)^2\right) \underset{x\to0}{\sim} \frac{(2\sin x)^2}{\ln 5} \underset{x\to0}{\sim} \frac{4x^2}{\ln 5}.$$

Используя принцип замены бесконечно малых множителей под знаком предела эквивалентными, получим

$$\lim_{x\to0+0} \frac{\left(5^{\sqrt{x}}-1\right)\arcsin\left(x^2\sqrt{x}\right)}{\sqrt[5]{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}\,\log_5\left(1+(2\sin x)^2\right)} = \lim_{x\to0+0} \frac{\sqrt{x}\ln 5\cdot x^2\sqrt{x}}{\dfrac{x}{5}\cdot\dfrac{4x^2}{\ln 5}} =$$

$$= \lim_{x\to0+0} \frac{5x^3\ln^2 5}{4x^3} = \frac{5\ln^2 5}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{5\ln^2 5}{4}$.

Пример 6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{8}{16x^2-8\pi x+\pi^2}}$.

Решение. Введем обозначение: $f(x)=\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{8}{16x^2-8\pi x+\pi^2}}$. С помощью непосредственной подстановки в данную функцию числа $x=\pi/4$, получим неопределенность типа 1^{∞}. Прологарифмируем эту функцию: $\ln f(x)=\dfrac{8\ln\left(\cos(x-\pi/4)\right)}{16x^2-8\pi x+\pi^2}$. Последнее выражение в точке $x=\pi/4$ представляет собой неопределенность типа 0/0. Для устранения этой неопределенности найдем $\lim\limits_{x\to\pi/4}\ln f(x)$ с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi/4}\ln f(x)=\lim_{x\to\pi/4}\frac{8\ln\cos(x-\pi/4)}{16x^2-8\pi x+\pi^2}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\left(8\ln\cos(x-\pi/4)\right)'}{\left(16x^2-8\pi x+\pi^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/4}\frac{8\left(-\sin(x-\pi/4)\right)}{(32x-8\pi)\cos(x-\pi/4)}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\operatorname{tg}(x-\pi/4)}{4x-\pi}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\operatorname{tg}'(x-\pi/4)}{(4x-\pi)'}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-1}{4\cos^2(x-\pi/4)}=-\frac{1}{4}.$$

Таким образом, получили $\lim\limits_{x\to\pi/4}\ln f(x)=-\dfrac{1}{4}$. В силу непрерывности логарифмической функции отсюда следует, что $\ln\left(\lim\limits_{x\to\pi/4}f(x)\right)=-\dfrac{1}{4}$.

Значит, $\lim\limits_{x\to\pi/4}f(x)=e^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

Замечания. 1) В примере 6 при нахождении предела $\lim\limits_{x\to\pi/4}\ln f(x)$ правило Лопиталя было применено дважды. Однако в примерах такого типа можно комбинировать правило Лопиталя с принципом замены бесконечно малых множителей под знаком предела эквивалентными.

2) Аналогичным образом можно раскрывать неопределенности типов 0^0 и ∞^0.

Пример 7. Найдите производную функции $f(x)=y=2^{\mathrm{tg}^2 x}$ и ее значение в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Для нахождения производной применим правило дифференцирования сложной функции (см. приложение). Представим данную функцию в виде цепочки простых функций с помощью введения промежуточных аргументов: $y=2^u,\ u=v^2,\ v=\mathrm{tg}x$. Тогда, согласно упомянутому правилу, получим

$$f'(x)=\left(2^u\right)'_u\cdot\left(v^2\right)'_v\cdot\left(\mathrm{tg}x\right)'_x=2^u\ln 2\cdot 2v\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Нижние индексы указывают, по каким переменным находились производные. Таким образом, операция дифференцирования выполнена. Осталось вернуться к исходной переменной:

$$f'(x)=2^{\mathrm{tg}^2 x}\ln 2\cdot 2\mathrm{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=2^{\mathrm{tg}^2 x+1}\ln 2\cdot\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}=2^{\mathrm{tg}^2 x+1}\mathrm{tg}x\left(\mathrm{tg}^2 x+1\right)\ln 2$$

Найдем значение полученной производной в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2^{\mathrm{tg}^2(\pi/4)+1}\mathrm{tg}(\pi/4)\left(\mathrm{tg}^2(\pi/4)+1\right)\ln 2=8\ln 2.$$

Ответ: $2^{\mathrm{tg}^2 x+1}\mathrm{tg}x\left(\mathrm{tg}^2 x+1\right)\ln 2$; $8\ln 2$.

