**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДООБУСТРОЙСТВА**

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ – ЗАОЧНИКОВ

**Направление подготовки: 270800 «Строительство»
Квалификация (степень) – бакалавр**

ЧАСТЬ I

МОСКВА 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДООБУСТРОЙСТВА

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ – ЗАОЧНИКОВ

Направление подготовки: 270800 «Строительство»
Квалификация (степень) – бакалавр

ЧАСТЬ I

Рекомендовано
Методической комиссией
заочного факультета

МОСКВА 2012

ББК 22.11
УДК 517.521

Составитель Кажан В.А

Математика. Методические указания и контрольные задания для студентов – заочников. Направление подготовки: 270800 «Строительство». Квалификация (степень) – бакалавр. Часть I. М.: МГУП, 2012, 46 с.

Методические указания предназначены для студентов – заочников МГУП с целью повышения эффективности самостоятельной работы и выполнения ими контрольных заданий по курсу «Математика».

Рецензенты:

Наумов С.А. (доцент кафедры «Теоретическая механика и теория механизмов и машин» МГУП).

Васильев А.И. (доцент кафедры «Строительная механика» МГУП)

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые студенты-заочники! В этой книжке Вы найдете варианты контрольных заданий и методические указания, которые помогут Вам выполнить эти задания и подготовиться к экзамену по математике.

Для изучения материала Вам рекомендуется следующая литература (в последующем тексте будут ссылки именно на указанные ниже учебники).

Список литературы:

[1] В.С. Шипачев, Высшая математика, М.: Высшая школа, 2002.

[2] Н.С. Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, 2, М.,: Наука, 2005.

[3] Я.Ф.Бугров, С.М.Никольский, Дифференциальное и интегральное исчисление, М., Дрофа, 2006.

[4] Г.Н. Берман, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М.,: Профессия, 2006.

[5] Д.В.Клетеник, Сборник задач по аналитической геометрии, СПб., Профессия, 2007.

На первом курсе студенты должны выполнить **две контрольные работы: № 1 и № 2.**

Перед выполнением контрольной работы рекомендуется проработать основные вопросы по соответствующим темам и ознакомиться с методическими указаниями к решению задач по этим темам.

<u>Контрольная работа № 1</u>. Задачи 101 – 110 (Элементы векторной алгебры), 201 – 210 (Аналитическая геометрия на плоскости), 301 – 310 (Аналитическая геометрия в пространстве), 401 – 410 (Введение в анализ).

<u>Контрольная работа № 2</u>. Задачи 501 - 510 (Производная), 511 - 520 (Правило Лопиталя), 521 - 530 (Полное исследование функции), 601 - 610 (Неопределенный интеграл), 701 - 710 (Определенный интеграл).

Номера задач, которые Вам следует решать, определяются следующим образом: последняя цифра номера задачи должна совпадать с последней цифрой номера Вашей зачетной книжки. Так, например, если номер зачетной книжки 12418, то на первом курсе следует решать задачи 108, 208, 308, 408 (контрольная работа № 1), 508, 518, 528, 608, 708 (контрольная работа № 2).

Тема 1. Элементы векторной алгебры

Литература [1], гл. 9, 10.

Основные вопросы.

1. Определители второго и третьего порядков. (Гл. 10, § 2)
2. Понятие вектора. Координаты вектора. (Гл. 9, § 2)
3. Линейные операции над векторами. Условие коллинеарности векторов. (Гл. 9, §§ 3 - 5)
4. Скалярное произведение векторов: определение и основные свойства. Скалярное произведение векторов в координатах. (Гл. 9, § 6)
5. Угол между двумя векторами. Условие перпендикулярности двух векторов. (Гл. 9, § 6)
6. Векторное произведение векторов: определение и основные свойства. Векторное произведение векторов в координатах (Гл. 9, § 7)
7. Площадь параллелограмма. (Гл. 9, § 7)
8. Смешанное произведение векторов: определение и основные свойства. Смешанное произведение векторов в координатах. (Гл. 9, § 8)
9. Условие компланарности векторов. Объем тетраэдра (Гл.9, § 8)

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Даны вершины треугольника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$ и $C(1;-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине A.

Решение. Искомый угол $\hat{A}$ - это угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найдем координаты этих векторов по формуле $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ (из координат конца M_2 вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ вычитаются координаты его начала M_1):

$$\overline{AB} = \{5-3;1-2;-1-(-3)\} = \{2;-1;2\},$$
$$\overline{AC} = \{1-3;-2-2;1-(-3)\} = \{-2;-4;4\}.$$

Вычислим косинус угла $\hat{A}$ по формуле $\cos\hat{A} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}$, где $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ - скалярное произведение векторов, а $|\overline{AB}|$ и $|\overline{AC}|$ - длины векторов. Эта формула в координатах имеет следующий вид: $\cos\hat{A} = \dfrac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$, где $\overline{AB} = \{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\overline{AC} = \{X_2;Y_2;Z_2\}$. Подставляя координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ в эту формулу, получим $\cos\hat{A} = \dfrac{2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+2\cdot 4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+16+16}} = \dfrac{8}{3\cdot 6} = \dfrac{4}{9}$.

<u>*Ответ:*</u> $\hat{A} = \arccos\dfrac{4}{9} \approx 63.61^0$.

