ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

И.В. Ходяков

Пример выполнения курсовой работы по теоретической механике для студентов специальностей 180103 «Судовые энергетические установки» и 270112 «Водоснабжение и водоотведение»

Мурманск

2007 г.

Указания по выбору рисунка и варианта и рекомендации по оформлению курсовой работы

Номер рисунка выбирается по двум последним цифрам шифра студента, если это число не превышает 30-ти, в противном случае номер рисунка определяется результатом суммирования трех последних цифр шифра студента. Числовые значения параметров каждой задачи выбираются в соответствии с номером варианта. Вариант определяется по таблице 0.1

Решение задач курсовой работы оформляется на листах писчей бумаги формата А4: первый лист – титульный, второй лист – содержание, последний лист – список литературы. На рисунках по возможности должны быть указаны все величины, входящие в формулы. Решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями. Расчеты достаточно производить с инженерной точностью (результаты расчетов округлять до трех значащих цифр).

Таблица 0.1

№ п/п	Специальность (курс)	Номер варианта
1	180103 (1у)	1
2	180103 (2)	2
3	270112 (2)	3
4	260501 (1у)	4
5	260501 (2)	5
6	260302 (1у)	6
7	260302 (2)	7

Курсовая работа по теоретической механике

«Исследование движения механической системы»

Задача 1

«Исследование движения механической системы с помощью теоремы об изменении кинетического момента»

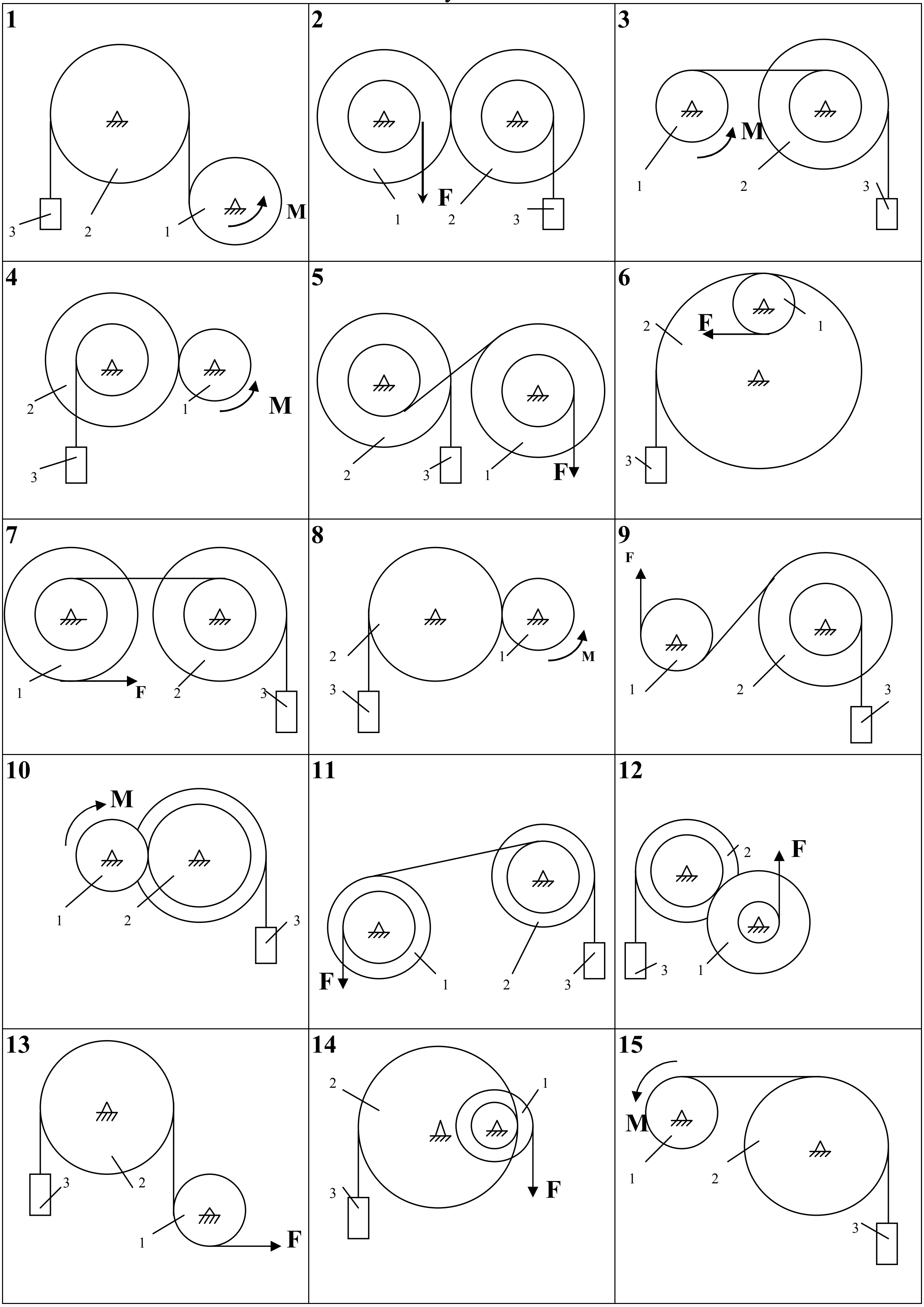
Механическая система с одной степенью свободы, состоящая из трех абсолютно твердых тел, соединенных между собой нерастяжимой невесомой нитью, приходит в движение из состояния покоя под действием силы F или момента M. Учитывая силы сопротивления движению механической системы в виде приведенного к телу вращения 2 постоянного момента сопротивления M_c (приложен к телу 2 противоположно его вращению), определить с помощью теоремы об изменении кинетического момента ускорение одного из тел механической системы (в зависимости от варианта).

Величины, отсутствующие на рисунке из таблицы не выписывать: например, для рисунка 3 не использовать значения r_1, ρ_1 (тело 1 представляет собой однородный цилиндр радиуса R_1) и F (к телу 1 приложен движущий момент M), а для варианта 5 нет необходимости выписывать значение момента M, так как к телу 1 приложена движущая сила F.