Пример 8. Найдите производную функции $f(x)=2x\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}$ и ее значение в точке $x_0=\dfrac{1}{4}$.

Решение. Применим формулу производной произведения. С учетом того, что $x\sqrt{x}=x^{3/2}$, получим

$$f'(x)=2\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+x\sqrt{x}\cdot\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'_{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'_x\right).$$

В данном выражении использовано правило дифференцирования сложной функции без введения промежуточного аргумента в явной форме. Дальнейшие преобразования дают

$$f'(x)=2\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot 2\sqrt{x}}\right)=3\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x}}.$$

Найдем значение производной в точке $x_0 = \dfrac{1}{4}$:

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \arcsin\frac{1}{2} + \frac{1/2}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $3\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$; $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 9. Найдите производную функции $f(x) = \left(x^4 + 3x\right)^{\sin \pi x}$ с помощью предварительного логарифмирования.

Решение. Для нахождения производных степенно-показательных функций $f(x) = p(x)^{q(x)}$, а также функций, представляющих собой произведение нескольких множителей $f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)$, применяют предварительное логарифмирование. Прологарифмируем заданную функцию: $\ln f(x) = \sin \pi x \cdot \ln\left(x^4 + 3x\right)$. Найдем производные левой и правой частей полученного выражения:

$$\left(\ln f(x)\right)' = \left(\sin \pi x\right)' \cdot \ln\left(x^4 + 3x\right) + \sin \pi x \cdot \left(\ln\left(x^4 + 3x\right)\right)'.$$

С учетом правила дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \pi \cos \pi x \cdot \ln\left(x^4 + 3x\right) + \sin \pi x \cdot \frac{4x^3 + 3}{x^4 + 3x}.$$

Из последнего выражения следует, что

$$f'(x) = f(x)\left(\pi \cos \pi x \cdot \ln\left(x^4 + 3x\right) + \sin \pi x \cdot \frac{4x^3 + 3}{x^4 + 3x}\right) =$$

$$= \left(x^4 + 3x\right)^{\sin \pi x}\left(\pi \cos \pi x \cdot \ln\left(x^4 + 3x\right) + \sin \pi x \cdot \frac{4x^3 + 3}{x^4 + 3x}\right)$$

.

Ответ: $\left(x^4 + 3x\right)^{\sin \pi x}\left(\pi \cos \pi x \cdot \ln\left(x^4 + 3x\right) + \sin \pi x \cdot \dfrac{4x^3 + 3}{x^4 + 3x}\right)$.

Пример 10. Найдите первую $\dfrac{df}{dx}$ и вторую $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ производные функции $y = f(x)$, заданной параметрически $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t + t^{-1} \end{cases}$.

Решение. Первая производная функции, заданной параметрически, имеет вид $\frac{df}{dx}=\frac{df}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{y'_t}{x'_t}$. Найдем x'_t и y'_t:

$$x'=3t^2-3\,,\ y'_t=1-t^{-2}=\frac{t^2-1}{t^2}\,.$$

Следовательно, $\frac{df}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t^2-1}{t^2\left(3t^2-3\right)}=\frac{1}{3}t^{-2}$.

Вторая производная равна $\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{y''_{xt}}{x'_t}$.

Найдем y''_{xt}, т. е. числитель дроби: $y''_{xt}=\left(y'_x\right)'_t=\frac{1}{3}\cdot(-2)\cdot t^{-3}=-\frac{2}{3t^3}$.

Знаменатель дроби x'_t найден ранее. Окончательно получим

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{y''_{xt}}{x'_t}=-\frac{2}{3t^2}:\left(3t^2-3\right)=-\frac{2}{9\left(t^4-t^2\right)}\,.$$

Ответ: $\frac{1}{3t^2},\ -\frac{2}{9\left(t^4-t^2\right)}$.

Образцы решения задач по теме «Исследование функций и построение их графиков»

План исследования функции

1. Найти область определения функции и область ее непрерывности, исследовать точки разрыва.
2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной, или ни той, ни другой.
3. Произвести исследование с помощью первой производной (найти промежутки монотонности и экстремумы).
4. Произвести исследование с помощью второй производной (найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба).
5. Найти уравнения вертикальных и наклонных асимптот графика функции.
6. Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат или иных контрольных точек.
7. Построить график функции.

Пример 11. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$ и постройте ее график.

Решение. 1. Функция определена на всей числовой оси, за исключением точки $x = 0$. Значит, ее область определения и совпадающая с ней область непрерывности имеет вид $(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 0$:

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{3x-2}{x^3}=+\infty,\ f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{3x-2}{x^3}=-\infty.$$

Таким образом, функция имеет в точке $x = 0$ бесконечный разрыв.