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Площадь треугольника ABC найдем по формуле $S = \dfrac{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}{2}$, где $\overline{AB}\times\overline{AC}$ - векторное произведение. Вычислим координаты этих векторов: $\overline{AB} = \{2;-2;-3\}$, $\overline{AC} = \{4;0;6\}$. Векторное произведение векторов $\bar{a} = \{X_1;Y_1;Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2;Y_2;Z_2\}$ находится по формуле:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}.$$

Здесь и далее две вертикальные линии применяются для записи определителя. Определения определителей первого и второго порядков, их свойства и вычисление см. [1], гл. 10, § 2.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\left((-2)\cdot 6-0\cdot(-3)\right)-\bar{j}\left(2\cdot 6-4\cdot(-3)\right)+\bar{k}\left(2\cdot 0-4\cdot(-2)\right)=-12\bar{i}-24\bar{j}+8\bar{k}.$$

Таким образом, вектор $\overline{AB}\times\overline{AC}=\{-12;-24;8\}$.

Вычислим длину этого вектора:

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{4^2\left(3^2+6^2+2^2\right)}=4\cdot 7=28.$$

<u>*Ответ:*</u> $S=14$.

Пример 3. Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}=\{2;3;-1\}$, $\bar{b}=\{1;-1;3\}$, $\bar{c}=\{1;9;-11\}$.

Решение. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, если смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$. Смешанное произведение векторов $\bar{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\bar{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, $\bar{c}=\{X_3;Y_3;Z_3\}$ находится по формуле: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$. Подставим координаты векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 9 & -11\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -11\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 9\end{vmatrix}=$$

$$=2(11-27)-3(-11-3)-1(9+1)=-32+42-10=0.$$

<u>*Ответ:*</u> Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны.

Задачи для контрольных работ.

101 - 110. Даны вершины $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, $A_4(x_4;y_4;z_4)$ пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) внутренний угол при вершине A_1 в треугольнике $A_1A_2A_4$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

101. $A_1(3;2;1)$, $A_2(2;-1;8)$, $A_3(2;-1;2)$, $A_4(6;-1;6)$.

102. $A_1(-1;3;2)$, $A_2(-8;5;0)$, $A_3(-3;7;-5)$, $A_4(-4;1;3)$.

103. $A_1(2;0;-1)$, $A_2(-2;-11;5)$, $A_3(1;-4;-1)$, $A_4(-2;1;-4)$.

104. $A_1(4;-2;3)$, $A_2(10;-3;-2)$, $A_3(8;-6;3)$, $A_4(5;-6;0)$.

105. $A_1(2;-5;2)$, $A_2(-7;2;4)$, $A_3(6;-1;3)$, $A_4(0;1;5)$.

106. $A_1(0;1;1)$, $A_2(3;4;4)$, $A_3(-3;9;3)$, $A_4(0;5;4)$.

107. $A_1(-2;0;4)$, $A_2(3;-3;7)$, $A_3(-3;-5;11)$, $A_4(-2;-7;15)$.

108. $A_1(5;-1;3)$, $A_2(8;8;-3)$, $A_3(2;0;-2)$, $A_4(4;1;0)$.

109. $A_1(3;2;-2)$, $A_2(1;3;1)$, $A_3(6;2;0)$, $A_4(0;2;2)$.

110. $A_1(3;-2;3)$, $A_2(0;-6;-1)$, $A_3(5;-9;-8)$, $A_4(3;-8;-5)$.

Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости

Литература [1], гл. 3.

Основные вопросы.

1. Деление отрезка в данном отношении. (§ 2)
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. (§ 6)
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом. (§ 6)
4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. (§ 6)
5. Угол между двумя прямыми. (§ 6)
6. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. (§ 6)

7. Общее уравнение прямой. (§ 6)
8. Расстояние от точки до прямой. (§ 6)

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Даны три вершины $A(-3;-1)$, $B(2;2)$, $C(9;1)$ параллелограмма $ABCD$. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

Решение. Для нахождения уравнений сторон AB и BC воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Следовательно, уравнение стороны AB имеет вид: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y+1}{2+1}$ или $\frac{x+3}{5}=\frac{y+1}{3}$. Приведем это уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$: $3(x+3)=5(y+1)$, $3x+9=5y+5$, $3x-5y+4=0$, $y=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$.

Аналогично находим уравнение стороны BC: $\frac{x-2}{9-2}=\frac{y-2}{1-2}$, $-(x-2)=7(y-2)$ или $y=-\frac{1}{7}x+\frac{16}{7}$.

Напишем уравнение стороны CD, параллельной AB. Для этого используем тот факт, что условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_2=k_1$. Угловой коэффициент прямой AB: $k_1=\frac{3}{5}$. Далее воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$, с данным угловым коэффициентом k: $y-y_0=k(x-x_0)$. Итак, уравнение стороны CD, проходящей через точку $C(9;1)$ и имеющей угловой коэффициент $k_2=\frac{3}{5}$. можно записать в виде: $y-1=\frac{3}{5}(x-9)$ или $y=\frac{3}{5}x-\frac{22}{5}$.

Аналогично найдем уравнение стороны AD, параллельной BC. Прямая AD проходит через точку $A(-3;-1)$ и имеет угловой коэффициент $k=-\frac{1}{7}$. Следовательно, ее уравнение будет иметь вид $y+1=-\frac{1}{7}(x+3)$ или $y=-\frac{1}{7}x-\frac{10}{7}$.