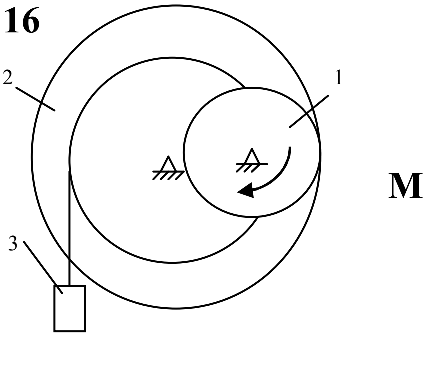
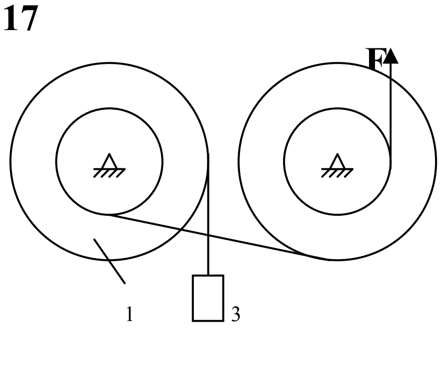
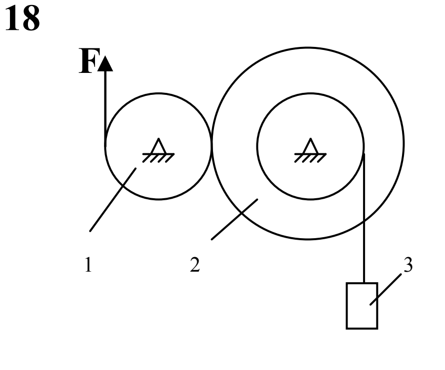
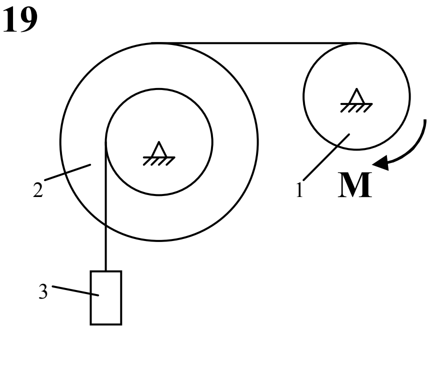
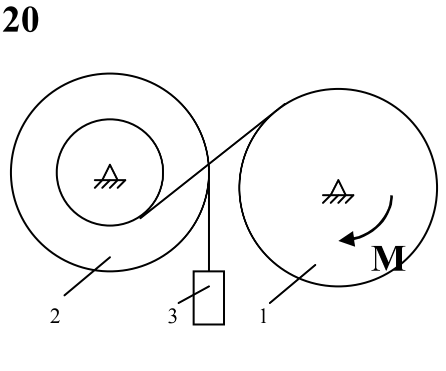
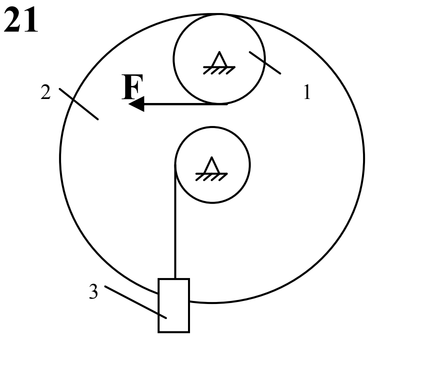
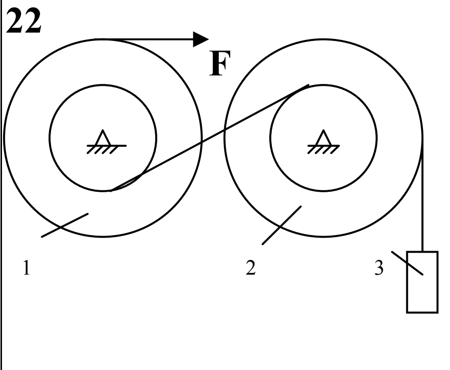
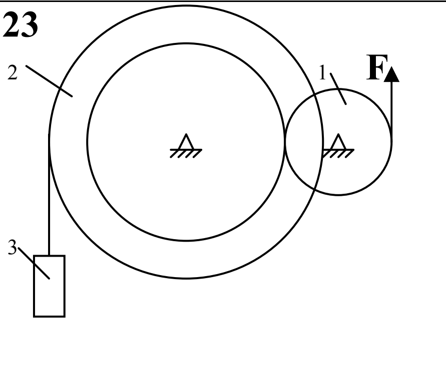
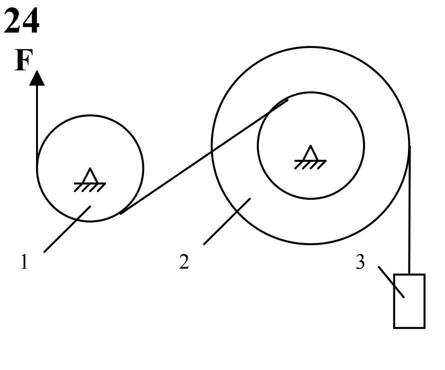
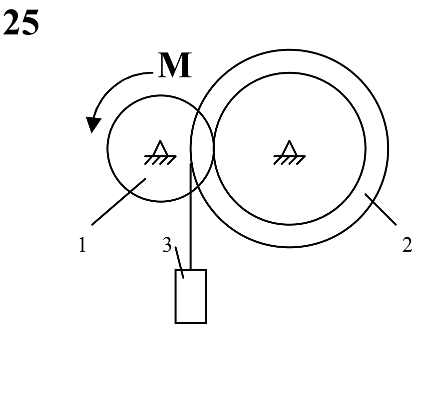
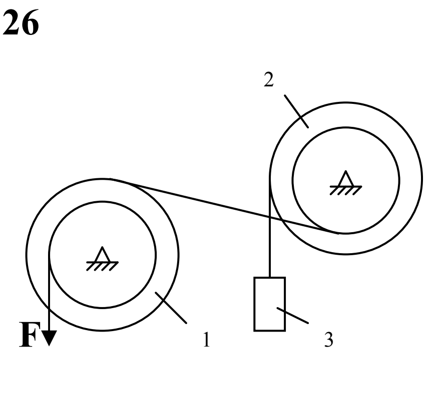
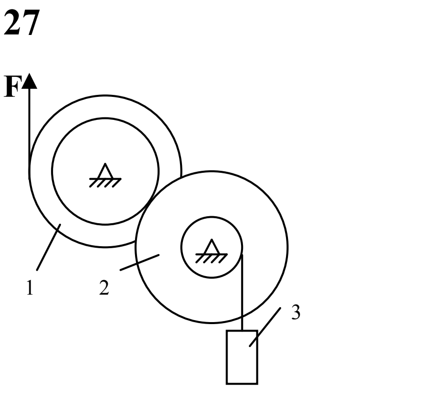
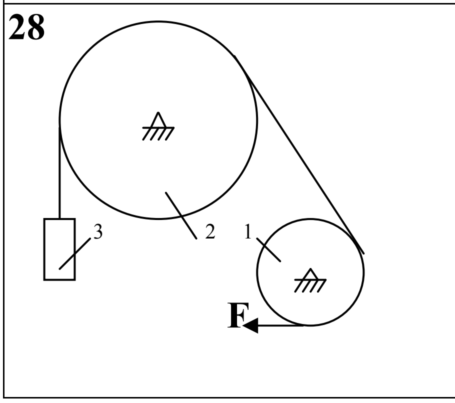
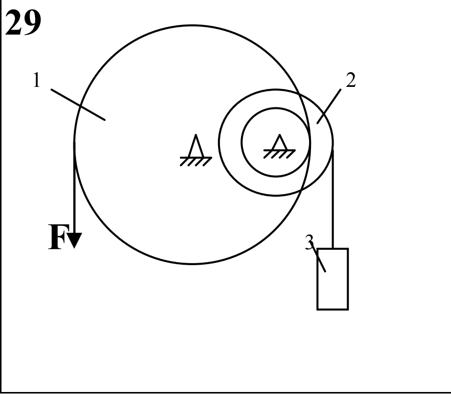
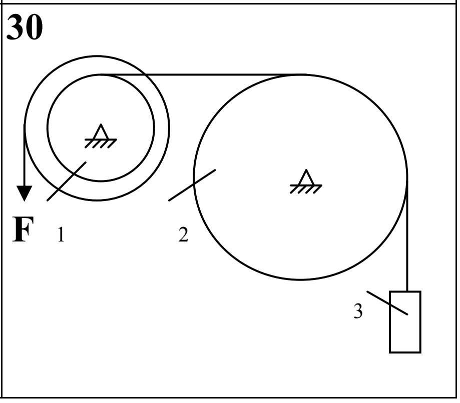
Таблица 1.1. Варианты задачи 1.

Величина		Вариант									
Обозн	Измер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_1	кг	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
m_2	кг	20	25	30	40	40	45	45	50	55	60
m_3	кг	30	40	50	60	50	50	55	60	65	70
R_1	см	80	70	60	50	40	80	70	60	50	40
r_1	см	40	50	40	30	25	40	50	40	30	25
ρ_1	см	50	60	50	40	30	50	60	50	40	30
R_2	см	60	90	80	80	50	60	90	80	80	50
r_2	см	40	50	45	55	35	40	50	45	55	35
ρ_2	см	50	75	65	60	45	50	75	65	60	45
M	кНм	2	4	3	5	6	2	4	3	5	6
M_c	Нм	500	600	800	400	1000	500	600	800	400	1000
F	кН	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
Определить		$\boldsymbol{a_3}$	ε_1	ε_2	$\boldsymbol{a_3}$	ε_1	ε_2	$\boldsymbol{a_3}$	ε_1	ε_2	$\boldsymbol{a_3}$

Таблица 1.2. Рисунки к задаче 1.



Продолжение таблицы 1.2.

16 	**17** 	**18** 
19 	**20** 	**21** 
22 	**23** 	**24** 
25 	**26** 	**27** 
28 	**29** 	**30** 

Пример выполнения задачи 1.

Механическая система с одной степенью свободы (рис.1.1), состоящая из трех абсолютно твердых тел, соединенных между собой непосредственным контактом (тела 1 и 2) и нерастяжимой невесомой нитью (тела 2 и 3), приходит в движение из состояния покоя под действием силы F. Учитывая силы сопротивления движению механической системы в виде приведенного к телу вращения 2 постоянного момента сопротивления M_c (приложен к телу 2 противоположно его вращению), определить с помощью теоремы об изменении кинетического момента ускорение тела 2.

Дано: $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 20$ кг, $m_3 = 30$ кг, $R_1 = 10$ см, $R_2 = 40$ см, $r_2 = 20$ см, $\rho_2 = 30$ см, $F = 2$ кН, $M_c = 200$ Нм.

Определить: ε_2 - угловое ускорение второго тела.