2. Найдем $f(-x)$:

$f(-x)=\dfrac{-3x-2}{-x^3}=\dfrac{3x+2}{x^3}$. Поскольку $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$ $\left(\dfrac{3x+2}{x^3}\neq\dfrac{3x-2}{x^3}\text{ и }\dfrac{3x+2}{x^3}\neq-\dfrac{3x-2}{x^3}\right)$, функция $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$ не является ни четной, ни нечетной. В этом случае функцию часто называют функцией общего вида.

3. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{3x-2}{x^3}\right)'=\frac{3x^3-3x^2(3x-2)}{x^6}=\frac{3x^2(x-3x+2)}{x^6}=\frac{6(1-x)}{x^4}.$$

Производная не определена в точке $x = 0$ и обращается в ноль в точке $x = 1$. Дальнейшее исследование оформим в виде таблицы.

Табл. 1

	$(-\infty;0)$	0	(0; 1)	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	не определ.	+	0	–
$f(x)$	возрастает	не определ.	возрастает	максимум	убывает

В первой строке табл. 1 указаны промежутки, на которые точки $x = 0$ и $x = 1$ разбивают числовую ось и граничные точки этих промежутков. Во второй строке указаны знаки производной на каждом промежутке и ее значения в граничных точках. В третьей строке указано, как ведет себя функция на соответствующем промежутке.

Из таблицы следует, что функция возрастает на промежутках $(-\infty;0)$ и (0; 1), а убывает на промежутке $(1;+\infty)$. В точке $x = 1$ функция имеет максимум, который равен $y_{\max}=f(1)=\dfrac{3-2}{1}=1$.

4. Найдем $f''(x)$:

$$f''(x)=\left(\frac{6(1-x)}{x^4}\right)'=6\frac{(-1)x^4-4x^3(1-x)}{x^8}=6\frac{x^3(-x-4+4x)}{x^8}=\frac{6(3x-4)}{x^5}.$$

Вторая производная не определена в точке $x = 0$ и обращается в ноль в точке $x = 4/3$. Дальнейшее исследование оформим в виде таблицы, аналогичной табл. 1.

Табл. 2

	$(-\infty;0)$	0	(0; 4/3)	4/3	$(4/3;+\infty)$
$f''(x)$	+	не определ.	–	0	+
$f(x)$	$\cup$	не определ.	$\cap$	т. перегиба	$\cup$

В табл. 2 символ «$\cup$» означает, что график функции представляет собой вогнутую (выпуклую вниз) кривую, а символ «$\cap$» – выпуклую (выпуклую вверх) кривую.

Таким образом, график является выпуклым вниз на промежутках $(-\infty;0)$ и $(4/3;+\infty)$, и выпуклым вверх – на промежутке (0; 4/3). Точка $x = 4/3$ представляет собой точку перегиба. Значение функции в точке перегиба равно $y_{пер.} = f(4/3) = \dfrac{(4-2)27}{64} = \dfrac{27}{32}$.

5. Поскольку в точке $x = 0$ функция имеет бесконечный разрыв, вертикальная прямая $x = 0$, проходящая через эту точку, т. е. ось Oy является вертикальной асимптотой графика функции.

Найдем наклонную асимптоту, заданную уравнением $y = k\,x + b$, в котором параметры k и b определяются по формулам

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x},\ \ b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big).$$

При этом если $x \to +\infty$ получим параметры k и b правой наклонной асимптоты, а если $x \to -\infty$ – левой. В нашем случае

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-2}{x^4} = 0\ ,\ \ b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-2}{x^3} = 0.$$

Следовательно, горизонтальная прямая $y = 0$, т. е. ось Ox является горизонтальной асимптотой графика данной функции (частный случай наклонной асимптоты).

6. Координаты точек пересечения графика функции с осью Ox найдем, решив систему $\begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. В нашем случае получим $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{x^3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 0 \end{cases}$.

График функции пересекает ось Ox в единственной точке (2/3; 0).

Координаты точки пересечения графика функции с осью Oy находятся из системы $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases}$. Поскольку точка $x = 0$ не входит в область определения исследуемой функции, ее график не пересекает ось Oy.

7. График функции, построенный с помощью проведенного исследования, представлен на рис. 3.

