Содержание

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами порядка n имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad \text{где } a_j = \text{const}, \ (j = 0, \ldots, n). \tag{1}$$

Чтобы его решить, необходимо составить характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2}$$

и найти все его корни: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_je^{\lambda_jx}$ для каждого простого корня λ_j уравнения (2) и слагаемых вида

$$(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$$

для каждого кратного корня λ кратности k уравнения (2). Здесь все C_j — произвольные постоянные.

Если все коэффициенты a_j уравнения (1) вещественные, то слагаемые, отвечающие комплексным корням $\lambda = \alpha \pm i\beta$ уравнения (2), можно записать в вещественной форме:

$$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если эти корни простые, и

$$P_{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1}, Q_{k-1} — многочлены от x степени $k-1$. Их коэффициенты — произвольные постоянные.

П р и м е р. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 4y'' + 5y' = 0$, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 13$.

Р е ш е н и е. Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Общее решение дифференциального уравнения

$$y = c_1 + c_2e^{2x}\cos x + c_3e^{2x}\sin x.$$

Для того, чтобы воспользоваться начальными условиями, найдем y' и y'':

$$y' = 2c_2e^{2x}\cos x - c_2e^{2x}\sin x + 2c_3e^{2x}\sin x + c_3e^{2x}\cos x,$$

$$y'' = 3c_2e^{2x}\cos x - 4c_2e^{2x}\sin x + 3c_3e^{2x}\sin x + 4c_3e^{2x}\cos x.$$

Подставим в общее решение y, в y' и в y'' начальные условия и решим полученную систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5, \\ 2c_2 + c_3 = 7, \\ 3c_2 + 4c_3 = 13. \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 3, \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

Подставив в общее решение полученные значения постоянных, получим частное решение

$$y = 2 + 3e^{2x}\cos x + e^{2x}\sin x.$$

О т в е т: $y = 2 + 3e^{2x}\cos x + e^{2x}\sin x$.

Контрольное задание 1

В каждом варианте найти частное решение линейного однородного уравнения с заданными начальными условиями:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
3. $y'' - 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$
4. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6,\ y'(0) = 10.$
5. $y'' + 12y' + 36y = 0, \quad y(0) = 6,\ y'(0) = 0.$
6. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
7. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$
8. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 2.$
9. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1.$
10. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 15.$
11. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$
12. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 8.$
13. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$
14. $y'' + 7y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
15. $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2.$
16. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 2.$
17. $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = -1,\ y'(1) = 0.$
18. $y'' - 2y' = 0, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = -2.$
19. $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$
20. $y'' + 2y' = 0, \quad y(1) = -3,\ y'(1) = 0.$
21. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$
22. $y'' + y' = 0, \quad y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0.$
23. $y'' - 5y' = 0, \quad y(-2) = 0,\ y'(-2) = 0.$