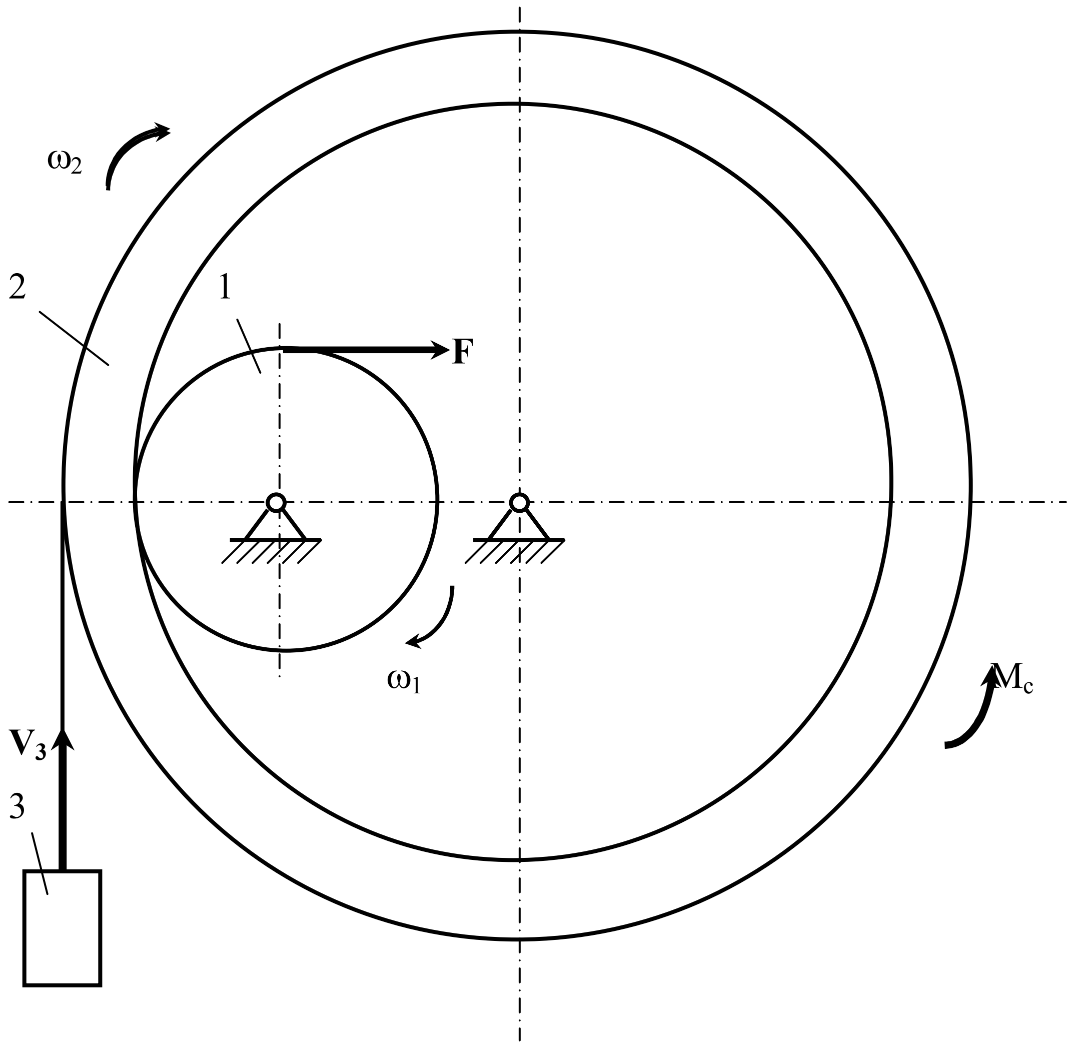


Рис. 1.1

Решение.

Направим скорости тел механической системы ω_1, ω_2, V_3 в соответствии с направлением движущей силы F (рис.1.1). Найдем соотношения между скоростями, выразив их через ω_2:

$$\omega_1 = \omega_2 r_2 / R_1 \quad (1.1)$$

$$V_3 = \omega_2 R_2 \quad (1.2)$$

Поскольку теорема об изменении кинетического момента механической системы может быть применена относительно одной неподвижной оси, а в данной механической системе их две, мысленно разделим систему на две части, отсоединив первое тело от второго.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела 1 относительно его оси вращения с учетом $d\omega_1/dt = \varepsilon_1$ (рис.1.2):

$$I_1 \varepsilon_1 = \sum m_{Z1}(\mathbf{F}^e{}_k) \quad (1.3)$$

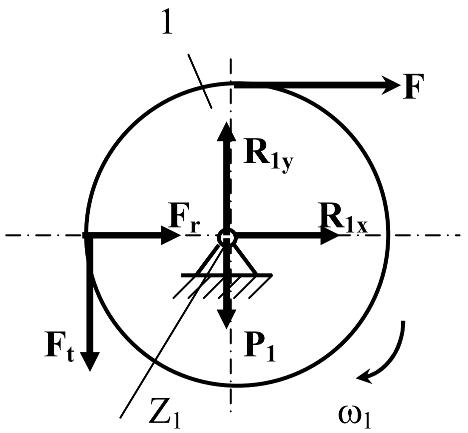


Рис. 1.2

Момент инерции тела 1 определим как для сплошного однородного цилиндра:

$$I_1 = m_1 R_1^2/2 \quad (1.4)$$

Определим моменты сил относительно оси вращения тела 1 z_1 (рис.1.2):

$$\sum m_{Z1}(\mathbf{F}^e{}_k) = F R_1 - F_t R_1 \quad (1.5)$$

Моменты относительно оси z_1 создают только движущая сила F и окружная сила F_t, действующая со стороны тела 2, а радиальная сила F_r, действующая со стороны тела 2, сила тяжести P_1тела 1 и две составляющие реакции шарнирной неподвижной опоры R_{1x} и R_{1y} пересекают ось вращения тела 1.

Продифференцируем по времени уравнение (1.1) и подставим в уравнение (1.3) вместе с величинами (1.4) и (1.5):

$$m_1\, r_2\, \varepsilon_2 = F - F_t \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.6) содержит две неизвестных $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ и F_t , поэтому составим еще одно уравнение, рассмотрев движение оставшейся части системы (рис.1.3) с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси z_2:

$$d(K_{Z2})/dt = \sum m_{Z2}(\mathbf{F}^{e}_{k}) \qquad (1.7)$$

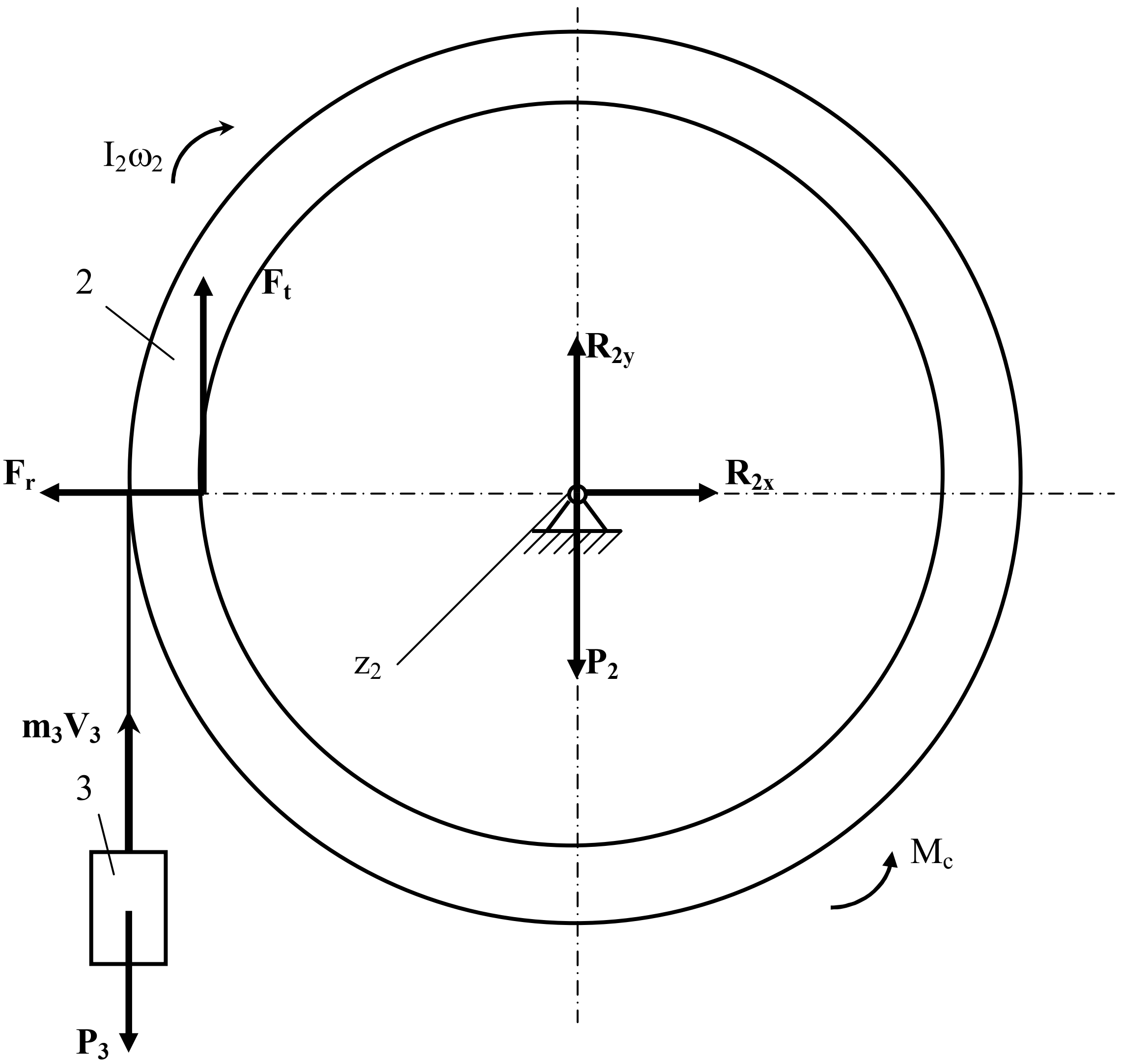


Рис. 1.3

Кинетический момент данной системы относительно оси z_2 равен сумме кинетического момента вращающегося тела 2 и момента количества движения поступательно движущегося тела 3 относительно той же оси:

$$K_{Z2} = I_2\ \omega_2 + m_3 V_3\ r_2 \qquad (1.8)$$

Момент инерции ступенчатого тела 2 относительно его оси вращения определим с помощью известного по условию задания радиуса инерции ρ_2:

$$I_2 = m_2\ \rho_2^2 \qquad (1.9)$$

Определим моменты сил относительно оси z_2:

$$\sum m_{Z2}(\mathbf{F}^e_k) = F_t\ r_2 - M_c - P_3\ R_2 \qquad (1.10)$$

Моменты относительно оси z_1 создают только окружная сила F_t, действующая со стороны тела 1, момент сопротивления и сила тяжести тела 3, а радиальная сила F_r, действующая со стороны тела 1, сила тяжести P_2 тела 2 и две составляющие реакции шарнирной неподвижной опоры R_{2x} и R_{2y} пересекают ось вращения тела 2.