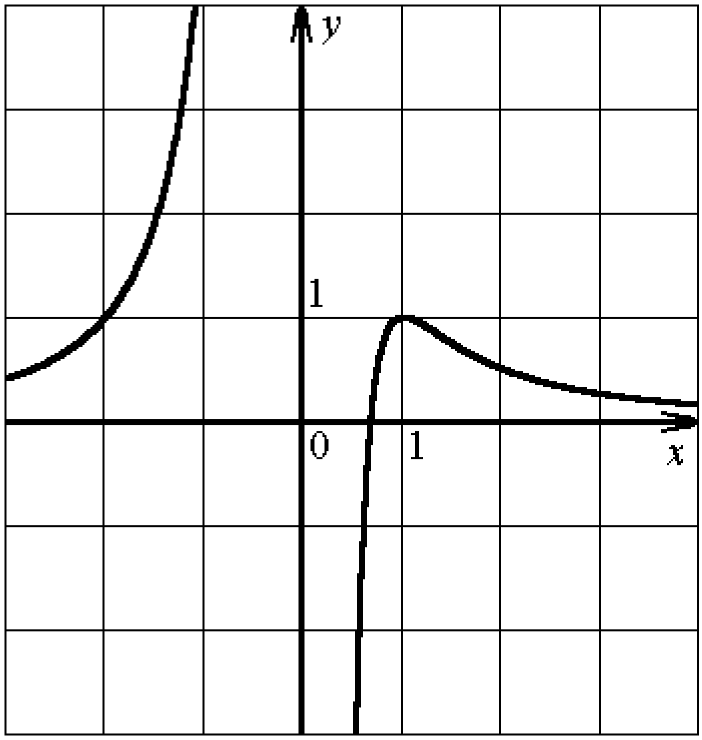


Рис. 3

Пример 12. Исследуйте функцию $f(x)=\sqrt[3]{x^3-1{,}5x^2}$ и постройте ее график.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, т.е. ее область определения и непрерывности имеет вид $(-\infty;+\infty)$.

2. Найдем $f(-x)$:

$$f(-x)=\sqrt[3]{-x^3-1{,}5x^2}=-\sqrt[3]{x^3+1{,}5x^2}.$$

Поскольку $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, т. е. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-1{,}5x^2}$ – функция общего вида.

3. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{-2/3}\cdot\left(x^3-1{,}5x^2\right)'=$$

$$=\frac{3x^2-3x}{3\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{2/3}}=\frac{x^2-x}{\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{2/3}}.$$

Первая производная равна нулю при x = 1 и не определена при x = 0 и при x = 1,5. Эти точки разбивают числовую ось на четыре промежутка. Дальнейшее исследование оформим в виде табл. 3, аналогичной табл. 1.

Табл. 3

	$(-\infty;0)$	0	(0; 1)	1	(1; 1,5)	1,5	$(1,5;+\infty)$
$f'(x)$	+	не опр.	–	0	+	не опр.	+
$f(x)$	возрастает	максим.	убывает	минимум	возрастает	нет экстрем.	возрастает

Согласно табл. 3, в точке $x = 0$ производная не определена и меняет знак с « + » на « – », причем сама функция определена в этой точке. Значит, точка $x = 0$ является точкой *острого* максимума. При переходе через точку $x = 1{,}5$ производная не меняет знак, следовательно, в этой точке экстремума нет.

Таким образом, функция возрастает на промежутках $(-\infty;0)$ и $(1;+\infty)$, а убывает на промежутке (0: 1). В точке $x = 0$ функция имеет острый максимум, равный $y_{\max} = f(0) = 0$, а в точке $x = 1$ – гладкий минимум, равный $y_{\min} = f(1) = \sqrt[3]{1-1{,}5} = -\sqrt[3]{0{,}5} \approx -0{,}8$.

4. Найдем $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - x}{\left(x^3 - 1{,}5x^2\right)^{2/3}} \right)' =$$

$$= \frac{(2x-1)\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{2/3} - \frac{2}{3}\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{-1/3}\left(3x^2-3x\right)\left(x^2-x\right)}{\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{4/3}} =$$

$$= \frac{(2x-1)\left(x^3-1{,}5x^2\right) - 2\left(x^2-x\right)^2}{\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{5/3}} =$$

$$= \frac{2x^4 - x^3 - 3x^3 + 1{,}5x^2 - 2x^4 + 4x^3 - 2x^2}{\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{5/3}} = -\frac{0{,}5x^2}{\left(x^3-1{,}5x^2\right)^{5/3}}.$$

Вторая производная не определена в двух точках $x = 0$ и $x = 1{,}5$, которые разбивают числовую ось на три промежутка. Дальнейшее исследование оформим в виде табл. 4, аналогичной табл. 2.