<u>*Ответы:*</u> AB: $y=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$; BC: $y=-\frac{1}{7}x+\frac{16}{7}$; CD: $y=\frac{3}{5}x-\frac{22}{5}$; AD: $y=-\frac{1}{7}x-\frac{10}{7}$.

Пример 2. Даны две точки $A(-3;1)$, $B(9;5)$. На отрезке AB найти координаты точки C, делящей этот отрезок пополам.

Решение. Пусть точки A, B, C имеют координаты $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$, где тоска C является серединой отрезка AB, тогда можно написать, что $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$. Следовательно, в данном случае получаем: $x_3=\frac{-3+9}{2}=3$, $y_3=\frac{1+5}{2}=3$.

<u>*Ответ:*</u> $C(3;3)$.

Пример 3. Даны две точки $A(-3;1)$, $B(9;6)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $C(5;-2)$ перпендикулярно отрезку AB.

Решение. Вектор $\overline{N}=\overline{AB}=(12;5)$ является нормальным вектором искомой прямой. Пусть $M(x;y)$ произвольная точка прямой, тогда вектор $\overline{CM}=(x-5;y+2)$ - это вектор, лежащий на данной прямой. Следовательно, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CM}$ перпендикулярны. Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения: $\overline{AB}\cdot\overline{CM}=0$. Запишем это условие в координатах: $12\cdot(x-5)+5\cdot(y+2)=0$, или $12x+5y-50=0$.

<u>*Ответ:*</u> $12x+5y-50=0$.

Задачи для контрольных работ.

201 - 210. Даны вершины $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ треугольника. Найти: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины C; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

201. $A(5; 1), B(1; 3), C(-4; 10)$.
202. $A(14;10), B(-2;-2), C(5;22)$.
203. $A(-13; 3), B(-1; -3), C(2; 2)$.
204. $A(22; -6), B(-2; 4), C(-6; -2)$.
205. $A(12; 4), B(-2; -2), C(-6; 0)$.
206. $A(6; 0), B(2; -6), C(-3; -9)$.
207. $A(15;9), B(-1;-3), C(6;21)$.
208. $A(-8; 4), B(4; -2), C(7; 2)$.
209. $A(10; -2), B(-4; 4), C(-8; 2)$.
210. $A(13; 5), B(-1; -3), C(-5; 1)$.

Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве

Литература [1], гл. 9.

Основные вопросы.

1. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл коэффициентов уравнения. (§ 11)
2. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. (§ 11)
3. Расстояние от точки до плоскости. (§ 11)
4. Канонические и параметрические уравнения прямой. (§ 12)
5. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. (§ 12)
6. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости (§ 13)

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(2;-1;3)$, $M_1(3;1;2)$ $M_2(4;2;1)$

Решение. Для того чтобы составить уравнение плоскости, нужно взять произвольную точку $M(x;y;z)$, лежащую на этой плоскости. Далее запишем координаты трех векторов: $\overline{M_0M}=(x-2;y+1;z-3)$, $\overline{M_0M_1}=(1;2;-1)$ и $\overline{M_0M_2}=(2;3;-2)$. Эти векторы должны быть компланарными. Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Запишем это условие в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим получившийся определитель разложением определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot(x-2)-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\cdot(y+1)+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\cdot(z-3)=0$$

После вычисления трех определителей второго порядка получаем:

$$-1(x-2)-0(y+1)-1(z-3)=0 \quad \text{или} \quad -x-z+5=0.$$

<u>*Ответ:*</u> $x+z-5=0$.

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;0)$, перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z+1}{4}$.

Решение. Будем искать уравнение плоскости в следующем виде: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. В этом уравнении коэффициенты A,B,C являются координаты нормального вектора $\overline{N}$ этой плоскости, а координаты x_0,y_0,z_0 – координатами точки

M_0, лежащей на этой плоскости. По условию задачи точка $M_0(2;-1;0)$ лежит на искомой плоскости, а в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости можно взять направляющий вектор $\overline{a}=(3;-5;4)$ данной прямой, поскольку эта прямая перпендикулярна искомой плоскости. Подставляя эти данные в уравнение, получим $3(x-2)-5(y+1)+4(z-0)=0$ или $3x-5y+4z-11=0$.

<u>*Ответ:*</u> $3x-5y+4z-11=0$.

Пример 3. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;0)$, перпендикулярно плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, здесь x_0, y_0, z_0 - координаты точки M_0, лежащей на этой прямой, а l, m, n - координаты направляющего вектора $\overline{a}$ этой прямой. По условию задачи нормальный вектор плоскости $\overline{N}=(2;3;1)$ параллелен искомой прямой, следовательно, вектор $\overline{N}$ можно взять в качестве направляющего вектора $\overline{a}$ искомой прямой. Следовательно, канонические уравнения искомой прямой будут иметь вид: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$.

<u>*Ответ:*</u> $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$.

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$, параллельно плоскости $7x-3y+2z-8=0$.

Решение. Будем искать уравнение плоскости в следующем виде: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (см. решение ***Примера 2***). В качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять нормальный вектор $\overline{N}=(7;-3;2)$ данной плоскости, так как данная плоскость параллельна искомой плоскости. Таким образом, уравнение плоскости будет иметь вид: $7(x-2)-3(y+1)+2(z-3)=0$ или $7x-3y+2z-23=0$

Ответ: $7x-3y+2z-23=0$.