Продифференцируем по времени уравнение (1.2) и подставим в уравнение (1.7) вместе с величинами (1.8), (1.9) и выражением (1.10):

$$(m_2\ \rho_2^2 + m_3\ R_2^2)\ \varepsilon_2 = F_t\ r_2 - M_c - P_3\ R_2 \qquad (1.11)$$

Решим совместно уравнения (1.6) и (1.11) относительно неизвестной ε_2**,** избавившись от F_t путем умножения уравнения (1.6) на r_2 и сложения полученного уравнения с уравнением (1.11):

$$(m_1\ r_2^2 + m_2\ \rho_2^2 + m_3\ R_2^2)\ \varepsilon_2 = F\ r_2 - M_c - P_3\ R_2 \qquad (1.12)$$

Подставим в последнее уравнение числовые значения величин, предварительно определив силу тяжести тела 3 по формуле $P_3 = m_3\ g$.

Результат вычислений по формуле (1.12): ε_2 = 11,4 $с^{-2}$.

Задача 2.
«Исследование движения механической системы с помощью теоремы об изменении кинетической энергии»

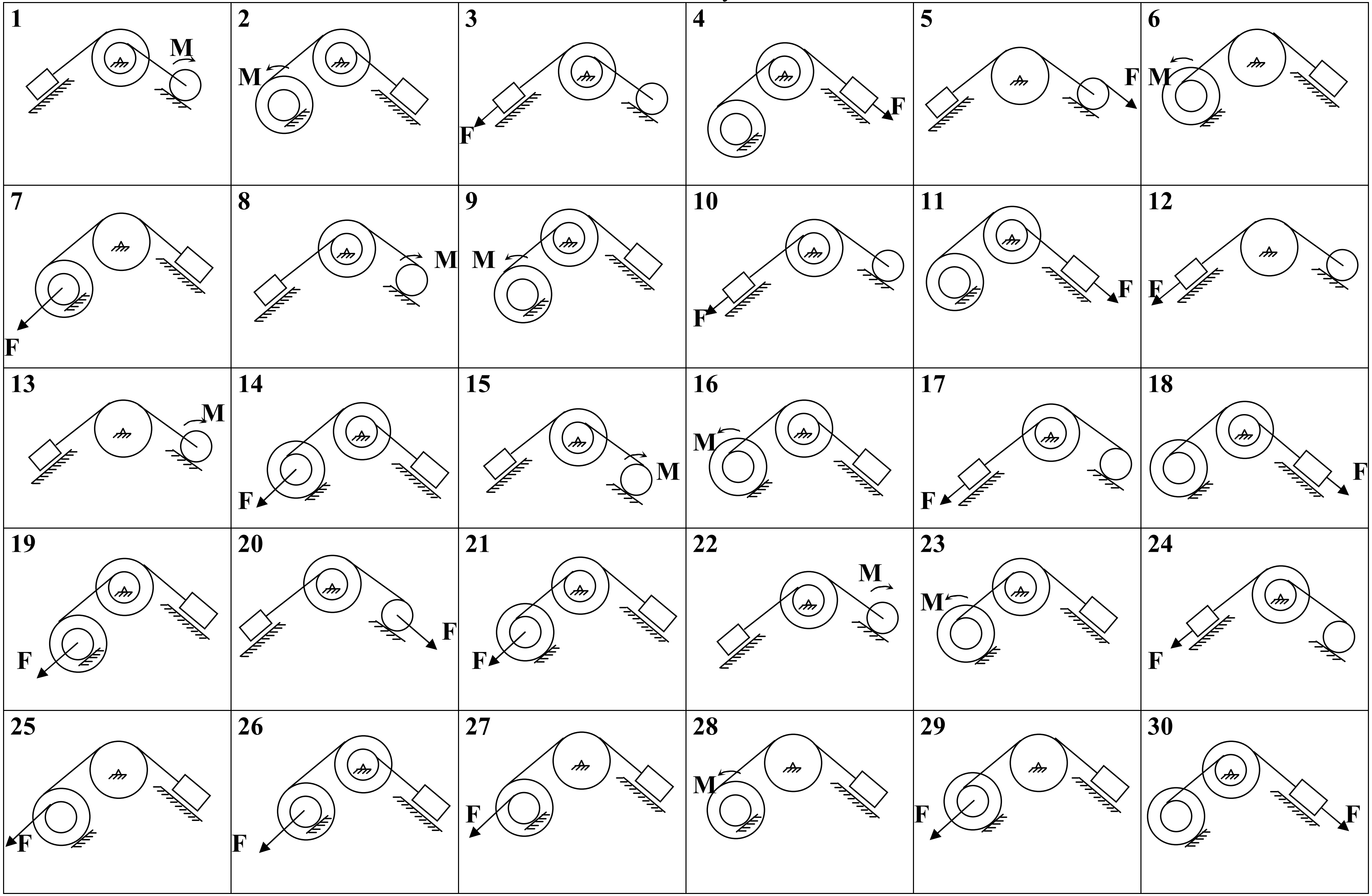
Механическая система с одной степенью свободы, состоящая из трех абсолютно твердых тел (тело 1 движется поступательно по наклонной плоскости под углом α к горизонту, тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, а тело 3 катится без скольжения по наклонной плоскости под углом β к горизонту), соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями, приходит в движение из состояния покоя под действием силы F или момента M. Определить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии скорость одного из тел механической системы или скорость центра масс C тела 3 (в зависимости от варианта) к моменту времени, когда тело 1 переместится на расстояние S .

Величины, отсутствующие на рисунке из таблицы не выписывать: например, для рисунка 1 пропустить значения r_3, ρ_3 (тело 3 представляет собой однородный цилиндр радиуса R_3) и F (к телу 3 приложен движущий момент M), а для рисунка 4 нет необходимости выписывать значение момента M, так как к телу 1 приложена движущая сила F.

Таблица 2.1. Варианты задачи 2.

Величина		Вариант									
Обозн	Измер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_1	кг	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
m_2	кг	20	25	30	40	40	45	45	50	55	60
m_3	кг	30	40	50	60	50	50	55	60	65	70
R_2	см	80	70	60	50	40	80	70	60	50	40
r_2	см	40	50	40	30	25	40	50	40	30	25
ρ_2	см	50	60	50	40	30	50	60	50	40	30
R_3	см	60	90	80	80	50	60	90	80	80	50
r_3	см	40	50	45	55	35	40	50	45	55	35
ρ_3	см	50	75	65	60	45	50	75	65	60	45
M	кНм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	кН	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
α	градус	30	0	60	0	30	0	60	0	30	0
β	градус	0	60	0	30	0	60	0	30	0	60
S	см	30	40	50	60	50	50	55	60	65	70
Определить		$\mathbf{V_1}$	$\boldsymbol{\omega_2}$	$\boldsymbol{\omega_3}$	$\mathbf{V_C}$	$\mathbf{V_1}$	$\boldsymbol{\omega_2}$	$\boldsymbol{\omega_3}$	$\mathbf{V_C}$	$\mathbf{V_1}$	$\boldsymbol{\omega_2}$

Таблица 2.2. Рисунки к задаче 2.



Пример выполнения задачи 2.

Механическая система с одной степенью свободы, состоит из трех абсолютно твердых тел, соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями (рис.2.1): тело 1 движется поступательно по наклонной плоскости под углом α к горизонту, тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, а тело 3 катится без скольжения по наклонной плоскости под углом β к горизонту. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы F, параллельной наклонной плоскости. Считая связи идеальными, определить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии угловую скорость вращающегося тела 2 к моменту времени, когда тело 1 переместится на расстояние S по наклонной поверхности.