Табл. 4

	$(-\infty;0)$	0	(0; 1,5)	1,5	$(1,5;+\infty)$
$f''(x)$	+	не определ.	+	не определ.	–
$f(x)$	$\cup$	максимум	$\cup$	т. перегиба	$\cap$

Согласно табл. 4, график является выпуклым вниз на промежутках $(-\infty;0)$ и (0; 1,5), и выпуклым вверх на промежутке $(1,5;+\infty)$. Точка x = 1,5 является точкой перегиба, причем, согласно табл. 3, в этой точке не определена и не меняет знак первая производная, значит, касательная к графику параллельна оси *Oy*. Значение функции в точке перегиба равно $y_{пер.} = f(1,5) = 0$.

5. Найдем точки пересечения графика с осью *Ox*:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 1,5x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2(x-1,5)} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 0 \end{cases}.$$

График пересекает ось *Oy* в двух точках (0; 0) и (0; 1,5). Точка пересечения графика с осью *Oy* – уже найденная точка (0; 0).

6. График не имеет вертикальных асимптот, поскольку функция непрерывна на всей числовой оси.

Найдем параметры k и b наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1,5x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 - 1,5x^2}{x^3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1 - 1,5x^{-1}} = 1.$$

В данном случае значение предела не зависит от того к $+\infty$ или к $-\infty$ стремится x.

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 1,5x^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{1 - 1,5x^{-1}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - 1,5x^{-1}} - 1}{x^{-1}}.$$

Для нахождения последнего предела воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых:

$$\sqrt[3]{1 - 1,5x^{-1}} - 1 = \left(1 - 1,5x^{-1}\right)^{1/3} - 1 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{-1,5x^{-1}}{3} = -0,5x^{-1}.$$

С учетом этого получим

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1-1,5x^{-1}}-1}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-0,5x^{-1}}{x^{-1}} = -0,5$. Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = x - 0,5$.

7. График функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1,5x^2}$, построенный на основании проведенного исследования, представлен на рис. 4.