Пример 5. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-2;3)$, параллельно отрезку AB, где $A(2;5;-3)$ и $B(3;-1;1)$,

Решение. По условию задачи точка $M_0(2;-2;3)$ лежит на искомой прямой. Вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(1;-6;4)$ параллелен этой прямой, следовательно, этот вектор можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой. Запишем канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-3}{4}$.

Ответ: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-3}{4}$

Пример 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Решение. В условии задачи даны канонические уравнения прямой. Перейдем к параметрическим уравнениям этой прямой. Введем параметр t: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t$ и выразим x,y,z через t:

$\frac{x-1}{1}=t \Rightarrow x=t+1$, $\frac{y+1}{-2}=t \Rightarrow y=-2t-1$, $\frac{z}{6}=t \Rightarrow z=6t$.

Уравнения $x=t+1,\ y=-2t-1,\ z=6t$ являются параметрическими уравнениями прямой. Для того, чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, нужно решить систему уравнений, состоящую из параметрических уравнений прямой и уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t-1 \\ z=6t \\ 2x+3y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t-1 \\ z=6t \\ 2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-1 \\ z = 6t \\ 2t-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-1 \\ z = 6t \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 6 \\ t=1 \end{cases}$$

Точка $(2;-3;6)$ является пересечением прямой и плоскости.

Ответ: $(2;-3;6)$.

Задачи для контрольных работ.

301 - 310. Даны вершины $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, $A_4(x_4;y_4;z_4)$ пирамиды. Найти: 1) уравнение плоскости, проходящей через вершины A_1, A_2, A_3; 2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 4) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_4 параллельно грани $A_1A_2A_3$; 5) уравнение прямой, проходящей через вершину A_2 параллельно ребру A_1A_4.

301. $A_1(3;2;1)$, $A_2(2;-1;8)$, $A_3(2;-1;2)$, $A_4(6;-1;6)$.

302. $A_1(-1;3;2)$, $A_2(-8;5;0)$, $A_3(-3;7;-5)$, $A_4(-4;1;3)$.

303. $A_1(2;0;-1)$, $A_2(-2;-11;5)$, $A_3(1;-4;-1)$, $A_4(-2;1;-4)$.

304. $A_1(4;-2;3)$, $A_2(10;-3;-2)$, $A_3(8;-6;3)$, $A_4(5;-6;0)$.

305. $A_1(2;-5;2)$, $A_2(-7;2;4)$, $A_3(6;-1;3)$, $A_4(0;1;5)$.

306. $A_1(0;1;1)$, $A_2(3;4;4)$, $A_3(-3;9;3)$, $A_4(0;5;4)$.

307. $A_1(-2;0;4)$, $A_2(3;-3;7)$, $A_3(-3;-5;11)$, $A_4(-2;-7;15)$.

308. $A_1(5;-1;3)$, $A_2(8;8;-3)$, $A_3(2;0;-2)$, $A_4(4;1;0)$.

309. $A_1(3;2;-2)$, $A_2(1;3;1)$, $A_3(6;2;0)$, $A_4(0;2;2)$.

310. $A_1(3;-2;3)$, $A_2(0;-6;-1)$, $A_3(5;-9;-8)$, $A_4(3;-8;-5)$.

Тема 4. Введение в анализ

Литература. [1], гл. 2, 4.

Основные вопросы.

1. Числовые последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Основные свойства бесконечно малых последовательностей. (Гл. 2, § 1)
2. Предел последовательности, основные свойства пределов. (Гл. 2, § 2).
3. Монотонные последовательности, признак сходимости монотонных последовательностей. Число e. (Гл. 2, § 3)
4. Предел функции, теоремы о пределах функций. (Гл. 4, §§ 1-3)
5. Первый и второй замечательные пределы. (Гл. 4, § 4).
6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. (Гл. 4, §§ 5, 6)
7. Понятие непрерывности функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность некоторых элементарных функций. Непрерывность сложной и обратной функций. (Гл. 4, §§ 7, 8).
8. Классификация точек разрыва функции. (Гл. 4, § 9).
9. Основные свойства непрерывных на отрезке функций. Теорема о прохождении функции через любое промежуточное значение, теорема об ограниченности непрерывной функции, теорема о достижении непрерывной функцией своих наибольшего и наименьшего значений на отрезке. (Гл. 4, § 10).

Важнейшими понятиями этой темы являются понятия предела последовательности, предела функции, непрерывности функции.

Рассмотрим решения некоторых задач на вычисление пределов (не используя правило Лопиталя).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-x+2}{1-4x^3}$.

Решение. При $x \to \infty$ числитель и знаменатель неограниченно возрастают по абсолютной величине, т.е. являются бесконечно большими функциями. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на x^3 (x в наибольшей степени)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-x+2}{1-4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^3}-4}=\frac{0-0+0}{0-4}=0\,.$$

<u>*Ответ*</u>: 0.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+x}+\sqrt[3]{27x^6+2}}{3x^2-x+2}$.

Решение. В этом примере также как и в ***Примере 1*** имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, сделаем следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+x}+\sqrt[3]{27x^6+2}}{3x^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^5}}+\sqrt[3]{27+\frac{2}{x^6}}\right)}{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^5}}+\sqrt[3]{27+\frac{2}{x^6}}}{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1+3}{3}=\frac{4}{3}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\frac{4}{3}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}$.