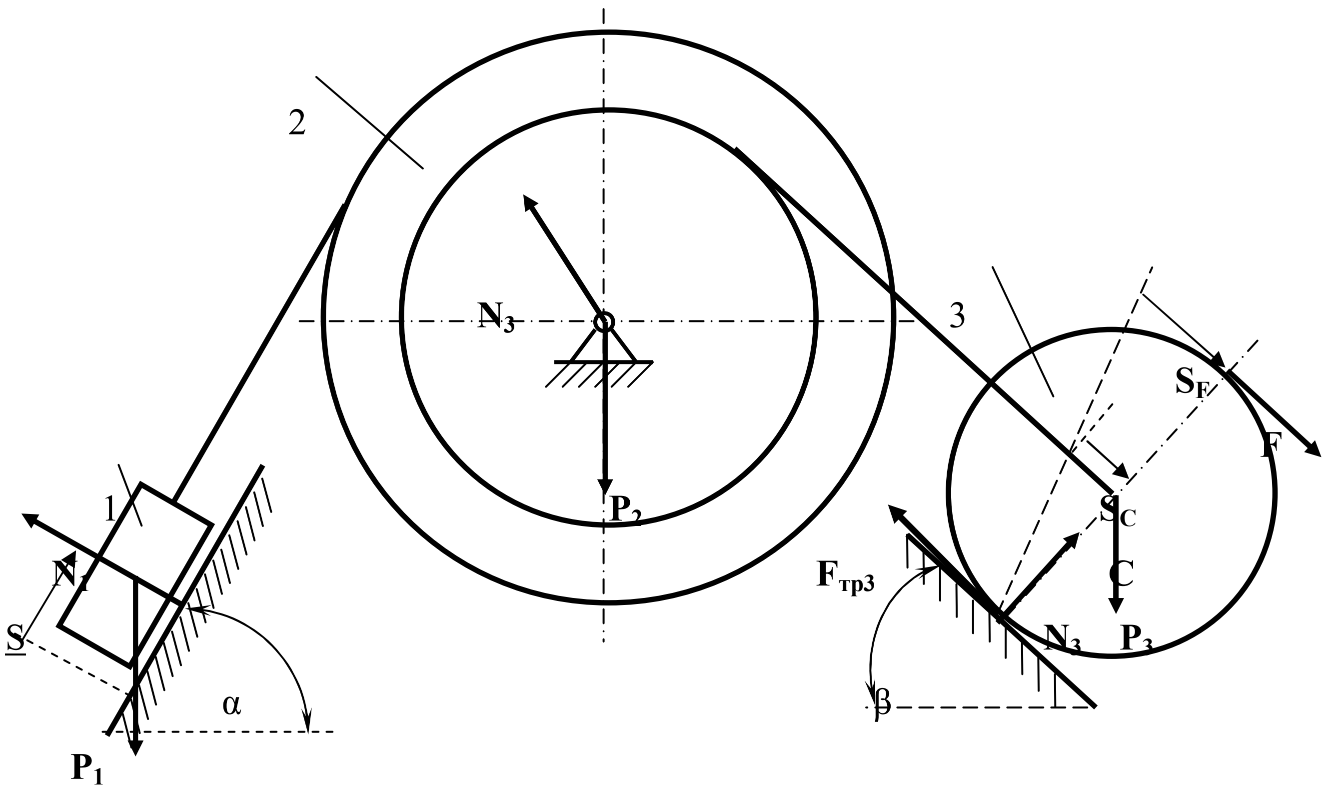


Рис.2.1

Дано: m_1 = 4 кг, m_2 = 10 кг, m_3 = 8 кг, R_2 = 20 см, r_2 = 10 см, , R_3 = 16 см ρ_2 = 15 см, F = 2 кН, $\alpha = 45^o$, $\beta = 20^o$, s = 50 см.

Определить: ω_2 - угловую скорость второго тела.

Решение.

Рассмотрим движение неизменяемой механической системы с помощью теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A^e_k \qquad (2.1)$$

$T_0 = 0$, так как в начальный момент система находилась в покое.

Кинетическая энергия системы в данный момент времени равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (2.2)$$

Запишем формулы для вычисления кинетической энергии каждого тела механической системы, учитывая поступательное движение первого, вращательное движение второго и плоско-параллельное движение третьего:

$$T_1 = m_1V_1^2/2; \qquad T_2 = I_2\omega_2^2/2; \qquad T_3 = m_3V_C^2/2 + I_c\omega_3^2/2; \qquad (2.3)$$

Выразим скорости через ω_2:

$$V_1 = \omega_2R_2; \qquad V_C = \omega_2r_2; \qquad \omega_3 = \omega_2r_2/R_3 \qquad (2.4)$$

Моменты инерции тел (ступенчатого шкива 2 с учетом его радиуса инерции ρ_2 и однородного цилиндра 3) определим по формулам:

$$I_2 = m_2\rho_2^2; \qquad I_3 = m_3R_3^2/2 \qquad (2.5)$$

Подставим формулы (2.4) и (2.5) в (2.3), а затем полученные выражения – в (2.2) и получим окончательно:

$$T = (2m_1R_2^2 + 2\ m_2\rho_2^2 + 3m_3R_3^2)\ \omega_2^2/2 \qquad (2.6)$$

Найдем работы сил, изобразив на рис.2.1 перемещения S, S_F, S_C точек их приложения. Работа сил тяжести P_1, P_2 и силы F:

$$A(P_1) = -\ P_1S \sin \alpha; \qquad A(P_2) = P_2S_C \sin \beta; \qquad A(F) = FS_F \qquad (2.7)$$

Работы остальных сил равны нулю, так как сила нормальной реакции N_1 перпендикулярна перемещению S, а силы P_2, и N_2 , N_3 и $F_{тр3}$ приложены в неподвижных точках.

Выразим перемещения точек через заданное S с учетом того, что соотношения между перемещениями точно такие же, как и между соответствующими скоростями.

$$S_C = S\ r_2/R_2; \qquad S_F = 2S\ r_2/R_2 \qquad (2.8)$$

Подставим в правую часть теоремы (2.1) значение кинетической энергии (2.6) , а в левую часть – выражения работ (2.7), предварительно подставив в них соотношения (2.8). Полученное уравнение имеет вид:

$$(m_1R_2^2 + m_2\rho_2^2 + 1{,}5\ m_3R_3^2)\ \omega_2^2/2 = [(2F + P_2 \sin \beta)\ r_2/R_2 - P_1 \sin \alpha]\ S \qquad (2.9)$$

Подставив числовые значения заданных величин в уравнение (2.9), получим искомую угловую скорость ω_2: $\qquad \omega_2 = 53{,}6\ c^{-1}$

Задача 3.

«Исследование движения механической системы с помощью общего уравнения динамики»

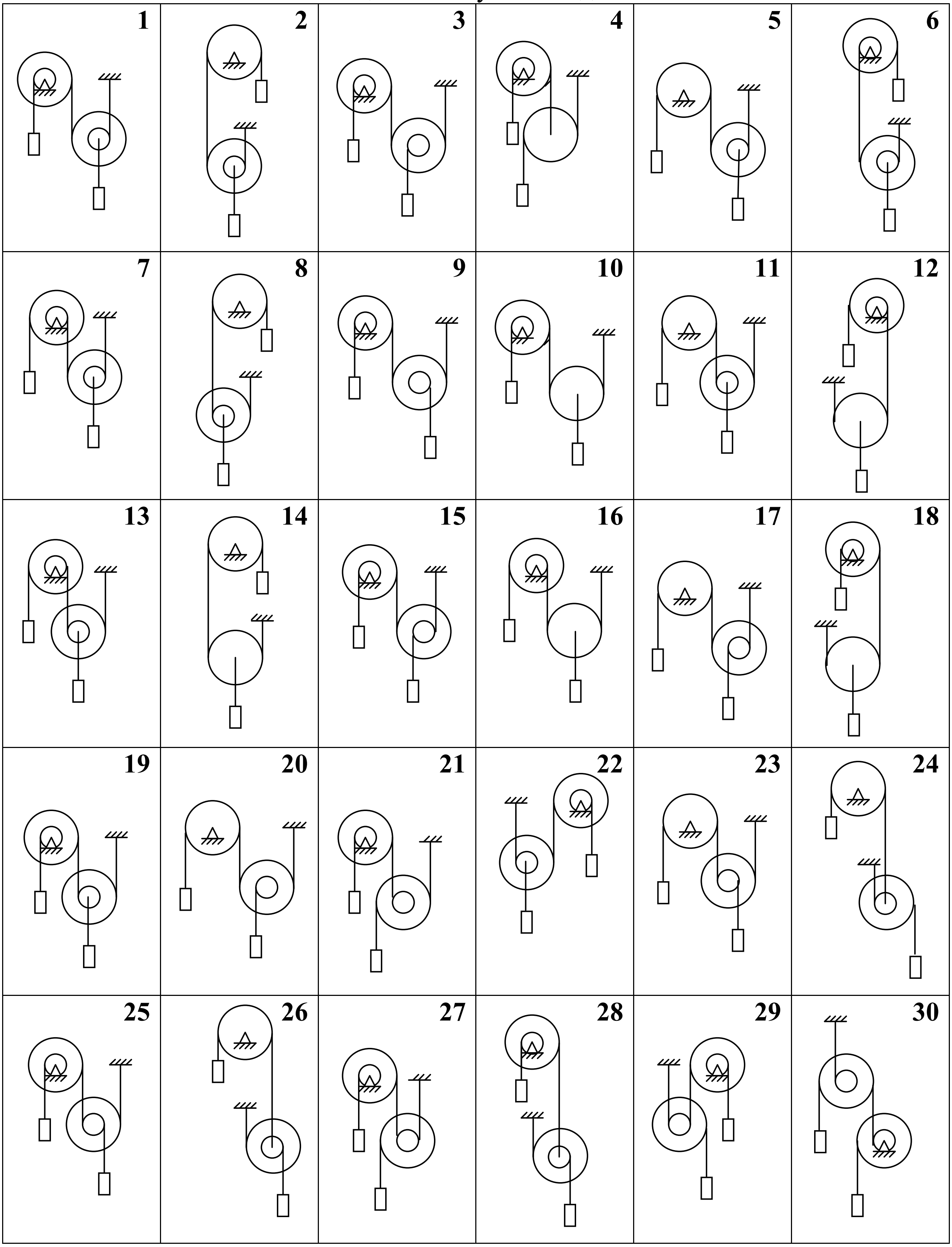
Механическая система с одной степенью свободы, состоящая из четырех абсолютно твердых тел, соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями (груз 3 подвешен к блоку 1 с неподвижной осью, а груз 4 подвешен к блоку 2 с подвижной осью), приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Считая связи идеальными, определить с помощью общего уравнения динамики ускорение одного из тел механической системы или ускорение оси (центра масс) блока 2 (в зависимости от варианта).

