1. Построить график функции $y=\ln\left(1+e^{x}\right)$

2. Построить кривую, заданную параметрически: $x=\dfrac{t}{3-t^{2}}$ $y=\dfrac{t\left(2-t^{2}\right)}{3-t^{2}}$

3. Задача на экстремум: Периметр равнобедренного треугольника равен 2р. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

4. Функция $f(x)$ имеет на $(0,+\infty)$ непрерывную производную и $f(0)=1$, $|f(x)|\le e^{-x}$ для $x\ge 0$. Доказать, что существует точка x_0 такая, что $f'(x_0)=-e^{-x_0}$.

Задания 1 и 2 надо решить, как на примере ниже:

Пример 5.14. *Построить график функции* $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^{2}}$.

1. Функция определена при тех значениях x, для которых, как следует из определения арксинуса, выполнено неравенство

$$\left|\frac{2x}{1+x^{2}}\right|\le 1.$$

Оно равносильно неравенству $(1-|x|)^{2}\ge 0$. Последнее верно для любых вещественных x. Итак, $D(f)=R$. Функция $\dfrac{2x}{1+x^{2}}$ непрерывна в любой точке (как частное двух непрерывных функций). Функция $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^{2}}$ также непрерывна в любой точке (как суперпозиция непрерывных функций) и, следовательно, график функции не имеет вертикальных асимптот. Для нахождения наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ вычислим следующие пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx)] = \lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0.$$

Отсюда следует, что прямая $y = 0$ является асимптотой при $x \to +\infty$ (ее правильнее назвать горизонтальной, а не наклонной). Аналогично можно установить, что та же прямая $y = 0$ является асимптотой при $x \to -\infty$.

2. Очевидно, что функция непериодическая и является нечетной. Поэтому вместо всей области определения достаточно рассмотреть полупрямую $[0, +\infty)$.

3. Имеем $y = 0$ при $x = 0$. Других нулей, а также точек разрыва функция не имеет. На полупрямой $(0, +\infty)$ функция является положительной.

4. Найдем точки возможного экстремума на полупрямой $[0, +\infty)$. Вычислим производную функции при $x \neq 1$:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2sgn(1-x^2)}{1+x^2}.$$

Отсюда видно, что производная не обращается в нуль ни в одной точке. Так как $y'(1+0) = -1$, $y'(1-0) = 1$, то в точке $x = 1$ производная не существует. Знак производной при переходе через точку $x = 1$ меняется с плюса на минус. Поэтому в точке $x = 1$ функция имеет локальный максимум, причем $y(1) = \arcsin 1 = \pi/2$. Отметим, что в точке $x = 1$ функция непрерывна, а ее производная имеет разрыв 1 рода. В таком случае соответствующая точка графика [в данном примере точка $(1, \pi/2)$] называется *угловой точкой*. Промежутки монотонности функции определяются знаком производной: $y' > 0$ при $0 \le x < 1$, $y' < 0$ при $x > 1$.

5. Так как вторая производная

$$y'' = \frac{-4x sgn(1-x^2)}{(1+x^2)^2};\ x \neq 1.$$

обращается в нуль лишь при $x = 0$ и при переходе через точку $x = 0$ y'' меняет знак, то в точке $(0, y(0)) = (0, 0)$ график функции имеет перегиб. Направление выпуклости определяется знаком второй производной: $y'' < 0$ при $0 \leq x < 1$, $y'' > 0$ при $x > 1$.

Исследование функции закончено. Перед тем как строить график, удобно изобразить на схеме результаты исследования, в частности промежутки знакопостоянства функции, первой производной y' и второй производной y''. Теперь, считывая информацию со схемы, строим график функции на промежутке $[0, +\infty)$. На отрезке $[0, 1]$: а) функция возрастает от значения $y = 0$ при $x = 0$ до значения $y = \pi/2$ при $x = 1$; б) выпуклость направлена вверх. Далее, на полупрямой $[1, +\infty)$: а) функция убывает, оставаясь положительной; б) выпуклость направлена вниз; в) при $x \to +\infty$ график приближается к асимптоте — оси OX. Отметим, что при переходе через точку $x = 1$ изменяется направление выпуклости графика, но точка $(1, \pi/2)$ не является точкой перегиба — это угловая точка (рис.1).