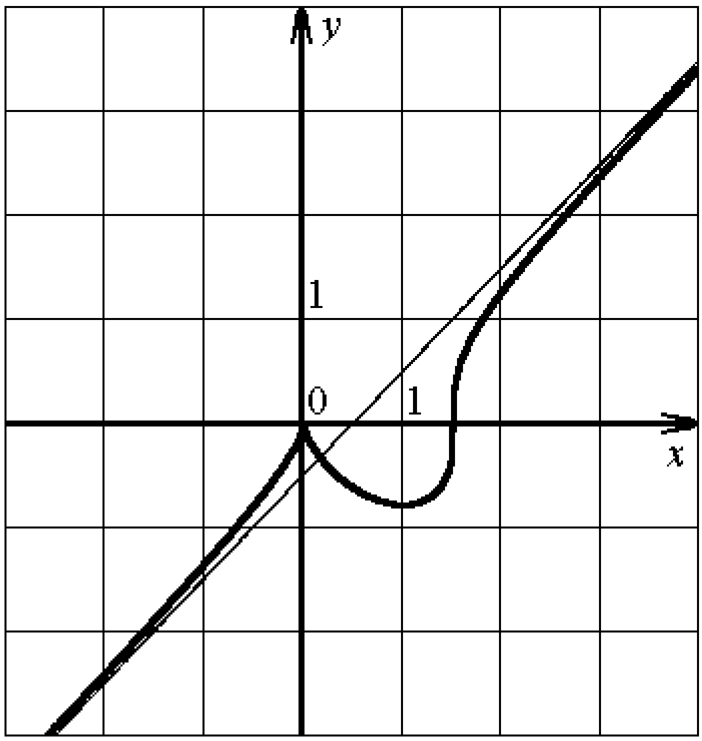


Рис. 4

Расчетные задания

I. Вычислите пределы: а), б), в) – без применения правила Лопиталя; г) – с помощью правила Лопиталя

1. а) $\lim\limits_{x\to -2/3}\dfrac{6x^2+x-2}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos\pi x)}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{6x^2+x-2}{2x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\arcsin^2(x/2)}-1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+0}(x)^{\frac{1}{x+\ln x}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 2/3}\dfrac{3x^2+x-2}{6x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\pi^{\operatorname{arctg}^2 2x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\arccos x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1-\sin^2 2x}-1}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+5x-2}{6x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\operatorname{tg}2x}{\log_2\left(1-x\operatorname{tg}2x\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\cos(x-\pi/4)\right)^{\frac{16}{(4x-\pi)^2}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{2x-8}-2}{x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt{4x^2+1}}{3x^2-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+0,5\arcsin^2 2x\right)}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x\sqrt{9x^2-1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\mathrm{ctg}^2 x\sqrt{2x}\right)\ln^2\left(1+2x\sqrt{x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+6}-4}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-4}{x^2\sqrt{9x^2+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x-1}{e^{2x\sin(x/3)}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2-0}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x\sqrt{4x^2-x}}{5x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\mathrm{arc\,tg}^2 2\sqrt{3x}}{\ln\left(1-9\sin\dfrac{x}{3}\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x+1\right)^{\mathrm{ctg}x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{4-\sqrt{5x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9x-8}{x\sqrt{4x^2+3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3x\right)\mathrm{ctg}2{,}5x$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 3/2}\dfrac{4x^2-9}{2x^2-x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^4/2}-1}{\mathrm{arctg}^2(x^2/2)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x+1\right)^{3/\sqrt{x}}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to -2/3}\dfrac{3x^2-4x-4}{9x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}5x\sqrt{\dfrac{16x^2+1}{4x^4+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\left(2-3^x\right)}{\sin^2 2\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 1/5}\dfrac{5x^2+9x-2}{25x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 1{,}5x}{1-\cos 2{,}5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\sin x+1\right)^{\ln x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to -3/4}\dfrac{16x^2-9}{4x^2-x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x\sqrt{9x^2+4}}{9-4x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{1-\sqrt[5]{1+10x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x+3\right)^{1/\ln x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{\sqrt{7x-3}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2,1x^2+0,2x-0,7}{0,55x-0,75x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+12\mathrm{tg}^2 x}-1}{5^{x\sin 2x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\frac{2}{3x}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{13-x}}{x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{0,75+3,25x-8,75x^2}{2,5x^2-7,5x+0,5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^3+4x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{16x^4-1}{8x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2-4x+1}{x\sqrt{9x^2+4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{1+6\sin x}}$; г) $\lim\limits_{x\to \pi/2+0}\left(\mathrm{tg}x\right)^{\mathrm{sin2x}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^4-16}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+10\sin x}-1}{\mathrm{arctg}5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{6x^2+5x-4}{8x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{5}{12}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}}{\frac{8}{5}x^2-\frac{10}{3}x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\mathrm{tg}^2 x}-1}{x\ln(1+2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(2-e^x\right)^{\mathrm{ctg}3x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to -4/3}\dfrac{9x^2-16}{6x^2+5x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{5-8x^3}}{6x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{\sqrt[4]{1+2\sin^2 x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x^2)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 4/3}\dfrac{6x^2-5x-4}{9x^2-16}$; б); $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{10}{3}x^3+\frac{5}{9}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}}{\frac{12}{5}x-\frac{5}{12}x^3}$

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\operatorname{arctg} x\sqrt{3x}}{\sqrt{x}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3-2x^2\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{8x^3+1}{6x^2-5x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-1}}{\sqrt[3]{8x^3+2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{3^{\arcsin^2 x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x+1\right)^{\frac{1}{2x}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-\sqrt{4x-7}}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3,7-2,4x+1,8x^2}{5,2+4x-4,5x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x\sin(x/2)}-1}{\ln\left(1-4\operatorname{tg}^2(x/7)\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^x$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{4x-7}-\sqrt{5-2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2,8-3,2x+2,5x^2+4,2x^3}{1,8+2,1x-3,6x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\arcsin^2(x\sqrt{3x})}{\operatorname{tg}^3(2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\sin x\right)^{1/\cos x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^4-81}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{2x+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3-2x^2}{1-\cos^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x)^{\frac{2}{x-\ln x}}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-81}{x^3+27}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}+x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\left(1+x\sin^2\sqrt{x}\right)}{\operatorname{tg}x-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\operatorname{tg}x\right)^{\frac{1}{4x-\pi}}$.