Для сдвоенных блоков заданы большой и малый радиусы R и r и радиус инерции ρ. Массу одинарных блоков считать равномерно распределенной по ободу с радиусом R. Величины, отсутствующие в варианте из таблицы не выписывать: например, для варианта 2 игнорировать значения r_1, ρ_1 (тело 1 представляет собой однородный цилиндр радиуса R_1).

Таблица 3.1. Варианты задачи 3.

Величина		Вариант									
Обозн	Измер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_1	кг	3	4	5	6	7	8	9	5	4	6
m_2	кг	2	3	4	5	6	7	7,5	3	2	4
m_3	кг	10	12	15	16	20	25	30	20	15	10
m_4	кг	5	8	10	15	16	20	16	10	20	8
R_1	см	80	70	60	50	40	80	70	60	50	40
r_1	см	40	50	40	30	25	40	50	40	30	25
ρ_1	см	50	60	50	40	30	50	60	50	40	30
R_2	см	60	90	80	80	50	60	90	80	80	50
r_2	см	40	50	45	55	35	40	50	45	55	35
ρ_2	см	50	75	65	60	45	50	75	65	60	45
Определить		ε_1	ε_2	a_3	a_4	a_c	ε_1	ε_2	a_3	a_4	a_c

Таблица 3.2. Рисунки к задаче 3.



Пример выполнения задачи 3

Механическая система с одной степенью свободы (рис.3.1), состоящая из четырех абсолютно твердых тел, соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями (груз 3 подвешен к блоку 1 с неподвижной осью, а груз 4 подвешен к блоку 2 с подвижной осью), приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Считая связи идеальными, определить с помощью общего уравнения динамики ускорение оси (центра масс) блока 2 .

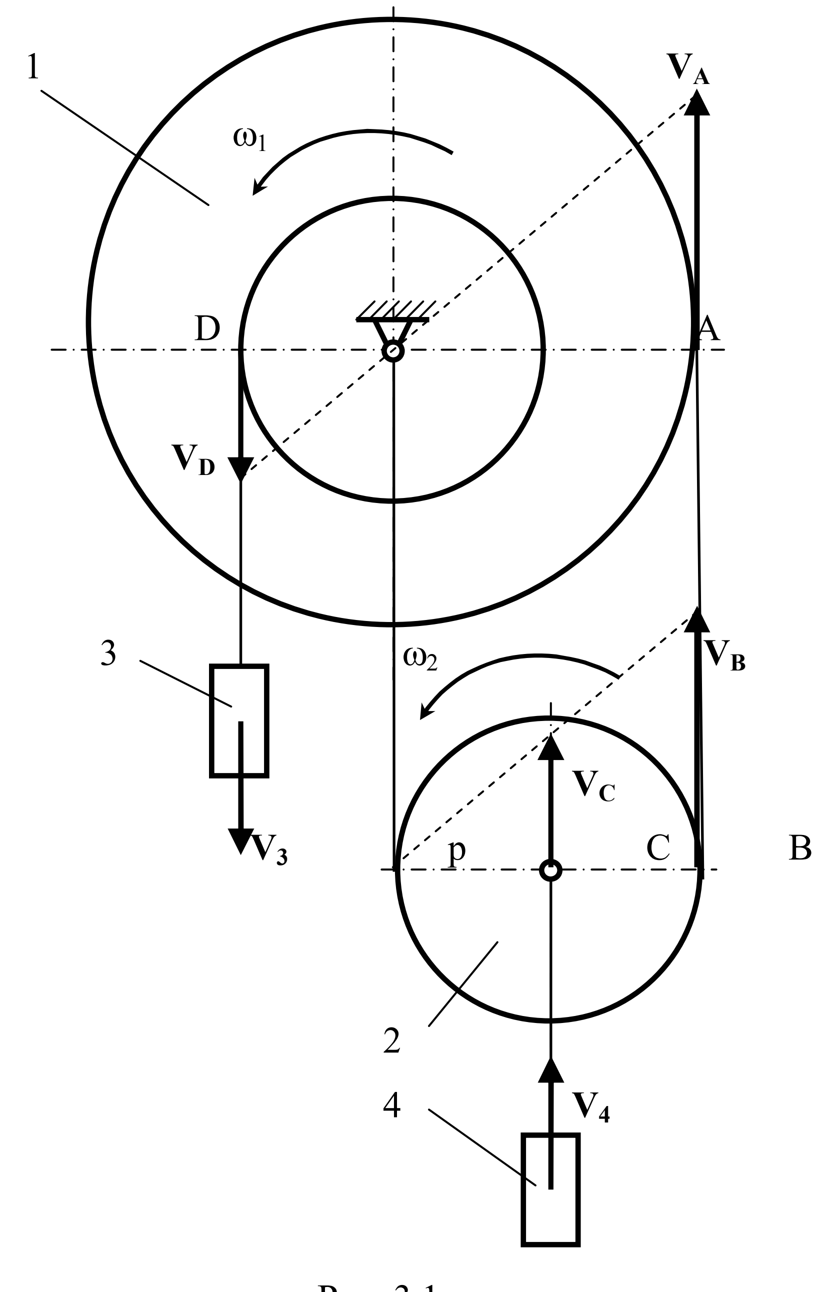


Рис. 3.1.

Дано: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 10$ кг, $m_4 = 20$ кг, $R_1 = 40$ см, $r_1 = 20$ см, $\rho_1 = 30$ см, $R_2 = 10$ см.

Определить: a_C - ускорение центра масс второго тела.

Решение.

Предположим, что груз 3 движется вниз со скоростью V_3. Тогда блок 1 будет вращаться вокруг неподвижной оси против хода часовой стрелки с угловой скоростью ω_1 , блок 2 будет совершать плоско-параллельное движение, поворачиваясь в данное мгновение вокруг мгновенного центра скоростей (точка p на рис.3.1) с угловой скоростью ω_2 , а груз 4 будет двигаться поступательно вверх со скоростью V_C. Выразим все скорости через скорость центра масс блока 2:

$V_4 = V_C$ с учетом поступательного движения груза 4 вместе с нитью, на которой он подвешен к точке C;

$\omega_2 = V_C/PC = V_C/R_2$ на основании свойств мгновенного центра скоростей;

$V_A = V_B$, так как нить AB движется поступательно, но $V_A = \omega_1 OA$, а $V_B = \omega_2 BP$, поэтому $\omega_1 OA = \omega_2 BP$ или с учетом значений $OA = R_1$, $BP = 2R_2$ и $\omega_2 = V_C/R_2$ получим $\omega_1 = 2V_C/R_1$;

$V_3 = V_D$ с учетом поступательного движения груза 3 вместе с нитью, на которой он подвешен к блоку 1, но $V_D = \omega_1 OD = \omega_1 r_1$, тогда $V_3 = 2r_1V_C/R_1$.

Выпишем конечные формулы для удобства их использования:

$V_4 = V_C$; $\omega_2 = V_C/R_2$; $\omega_1 = 2V_C/R_1$; $V_3 = 2r_1V_C/R_1$. (3.1)

Применим общее уравнение динамики для данной механической системы с идеальными связями:

$$\sum\delta A^a_k+\sum\delta A^u_k= 0, \qquad (3.2)$$

где $\sum\delta A^a_k$ – сумма элементарных работ активных сил, $\sum\delta A^u_k$ – сумма элементарных работ сил инерции на любом возможном перемещении механической системы.

Активными силами в данной задаче являются силы тяжести четырех тел, из которых P_1 работу не совершает, так как приложена к неподвижной точке (рис.3.2), а работы остальных сил находятся следующим образом:

$$\sum\delta A^a_k = P_3\delta s_3 – P_4\delta s_4 – P_2\delta s_C, \qquad (3.3)$$

где δs_3 , δs_4 , δs_C – возможные перемещения тел 3, 4 и центра масс тела 2.