Решение. Числитель и знаменатель функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}$ стремятся к нулю при $x\to-4$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, сделаем следующие преобразования:

1) умножим числитель и знаменатель на «сопряженное» числителю выражение $\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x}$;
2) разложим на множители квадратный трехчлен знаменателя по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена. В этом примере: $x_1=-4,\ \ x_2=\dfrac{2}{3}$;
3) сократим дробь на общий множитель $x+4$, который обращает в нуль знаменатель и числитель.

В результате получим

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}=\lim_{x\to-4}\frac{\left(\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}\right)\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x}\right)}{\left(3x^2+10x-8\right)\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{\left(\sqrt{5+x}\right)^2-\left(\sqrt{9+2x}\right)^2}{\left(3x^2+10x-8\right)\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x}\right)}=\lim_{x\to-4}\frac{5+x-(9+2x)}{\left(3x^2+10x-8\right)\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{-x-4}{3(x+4)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x}\right)}=\lim_{x\to-4}\frac{-(x+4)}{(x+4)(3x-2)\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{-1}{(3x-2)\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x}\right)}=\frac{-1}{-14\cdot(1+1)}=\frac{1}{28}$$

Ответ: $\dfrac{1}{28}$

Рассмотрим примеры, в которых при вычислении пределов применяется следующая теорема:

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: 1)* $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ *- бесконечно малые (бесконечно большие)* *функции при* $x \to a$, *2) имеет место эквивалентность функций* $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ *при* $x \to a$, *3) существует предел* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Таблица 1

При $x \to 0$		
1. $\sin x \sim x$,	2. $tgx \sim x$,	3. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$,
4. $\arcsin x \sim x$,	5. $arctg\, x \sim x$,	6. $\ln(1+x) \sim x$,
7. $e^x - 1 \sim x$,	8. $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$.	

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x\sin x} - 1}{1 - \cos 4x}$.

Решение. Числитель и знаменатель функции $\dfrac{e^{3x\sin x} - 1}{1 - \cos 4x}$ стремятся к нулю при $x \to 0$, т.е. имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Найдем предел этой функции, заменяя числитель и знаменатель эквивалентными функциями. Согласно таблице 1 (см. формулы 7, 3, 1) имеем

$$e^{3x\sin x} - 1 \sim 3x\sin x, \quad 1 - \cos 4x \sim \frac{(4x)^2}{2}; \quad \sin x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x\sin x} - 1}{1 - \cos 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x\sin x}{\dfrac{(4x)^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot 3x \cdot x}{16x^2} = \frac{3}{8}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\dfrac{3}{8}$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{4}}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{3x+2}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{4}=\infty$, то имеет место неопределенность вида 1^{∞}. Вычислим предел, применяя логарифмическую формулу $A=e^{\ln A}$ и заменяя бесконечно малую функцию $\ln\left(1+\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}-1\right)\right)$ при $x\to\infty$ эквивалентной $\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}-1\right)$ (см. формулу 6 таблицы 1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{4}}=\lim_{x\to\infty}\left(e^{\ln\frac{3x-1}{3x+2}}\right)^{\frac{x+1}{4}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x+1}{4}\ln\frac{3x-1}{3x+2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{4}\ln\frac{3x-1}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{4}\ln\left(1+\left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{4}\left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{4}\cdot\frac{-3}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(1+1/x)}{4(3+2/x)}}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

<u>*Ответ*</u>: $e^{-1/4}$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. В этом примере имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Сделаем замену переменных: $x=\frac{\pi}{4}+t$, здесь $t\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)}{\sin t}=$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin 2t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t}{t} = -2.$$

<u>*Ответ:*</u> -2.

Задачи для контрольных работ.

401 - 410. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

401. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)^2-(1-2x)^2}{3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x+3}{\sqrt{x}-1}$;

в); $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{tg^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{5x+1}$.

402. а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{3x-6}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 3} (7-2x)^{\frac{2}{3-x}}$.

403. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2-7x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{3x}}{\arcsin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{5-x}-1}{x-4}$.

404. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-7x+2}{\sqrt{x+2}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{5x+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4-3x^2+2}{7x+3x^4}$; г). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin\frac{x}{2}}{1-\cos 3x}$.

405. а) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{3}{x^2-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x}-x}{\sqrt{2x^4+x^3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg5x}{\sin^2 2x}$; г). $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{4x^2+3x-1}{\sqrt{4x}-1}$

406. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2)^2+3x^4}{x^4-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{2x^2-5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{\frac{5}{x-2}}$.

407. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{4x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{5}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sin(x-1)}$.

408. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x\cdot\sin 2x}{2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(3x+4)^{\frac{2x}{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2+2x^3}{(1+x)^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{7x-10-x^2}{\sqrt{6-x}-1}$.

409. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{2x^2+9x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^{x+3}-e}{x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{3}{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\arcsin 2x}$;.

410. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-2x^2+x^3}{4+x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{\sqrt{x-4}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{\frac{x+2}{x}}$.

Тема 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Литература. [1], гл.5, 6; [2], гл. III-V.

Основные вопросы.