II. Найдите производную функции $f(x)$ и ее значение в заданной точке x_0

1. $f(x)=4^x\sin\dfrac{\pi(2x+1)}{2};\quad x_0=\dfrac{1}{2}$
2. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}};\quad x_0=8$
3. $f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x};\quad x_0=\dfrac{1}{\pi}$
4. $f(x)=x\log_4\left(4^x+4^{-x}\right);\quad x_0=0$
5. $f(x)=\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{2};\quad x_0=\dfrac{1}{2}$
6. $f(x)=\arcsin\sqrt{2x};\quad x_0=\dfrac{1}{4}$
7. $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1};\quad x_0=\sqrt{2}$
8. $f(x)=\log_2\left(\sin 2^x\right);\quad x_0=\log_2\dfrac{\pi}{4}$
9. $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x};\quad x_0=\dfrac{2}{\pi}$
10. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(2x\sqrt{x}\right);\quad x_0=\dfrac{1}{4}$
11. $f(x)=\arcsin\sqrt{1-e^{2x}};\quad x_0=\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
12. $f(x)=e^{\cos(\ln x)};\quad x_0=e^{\pi/3}$
13. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-1}{e^x+1};\quad x_0=\dfrac{1}{2}$
14. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+5}-x\right);\quad x_0=2$
15. $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{x+1};\quad x_0=4$
16. $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1};\quad x_0=\ln 5$
17. $f(x)=\cos e^x+e^x\sin e^x;\quad x_0=\ln\dfrac{\pi}{3}$
18. $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1};\quad x_0=4$
19. $f(x)=x\ln(\sin x+\cos x);\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$

20. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2-16}+x\right); \quad x_0=5$

21. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right); \quad x_0=\dfrac{3}{2}$

22. $f(x)=\left(x^2+2x\right)\sin\left(\ln x\right); \quad x_0=e^{\pi/2}$

23. $f(x)=\sin(\ln x)-(\ln x)\cos(\ln x); \quad x_0=e^{\pi/2}$

24. $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-x}{e^x}}; \quad x_0=0$

25. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right); \quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$

26. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}; \quad x_0=\ln 2$

III. Найдите производную функции $f(x)$ с помощью предварительного логарифмирования

1. $f(x)=(6x-5)^{\operatorname{arctg} x}$
2. $f(x)=(\sin x)^{2x-3}$
3. $f(x)=(\operatorname{tg}x)^{\sqrt{x}}$
4. $f(x)=(\cos x)^{e^x}$
5. $f(x)=\left(1+x^2\right)^{1/x}$
6. $f(x)=(0,5x+1)^{\sin^2 x}$
7. $f(x)=(\sin x)^{\sqrt[4]{x}}$
8. $f(x)=(\arcsin x)^{\sqrt{x}}$
9. $f(x)=(\sin x)^{e^x}$
10. $f(x)=(3x+2)^{\arcsin x}$
11. $f(x)=(\cos x)^{x^2}$
12. $f(x)=\left(1+5x\right)^{\sqrt[5]{x}}$
13. $f(x)=(10x+7)^{\operatorname{tg}x}$
14. $f(x)=(\operatorname{tg}x)^{3x-5}$
15. $f(x)=(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}$
16. $f(x)=(\operatorname{ctg}x)^{\sqrt{x}}$
17. $f(x)=x^{(1-x)/x}$
18. $f(x)=(4x+9)^{\arcsin x}$
19. $f(x)=\left(2x^3-3x\right)^{1-x}$
20. $f(x)=\left(3x^2+2x\right)^{\cos x}$
21. $f(x)=(\operatorname{ctg} x)^{7x-5}$
22. $f(x)=(\arcsin x)^{5x+7}$
23. $f(x)=\left(1+x^3\right)^{\sin x}$
24. $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$
25. $f(x)=\left(x^2+2x\right)^{\ln x}$
26. $f(x)=(\operatorname{tg} x)^{x^3}$

IV. Функция $y = f(x)$ задана параметрически. Найдите

1) первую производную $\dfrac{df}{dx}$ данной функции;

2) вторую производную $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ данной функции

1. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^4} \\ y = \arcsin t^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^4 \\ y = \ln\left(1+t^4\right) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \arcsin e^t \\ y = \sqrt{1-e^{2t}} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = e^{-\cos^2 t} \\ y = e^{-\sin^2 t} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \operatorname{tg}^2 t \\ y = \ln\cos t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t} \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \sqrt{t}\Big/\left(\sqrt{t}+1\right) \\ y = \ln\left(\sqrt{t}+1\right) \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 3\sin^2 t \\ y = 2\cos^3 t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^t \\ y = \ln\left(1+e^{2t}\right) \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = e^t\Big/\left(e^t+1\right) \\ y = \ln\left(e^t+1\right) \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}^2 t \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = 2 - \sin 2t \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\left(3t+2t^3\right) \\ y = te^{t^2} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = te^{-t^2} \\ y = \dfrac{1}{3}\left(3t-2t^3\right) \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \sqrt{1-e^{2t}} \\ y = \arccos e^t \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = 1\Big/\sqrt{t^2+1} \\ y = \sqrt{t^2+1}\Big/t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \sqrt{1-2t} \\ y = \arccos\sqrt{2t} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 2t\sqrt{t} \\ y = t + 2\sqrt{t} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t^2 + t^{-2} \\ y = t^5 - 5t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = t\cos t - \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \cos + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

V. Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте ее график

1. $f(x) = xe^{1/x}$

2. $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$

3. $f(x) = xe^{0,5\left(1-x^2\right)}$

4. $f(x) = \dfrac{e\ln x}{x}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$

6. $f(x) = x - 1,5\sqrt[3]{x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

8. $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{x^2}$

9. $f(x) = 1,5\sqrt[3]{x^2} - x$

10. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 2x^3}$

11. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2}$

12. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

13. $f(x) = e^{1/(2-x)}$

14. $f(x) = \left(x^2 + 2\right)e^{-x^2}$

15. $f(x) = e^{2x-x^2}$

16. $f(x) = x^2 e^{1-x^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-3}$

18. $f(x) = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$

19. $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

20. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

21. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

22. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$

23. $f(x) = x^2 e^{1-x}$

24. $f(x) = x\operatorname{arctg} x$

25. $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2}$

26. $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

Приложение

Эквивалентные бесконечно малые

1. $\sin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$	**6.** $e^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$
2. $\mathrm{tg}\,\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$	**7.** $a^{\alpha(x)}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)\ln a$
3. $1-\cos\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha^2(x)/2$	**8.** $\ln\left(1+\alpha(x)\right) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$
4. $\arcsin\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$	**9.** $\log_a\left(1+\alpha(x)\right) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)/\ln a$
5. $\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \alpha(x)$	**10.** $\left(1+\alpha(x)\right)^{\mu}-1 \underset{\alpha(x)\to 0}{\sim} \mu\alpha(x)$

Таблица производных

1. $C'=0\ (C=const)$	**9.** $(\sin x)'=\cos x$
2. $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$	**10.** $(\cos x)'=-\sin x$
3. $\left(\sqrt{x}\right)'=1\Big/\left(2\sqrt{x}\right)$	**11.** $(\mathrm{tg}x)'=1\big/\cos^2 x$
4. $(1/x)'=-1\big/x^2$	**12.** $(\mathrm{ctg}x)'=-1\big/\sin^2 x$
5. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	**13.** $(\arcsin x)'=1\Big/\sqrt{1-x^2}$
6. $\left(e^x\right)'=e^x$	**14.** $(\arccos x)'=-1\Big/\sqrt{1-x^2}$
7. $(\log_a x)'=1/(x\ln a)$	**15.** $(\mathrm{arctg}x)'=1\Big/\left(1+x^2\right)$
8. $(\ln x)'=1/x$	**16.** $(\mathrm{arcctg}x)'=-1\Big/\left(1+x^2\right)$

Основные формулы дифференцирования

1. $\left(Cf(x)\right)'=C\left(f(x)\right)'$ **2.** $\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'(x)\pm v'(x)$

3. $\left(u(x)v(x)\right)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ **4.** $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

5. $\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)'_x=f'_\varphi\cdot\varphi'_x$

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

Кафедра высшей математики

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1930 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон. С 1944 по 1973 г. кафедрой заведовал В.А. Тартаковский – выдающийся математик и замечательный педагог.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицин, проф. И.А. Молотков.

В 1979 году кафедру ВМ возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярев, специалист по теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университете по дисциплине «Высшая математика» и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ВМ является самой многочисленной кафедрой в университете по числу преподавателей. В настоящее время на кафедре ВМ работают такие выдающиеся ученые как профессора В.В. Жук, А.П. Качалов, Г.П. Мирошниченко, А.Г. Петрашень, В.П. Смирнов, В.М. Уздин, В.Ю. Тертычный – член Нью-Йоркской академии.

На кафедре ВМ сложилась научная школа по математическому моделированию сложных физических систем, активно развиваются направления, связанные с нанотехнологиями, квантовыми компьютерами и квантовыми технологиями. Сложилось тесное сотрудничество с крупными научными центрами, как в России, так и за рубежом.

Типовые расчеты по высшей математике

Методические указания и задачи
для студентов вечернего отделения

I семестр

Составители: О. И. Судавная, С. В. Фролов
В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка О. И. Судавная
Рисунки Л. И. Судавная, С. В. Фролов
Дизайн обложки О. И. Судавная
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД №00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных
технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