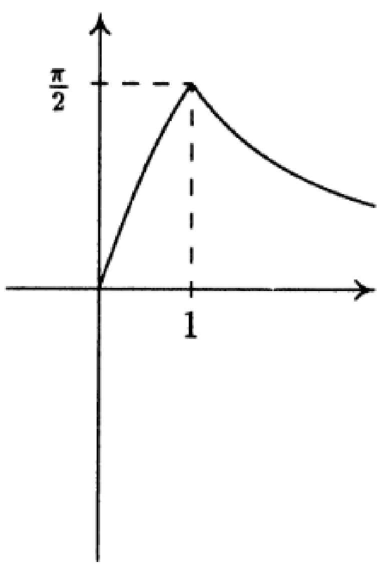

Рис. 1.

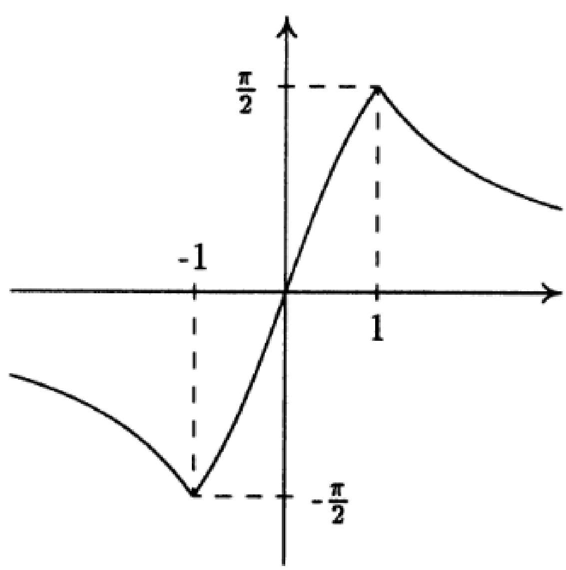

Рис. 2.

Наконец, используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рис.2).

Пример 5.15. *Построить кривую, заданную параметрически:*

$$x = \frac{t}{1-t^2}, \qquad y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

1. Имеем

$$t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty),$$
$$x \in (0, +\infty) \cup (-\infty, +\infty) \cup (-\infty, 0),$$
$$y \in (-\infty, -\infty) \cup (+\infty, -\infty) \cup (+\infty, +\infty).$$

Отсюда следует, что $x = 0$ — вертикальная асимптота кривой, а при $t \to -1$ и $t \to 1$ возможны наклонные асимптоты. Действительно, при $t \to 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y/x = \lim_{t\to 1\mp 0}(1-2t^2) = -1; \lim_{x\to\pm\infty}(y+x) = \lim_{t\to 1\mp 0}\frac{2t-2t^3}{1-t^2} = 2.$$

Аналогично находятся пределы при $t \to -1$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y/x = -1; \quad \lim_{x\to\pm\infty}(y+x) = -2.$$

Итак, кривая имеет две асимптоты: $y = -x + 2$ и $y = -x - 2$.

2. Так как $x(t) = -x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$, то кривая обладает симметрией относительно точки $0(0,0)$. Поэтому достаточно рассмотреть далее множество $M = [0,1) \cup (1,+\infty)$.

3. На множестве M $x(t) = 0$ при $t = 0$; $y(t) = 0$ при $t = 0$, $t = 1/\sqrt{2}$

4. $x'(t) = \dfrac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$, $y'(t) = \dfrac{2t^4-5t^2+1}{(1-t^2)^2}$.

   На множестве M $x'(t) > 0$, а $y'(t) = 0$ при

$$t_1 = 0,5(\sqrt{5-\sqrt{17}}) \approx 0,47 \text{ и } t_2 = 0,5(\sqrt{5+\sqrt{17}}) \approx 1,51.$$

5. Находим первую и вторую производную (по формулам для функций заданных параметрически п.5.2.)

$$f' = \frac{y'}{x'} = \frac{2t^4-5t^2+1}{1+t^2}, \qquad f'' = \frac{\frac{d}{dt}(f')}{x'} = \frac{-4t(1-t^2)^3(3+t^2)}{(1+t^2)^3}.$$

   Отсюда $f'' \leq 0$ при $t \in [0,1)$, $f'' > 0$ при $t \in (1,+\infty)$.

6. Составим таблицу:

(t_p, t_{p+1})	(0; 0.47)	(0.47; 1)	(1; 1.51)	(1.51; $+\infty$)
(x_p, x_{p+1})	(0; 0.6)	(0.6; $+\infty$)	($-\infty$; -1.18)	(-1.18; 0)
(y_p, y_{p+1})	(0; 0.3)	(0.3; $-\infty$)	($+\infty$; 4.2)	(4.2; $+\infty$)
Знак y''	+	+	−	−

7. Строим часть кривой, соответствующую множеству M (рис.3). Далее, используя симметрию кривой, построим всю кривую (рис.4).