1. Определение производной (физический и геометрический смысл производной). ([1], гл. 5, § 1)
2. Таблицы основных формул дифференцирования. ([1], гл. 5, §§ 4, 9)
3. Дифференциал. ([1], гл. 5, §§ 2, 3)
4. Вторая производная. ([1], гл. 5, § 10). Механический смысл второй производной. ([2], гл. III, § 25)
5. Касательная к графику функции; уравнение касательной. ([2], гл. III, § 26)
6. Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа. ([1], гл. 6 § 1)
7. Правило Лопиталя. ([1], гл. 6 § 2)
8. Исследование функции на возрастание и убывание. ([1], гл. 6 § 4)
9. Экстремумы функции. ([1], гл. 6 § 2)
10. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. ([2], гл. V § 6)
11. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. ([1], гл. 6 § 4)
12. Асимптоты. ([1], гл. 6 § 4)
13. Построение графиков функции. ([1], гл. 6 § 4)

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Найти производные функций указанного порядка

а) $y = 3\mathrm{ctg}x + \dfrac{e^x}{1-x}$, найти y';

б) $y = \sin^3 x$, найти y' и y''.

Решение. Рассмотрим п. а).

1. Сначала применим правило дифференцирования суммы $(u+v)' = u' + v'$**;**

2. При дифференцировании первого слагаемого используем формулу: $(c\,f(x))' = c(f(x))'$, где c - постоянная;
3. При дифференцировании второго слагаемого используем формулу: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

В результате получим

$$y' = \left(3ctg\,x + \frac{e^x}{1-x}\right)' = (3ctg\,x)' + \left(\frac{e^x}{1-x}\right)' = 3(ctg\,x)' +$$

$$+ \frac{(e^x)'(1-x) - (1-x)'e^x}{(1-x)^2} = 3\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + \frac{e^x(1-x) - (-1)e^x}{(1-x)^2} =$$

$$= -\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{e^x(1-x+1)}{(1-x)^2} = -\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$$

Рассмотрим п. б). Замечая, что $y = \sin^3 x$ является сложной функцией $y = u^3$, где $u = \sin x$, применим правило дифференцирования сложной функции: $(y(u(x)))_x' = y_u' \cdot u_x'$. Получим: $y_x' = (u^3)_u' \cdot u_x' = 3u^2 \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

Найдем y''. Поскольку $y'' = (y')'$, то

$$y'' = (3\sin^2 x\cos x)' = 3(\sin^2 x \cdot \cos x)' = 3\left((\sin^2 x)'\cos x + \sin^2 x(\cos x)'\right) =$$

$$= 3\left((2\sin x(\sin x)')\cos x + \sin^2 x(-\sin x)\right) =$$

$$= 3\left((2\sin x\cos x)\cos x - \sin^3 x\right) = 3\left(\sin 2x\cos x - \sin^3 x\right).$$

При вычислении производной использовали формулу производной произведения двух функций: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ и правило дифференцирования сложной функции: $(y(u(x)))_x' = y_u' \cdot u_x'$.

<u>*Ответы*</u>: а) $y' = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} - \frac{3}{\sin^2 x}$; б) $y' = 3\sin^2 x\cos x$,

$$y'' = 3\left(\sin 2x\cos x - \sin^3 x\right).$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Решение. По определению дифференциал функции равен $dy = y'dx$. Вычислим с помощью логарифмической производной производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где u и v - функции от x (в этом примере $u = \cos x$, а $v = \sin x$). Так как $\ln y = v(x)\ln u(x)$ и $(\ln y(x))' = \frac{1}{y}\cdot y'$ то $\frac{1}{y}\cdot y' = (v\ln u)'$. Отсюда $y' = y\cdot(v\ln u)'$. Значит для данной функции:

$$y' = (\cos x)^{\sin x}(\sin x\cdot\ln\cos x)' =$$
$$= (\cos x)^{\sin x}\left((\sin x)'\ln\cos x + \sin x(\ln\cos x)'\right) =$$
$$= (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x + \sin x\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\right) =$$
$$= (\cos x)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln\cos x - tgx\cdot\sin x).$$

Тогда дифференциал функции

$$dy = \left((\cos x)^{\sin x}\right)' dx = (\cos x)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln\cos x - tgx\cdot\sin x)dx$$

Ответ: $dy = (\cos x)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln\cos x - tgx\cdot\sin x)dx$

Пример 3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

Решение. а) Пределы числителя и знаменателя равны 0, значит, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.$$

б) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, то имеем неопределенность вида $\infty\cdot 0$. Так как $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, то можно преобразовать эту неопределенность к виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, а затем применить правило Лопиталя. В результате получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

в) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x - 1} = \infty$ ($\lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = \lim\limits_{x\to 0} e^x - 1 = e^0 - 1 = 0$), то имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Сведем ее к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, приводя дроби к общему знаменателю, а затем применим дважды правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1 - x)'}{(x(e^x - 1))'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{1\cdot(e^x - 1) + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1 + xe^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2 + x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

г) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$. Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x = 1$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x = \infty$, то имеем неопределенность вида 1^∞. Используя основное логарифмическое тождество $A = e^{\ln A}$, получим

$$(\sin x)^{tg\, x} = \left(e^{\ln \sin x}\right)^{tg\, x} = e^{tg\, x \ln \sin x}.$$

Тогда $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\mathrm{tg} x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{tg} x \ln \sin x} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \mathrm{tg} x \ln \sin x}$.

Найдем предел показателя:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \mathrm{tg} x \ln \sin x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \ln \sin x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos x} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\ln \sin x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x} = \frac{\frac{0}{1}}{-1} = 0.$$

При вычислении этого предела использовано правило Лопиталя поскольку пределы числителя и знаменателя равны нулю: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln \sin x = \ln 1 = 0$ и $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\mathrm{tg} x} = e^0 = 1$.