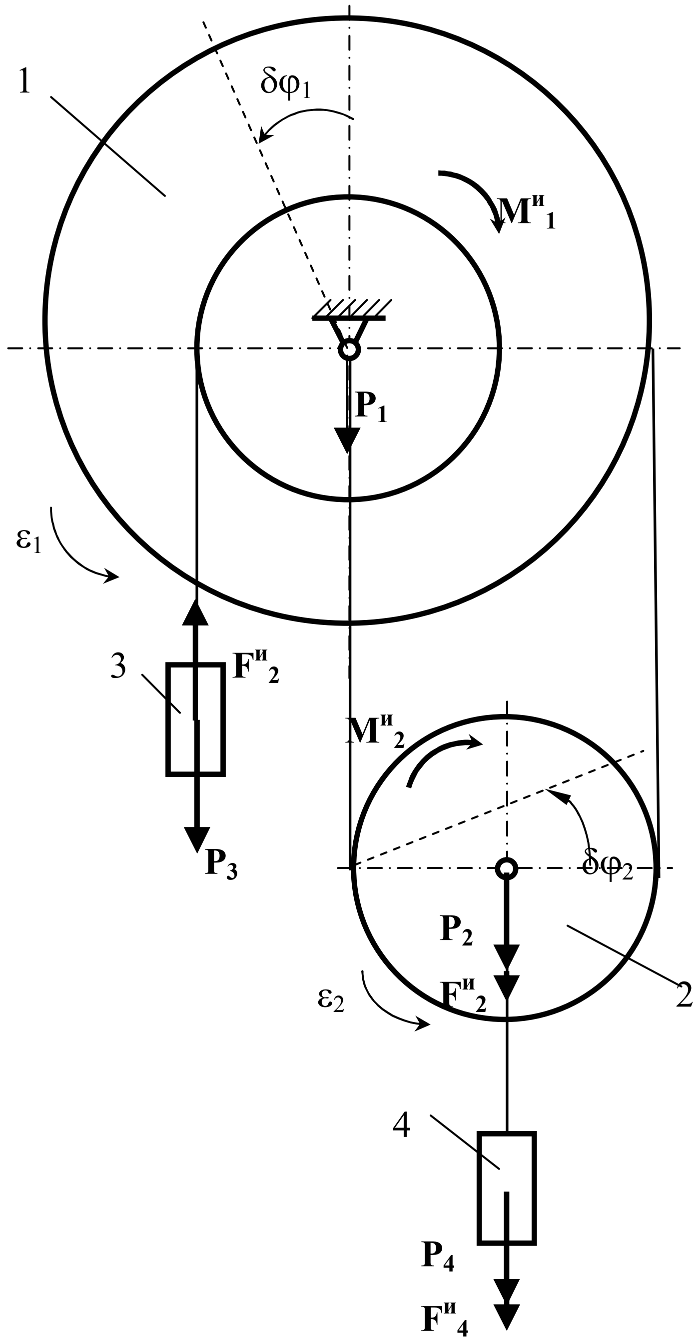


Рис. 3.2

Применив принцип Даламбера, приложим соответствующие движениям тел силы инерции $F^{и}{}_{3}$, $F^{и}{}_{4}$, $F^{и}{}_{2}$ и моменты сил инерции $M^{и}{}_{1}$ и $M^{и}{}_{2}$, которые находятся следующим образом:

$F^{и}{}_{3} = m_3 a_3$; $F^{и}{}_{3} = m_4 a_4$; $F^{и}{}_{2} = m_2 a_C$;

$M^{и}{}_{1} = I_1 \varepsilon_1$; $M^{и}{}_{1} = I_C \varepsilon_2$, (3.4) где $I_1 = m_1\rho_1^2$ – момент инерции блока 1 относительно его оси вращения, $I_C = 0{,}5m_2R_2^2$ – момент инерции блока 2, представляющего собой сплошной однородный цилиндр, относительно оси, проходящей через его центр масс.

Запишем сумму элементарных работ сил инерции на любом возможном перемещении механической системы:

$$\sum\delta A^{u}_{k} = -M^{и}{}_1\delta\varphi_1 - M^{и}{}_2\delta\varphi_2 - F^{и}{}_2\delta s_C - F^{и}{}_3\delta s_3 - F^{и}{}_4\delta s_4, \qquad (3.5)$$

где $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ – возможные угловые перемещения блоков.

Выразим все возможные перемещения через δs_C, используя формулы (3.1):

$$\delta s_4 = \delta s_C; \quad \delta\varphi_2 = \delta s_C/R_2; \quad \delta\varphi_1 = 2\delta s_C/R_1; \quad \delta s_3 = 2r_1\delta s_C/R_1. \qquad (3.6)$$

Выразим все ускорения через a_C, продифференцировав по времени формулы (3.1):

$$a_4 = a_C; \quad \varepsilon_2 = a_C/R_2; \quad \varepsilon_1 = 2a_C/R_1; \quad a_3 = 2r_1a_C/R_1. \qquad (3.7)$$

Подставим величины (3.6) в (3.5) и (3.3), затем подставим выражения работ (3.5) и (3.3) в общее уравнение динамики (3.2), предварительно выразив ускорения по формулам (3.7) и получим:

$$[2P_3r_1/R_1 - P_2 - P_4 - (4m_1\rho_1^2/R_1^2 + 1{,}5m_2 + 4m_3r_1^2/R_1^2 + m_4)a_C]\delta s_C = 0 \quad (3.8)$$

Поскольку возможное перемещение δs_C отлично от нуля, приравняем к нулю выражение в квадратных скобках и решим полученное уравнение относительно неизвестной a_C:

$$a_C = (2m_3r_1/R_1 - m_2 - m_4)g/[4(m_1\rho_1^2 + m_3r_1^2)/R_1^2 + 1{,}5m_2 + m_4],$$

где g – ускорение свободного падения, которое можно принять равным 10 м/с^2.

Подставив значения известных величин в последнюю формулу, получим результат $a_C = -2{,}86$ м/с^2. Знак минус указывает на то, что движение механической системы происходит в обратном направлении.

Задача 4

«Исследование движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа»

Механическая система с двумя степенями свободы, состоящая из четырех абсолютно твердых тел (таблица 3.2), соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями (груз 3 подвешен к блоку 1 с неподвижной осью, а груз 4 подвешен к блоку 2 с подвижной осью), приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Между грузом 3 (нечетный вариант) или грузом 4 (четный вариант) и нитью вставлена пружина жесткостью с. Пренебрегая потерями на трение и считая, что в начальный момент времени груз, подвешенный на пружине, находился в положении статического равновесия, составить с помощью уравнений Лагранжа дифференциальные уравнения движения механической системы и определитьзакон относительного движения груза, подвешенного на пружине, а также частоту, период и амплитуду относительных колебаний груза.

Рисунок и числовые значения для расчета выбрать из таблиц 3.1 и 3.2. Коэффициент жесткости пружины для всех вариантов принять равным c = 1 кН/м.

Пример выполнения задачи 4

Механическая система (рис.4.1.) с двумя степенями свободы, состоящая из четырех абсолютно твердых тел, соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями (груз 3 подвешен к блоку 1 с неподвижной осью, а груз 4 подвешен к блоку 2 с подвижной осью), приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Груз 3 подвешен на пружине жесткостью с. Пренебрегая потерями на трение и считая, что в начальный момент времени груз, подвешенный на пружине, находился в положении статического равновесия, составить с помощью уравнений Лагранжа дифференциальные уравнения движения механической системы и определитьзакон относительного движения груза, подвешенного на пружине, а также частоту, период и амплитуду относительных колебаний груза.

Дано: m_1 = 4 кг, m_2 = 2 кг, m_3 = 10 кг, m_4 = 20 кг, R_1 = 40 см, r_1 = 20 см, ρ_1 = 30 см, R_2 = 10 см, c = 20 кН/м.

<u>Определить</u>: $x = f(t)$ - закон относительного движения груза, подвешенного на пружине, а также частоту, период и амплитуду относительных колебаний груза.

<u>Решение</u>.