<u>*Ответы*</u>: а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

Пример 4. Провести полное исследование функции $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$ и построить ее график.

Решение. Исследуем функцию согласно схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
3. Найти точки разрыва функции и асимптоты графика функции.

4. Найти интервалы монотонности, точки экстремума функции, а также максимальные и минимальные значения функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика и точки перегиба.
6. Построить график функции, учитывая исследование, проведенное в п.п. 1 – 5.

Для данной функции:

1. Область определения функции $D_f = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.
2. Точки пересечения графика с осями координат:

а) с осью Ox: $y=0$, тогда $\dfrac{x^2}{1+x}=0$, отсюда $x=0$;

б) с осью Oy: $x=0$, тогда $y=\dfrac{0}{1-0}=0$.

График пересекает оси в начале координат. Найдем интервалы знакопостоянства функции, т.е. интервалы, где она положительна и интервалы, где она отрицательна. Функция $f(x)>0$, при $\dfrac{x^2}{1-x}>0$, т.е. при $1-x>0$, $x<1$. Итак, $f(x)>0$ при $x \in (-\infty;1)$; $f(x)<0$ при $x \in (1;+\infty)$.

3. Точка разрыва: $x=1$.

Асимптоты: $x=1$ - вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x}=\infty$. Найдем уравнение наклонной асимптоты: $y=kx+b$.

Угловой коэффициент $k=-1$, т.к. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(1-x)x}=-1$, и $b=-1$, т.к.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x}=-1.$$

Таким образом, $y=-x-1$ - наклонная асимптота графика.

4. Найдем производную функции

$$f'(x)=\frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

Найдем критические точки первой производной: $f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=2$; производная не существует при $x=1$, но в точке $x=1$ данная функция не определена. Итак, критическими точками являются точки $x=0$ и $x=2$. Изучим поведение функции на всей числовой оси. Результаты представим в таблице 2.

Таблица 2

x	$(-\infty;\,0)$	0	$(0;\,1)$	1	$(1;\,2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	не существует	+	0	–
$f(x)$	убывает	0 min	возрастает	не существует	возрастает	–4 max	убывает

5. Найдем производную второго порядка

$$f''(x)=\frac{(2-2x)(1-x)^2+2\left(2x-x^2\right)(1-x)}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{2-2x-2x+2x^2+4x-2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

$f''(x)>0$ при $(1-x)^3>0$, т.е. при $1-x>0$ или при $x\in(-\infty;1)$ и на этом промежутке график имеет выпуклость вниз, а при $x\in(1;+\infty)$ - выпуклость вверх. Отметим это в таблице 3.

Таблица 3

x	$(-\infty;\,1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	+	не существует	–
$f(x)$	выпуклость вниз	не существует	выпуклость вверх

График функции не имеет точек перегиба, так как производная второго порядка ни в одной точке не обращается в нуль.

6. На основании проведенного исследования построим график функции (Рис. 1.)

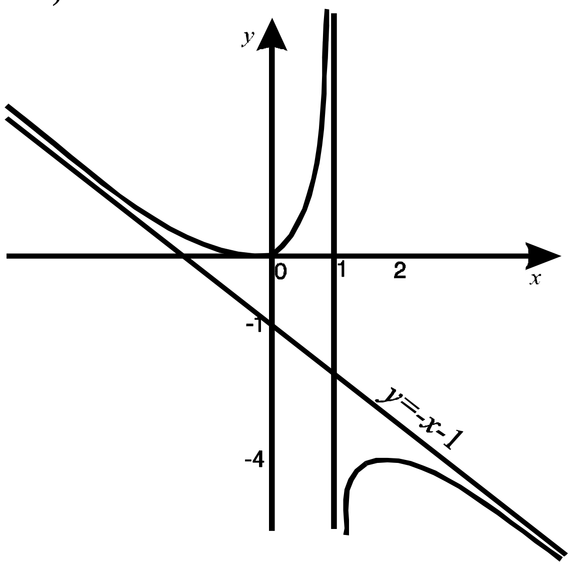


Рис. 1

Задачи для контрольных работ.

501 - 510. Для заданных функций найти

а) первую производную y' и вторую производную y'';

б), в) первую производную y';

г) дифференциал dy

501. а) $y = 3x^4 - \dfrac{5}{3x^3} - 1$, б) $y = (x^2 - 1)\ln 2x$,

в) $y = \dfrac{\cos x^2}{\sin 3x}$, г) $y = e^{\sin 5x}$.

502. а) $y = 2x^5 - \dfrac{1}{3x^3} + 5$, б) $y = (x^3 + x - 1)\sin 4x$,

в) $y=\dfrac{2^x}{\sin^2 x}$, г) $y=\sin^4 x$.

503. а) $y=4x^2-\dfrac{5}{3x^6}+1$, б) $y=\left(2x^2-7x\right)\cdot 10^{(1-x)}$,

в) $y=\dfrac{x}{\sin^2 x}$, г) $y=\operatorname{ctg}^2 x$.

504. а) $y=3-\dfrac{x^5}{6}+\dfrac{6}{x^5}$, б) $y=3^{\sqrt{x}}\operatorname{tg}7x$,

в) $y=\dfrac{\sin x^2}{x^3-1}$, г) $y=\sin^3 3x$.

505. а) $y=2x^2+\dfrac{3}{x^2}+5$, б) $y=\left(1-x^3\right)\operatorname{arctg}6x$,

в) $y=\dfrac{\sin(1-x)}{x^2+6}$, г) $y=tg^3\left(2x-3\right)$.