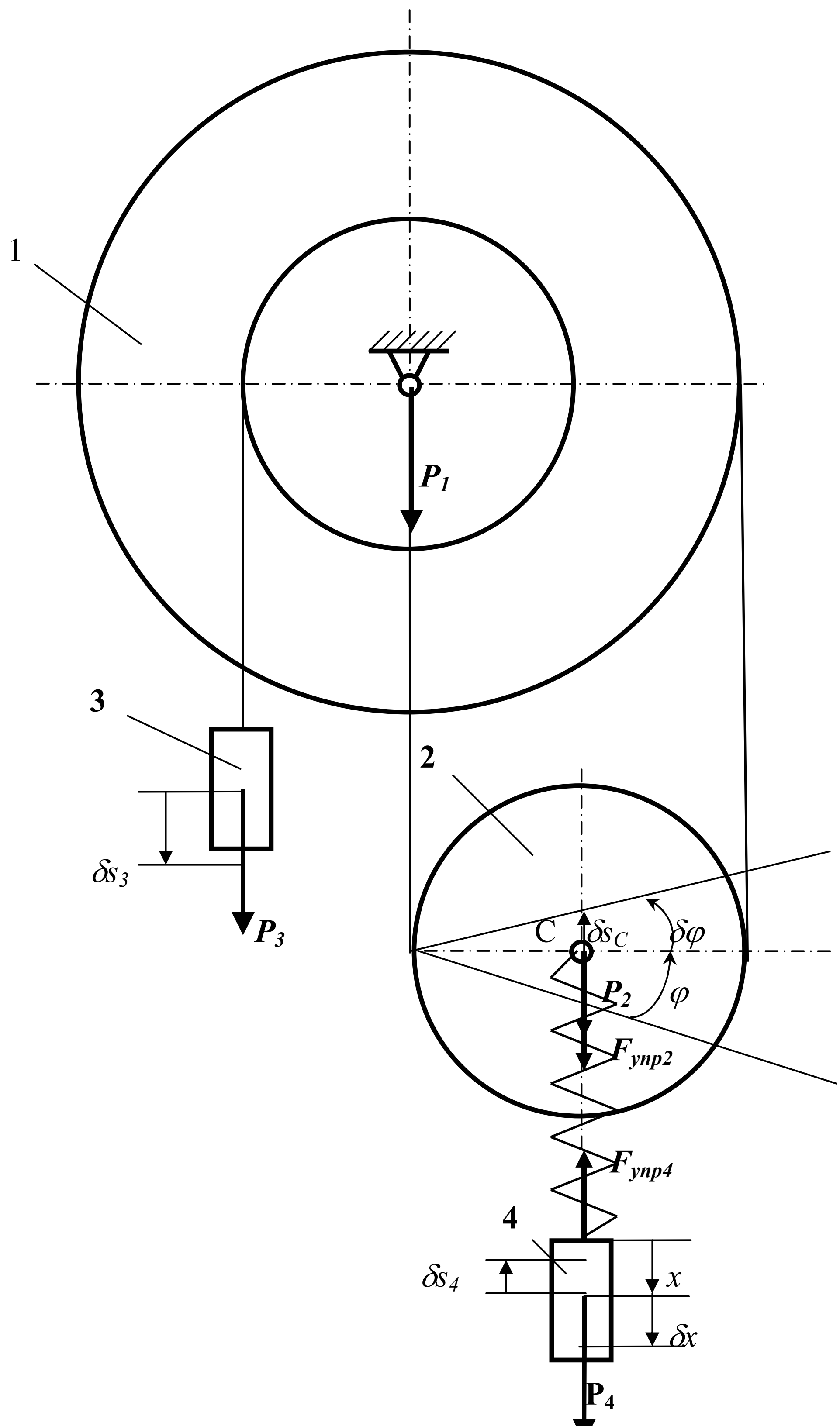


Рис. 4.1.

Для системы с двумя степенями свободы выберем две обобщенные координаты: $q_1 = x$ – относительное перемещение груза 4, равное деформации пружины, и $q_2 = \varphi$ - угол поворота тела 2. Запишем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad (4.1)$$

Определим кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \qquad (4.2)$$

Найдем кинетическую энергию каждого тела, учитывая, вращательное движение блока 1, плоско-параллельное движение блока 2 и поступательные движения грузов 3 и 4:

$$T_1 = 0{,}5\, I_1\omega_1^2; \qquad T_2 = 0{,}5(m_2V_C^2 + I_C\omega_2^2);$$

$$T_3 = 0{,}5\, m_3V_3^2; \qquad T_4 = 0{,}5\, m_4V_4^2 \qquad (4.3)$$

где $I_1 = m_1\rho_1^2$ – момент инерции блока 1 относительно его оси вращения, $I_C = 0{,}5\, m_2R_2^2$ – момент инерции блока 2, представляющего собой сплошной однородный цилиндр, относительно оси, проходящей через его центр масс.

Выразим все скорости через обобщенные скорости $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$. Очевидно, что

$$\omega_1 = 2R_2\dot{\varphi}/R_1, \qquad \omega_2 = \dot{\varphi}, \qquad V_C = R_2\dot{\varphi}, \qquad V_3 = 2R_2r_1\dot{\varphi}/R_1. \qquad (4.4)$$

Для определения скорости груза 4 рассмотрим его движение как сложное. Абсолютная скорость тела 4 равна алгебраической сумме переносной скорости точки С и относительной скорости груза, равной скорости удлинения пружины:

$$V_4 = R_2\dot{\varphi} - \dot{x} \qquad (4.5)$$

Подставим все найденные выражения в формулу (4.2) и получим:

$$T = 0{,}5mr^2\dot{\varphi}^2 + 0{,}5m_4(r\dot{\varphi} - \dot{x})^2, \qquad (4.6)$$

где для краткости принято $r = R2$, $m = 4(m_1\rho_1^2 + m_3r_1^2)/R_1^2 + 1{,}5m_2$ (4.7)

Изобразим на рис. 4.1 действующие на систему активные силы: силы тяжести $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{P_3}$, $\boldsymbol{P_4}$ и силы упругости $\boldsymbol{F_{упр4}}$ и $\boldsymbol{F_{упр2}}$, модули которых равны:

$$P_1 = m_1g; \quad P_2 = m_2g; \quad P_3 = m_3g; \quad P_4 = m_4g; \quad F_{упр4} = F_{упр2} = cx \qquad (4.8)$$

Для определения обобщенной силы Q_x сообщим системе возможное перемещение, при котором обобщенная координата x получит положительное приращение δx, а φ останется неизменной, то есть $\delta\varphi = 0$ (переместится на расстояние δx только груз 4, а остальные тела останутся в покое). Тогда элементарную работу совершат только силы $\boldsymbol{P_4}$ и $\boldsymbol{F_{упр4}}$:

$$\delta A_x = P_4\delta x - F_{упр4}\delta x = (P_4\delta x - F_{упр4})\delta x \qquad (4.9)$$

Для определения обобщенной силы Q_φ сообщим системе возможное перемещение, при котором обобщенная координата φ получит положительное приращение $\delta\varphi$, а x останется неизменной, то есть $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда элементарную работу совершат только силы $\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{P_3}$ и $\boldsymbol{P_4}$:

$$\delta A_x = P_3\delta s_3 - P_2\delta s_c - P_4\delta s_4 = (2P_3r_1R_2/R_1 - P_2R_2 - P_4R_2)\delta\varphi \qquad (4.10)$$

При выводе уравнения (4.10) использовались уравнения (4.4), так как соотношения между перемещениями аналогичны соотношениям между соответствующими скоростями, при этом учтено, что $\delta s_c = \delta s_4$ (пружина не изменяет свою длину).

Коэффициенты перед приращениями δx и $\delta\varphi$ в уравнениях (4.9) и (4.10) и будут обобщенными силами Q_x, и Q_φ ,которые запишем с учетом (4.8):

$$Q_x = m_4g - cx; \qquad Q_\varphi = m_\varphi rg \qquad (4.11)$$

где для краткости принято $r = R_2$, $m_\varphi = 2m_3r_1/R_1 - m_2 - m_4$ (4.12)

Подставляя величины (4.6) и (4.11) в уравнения (4.1),получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$m_4\ddot{x} - m_4r\ddot{\varphi} = m_4g - cx\,; \qquad (m+m_4)r\ddot{\varphi} - m_4\ddot{x} = m_\varphi g \qquad (4.13)$$

Для определения $x = f(t)$ исключим из уравнений (8.13) $\ddot{\varphi}$ и получим дифференциальное уравнение вида:

$$\ddot{x} + k^2x = a\,, \qquad (4.14)$$

где $k^2 = c(1/m_4 + 1/m)$; $\quad a = g(m + m_4 + m_\varphi)/m$ (4.15)

Общее решение уравнения (4.14), как известно из курса высшей математики, имеет вид $x = x_{общ} + x_{част}$, где $x_{общ}$ – общее решение однородного уравнения

$\ddot{x} + k^2 x = 0$,   то есть $x_{общ} = C_1 sin(kt) + C_2 cos(kt)$, а $x_{част}$ – частное решение уравнения (8.14). Будем искать решение в виде $x_{общ} = B = const$. Подставляя значение $x_{общ} = B$ в (8.14) , получим $B = a/k^2$. Таким образом общее решение уравнения (4.14) имеет вид:

$$x = C_1 sin(kt) + C_2 cos(kt) + a/k^2, \tag{4.16}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, для определения которых найдем еще производную по времени от x:

$$\dot{x} = C_1 k\, cos(kt) - C_2 k\, sin(kt), \tag{4.17}$$

Поскольку система начинает движение из состояния покоя с недеформированной пружиной, начальные значения переменных равны нулю, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = 0$. Подставляя эти величины в уравнения (4.16) и (4.17), найдем постоянные интегрирования: $C_1 = 0$ и $C_2 = - a/k^2$.

Подставив полученные значения постоянных интегрирования в уравнение (4.16), окончательно получим искомое уравнение относительного движения груза 4:

$$x = a/k^2(1 - cos(kt)). \tag{4.18}$$

Таким образом груз 4 совершает по отношению к точке С подвеса пружины гармонические колебания по закону (4.18) с амплитудой $A = a/k^2 = 0{,}00712$ *м*, частотой $k = 43{,}7\ c^{-1}$ и периодом $T = 2\pi/k = 0{,}144$ *с*.