506. а) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{4}{x^4}+5$, б) $y=(1+\operatorname{arctg}3x)e^x$,

в) $y=\dfrac{\cos\left(1-3x\right)}{x^2}$, г) $y=6^{\sqrt{x}}$.

507. а) $y=\dfrac{x^7}{5}+\dfrac{3}{x^3}+1$, б) $y=\left(1-2x+x^2\right)\operatorname{tg}6x$,

в) $y=\dfrac{\sin\left(2-x\right)}{e^{3x}}$, г) $y=ctg^2 2x$.

508. а) $y=1-\dfrac{2}{x^6}-\dfrac{(x+1)^2}{3}$, б) $y=\sqrt{x}\cdot\arccos\left(1-x^2\right)$,

в) $y=\dfrac{3+2x}{\sin^4 x}$, г) $y=\cos^3 7x$.

509. а) $y=\frac{5x^3}{3}+\frac{6}{x}-1$, б) $y=e^{\sqrt{x}}(1-\mathrm{arctg}\,8x)$,

в) $y=\frac{4-5x}{\cos^2 3x}$, г) $y=\ln^3 \sin x$.

510. а) $y=1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2x}$, б) $y=(\ln(3x^2-1))\cdot \sin 2x$,

в) $y=\frac{2-\sin x}{\sin e^x}$, г) $y=3^{arctg\, x}$.

511 - 520. Найти пределы с помощью правила Лопиталя

511. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 3x}$; 512. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$;

513. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$; 514. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}$;

515. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$; 516. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$;

517. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg^2 x}$; 518. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x^5}$;

519. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$; 520. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^3}$.

521 - 530. Провести полное исследование данной функции и построить ее график

521. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$; 522. $y=\frac{x^2+1}{x}$; 523. $y=\frac{2}{x^2+2x}$;

524. $y=\frac{4x^2}{3+x^2}$; 525. $y=\frac{2x^2-3}{x^2}$; 526. $y=\frac{x^2-3}{x}$;

527. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$; 528. $y=\dfrac{x^2-2}{x}$; 529. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$;

530. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

Тема 6. Неопределенный интеграл

Литература. [1], гл.7; [2], гл. X.

Основные вопросы.

1. Понятие первообразной. Неопределенный интеграл и его свойства. ([1], гл. 7, §§ 1,2)
2. Таблицы основных интегралов. ([1], гл. 7, § 3)
3. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменных, интегрирование по частям. ([1], гл. 7, § 4)
4. Интегрирование функций вида $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ и $\dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. ([2], гл. X, § 5)
5. Интегрирование рациональных функций. ([1], гл. 7, § 5)
6. Интегрирование иррациональных функций. ([2], гл. X, § 10)
7. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin x, \cos x)$. ([2], Гл. X, § 12)

Важным понятием этой темы является понятие первообразной. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x)=f(x).$$

Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ от функции $f(x)$ на некотором промежутке называется множество всех первообразных для этой функции на этом промежутке.

Известно, что все первообразные для одной и той же функции на некотором промежутке отличаются друг от друга на постоянную величину, поэтому неопределенный интеграл от функции $f(x)$ равен

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке.

Из этих определений следует, что отыскание неопределенного интеграла является операцией, обратной операции дифференцирования. Поэтому перед изучением этой темы рекомендуется повторить свойства и формулы дифференцирования основных элементарных функций, а также следует выучить таблицу основных интегралов и свойства неопределенных интегралов. Отыскание неопределенного интеграла сводится к приведению его путем последовательных преобразований к табличным интегралам. При этом используются основные методы интегрирования: разложение интегралов на сумму интегралов, замена переменных или подстановка, интегрирование по частям.

Пример 1. Найти $\int \frac{x\sin x + \sqrt[3]{x^2} - 2}{x}dx$.

Решение. $\int \frac{x\sin x + \sqrt[3]{x^2} - 2}{x}dx \overset{1)}{=} \int\left(\sin x + \frac{x^{2/3}}{x} - \frac{2}{x}\right)dx \overset{2)}{=}$

$$= \int \sin x dx + \int x^{\frac{2}{3}-1}dx - \int \frac{2}{x}dx \overset{3)}{=} \int \sin x dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx - 2\int \frac{dx}{x} \overset{4)}{=}$$

$$-\cos x + \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 2\ln|x| + C = -\cos x + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 2\ln|x| + C.$$

Пояснения к решению:

1) Поделив почленно числитель на знаменатель, предста-

вили подынтегральную функцию в виде суммы более простых функций.

2) Применили свойство неопределенного интеграла: интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции.

3) В интеграле $\int \frac{2}{x} dx$ вынесли постоянный множитель 2 за знак интеграла.

4) Использовали формулы таблицы основных интегралов.

<u>*Ответ:*</u> $-\cos x + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 2\ln|x| + C$.

Пример 2. Найти $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2+\sin 3x}}$.

Решение. В этом интеграле надо сделать замену переменных

$$\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2+\sin 3x}} \overset{1)}{=} \left\| \begin{array}{l} t = 2+\sin 3x \\ dt = 3\cos 3x dx \\ \cos 3x dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{3} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C \overset{2)}{=} \frac{2}{3}\sqrt{2+\sin 3x} + C.$$

Пояснения к решению:

1) Делаем замену переменных $2+\sin 3x = t$. В прямых скобках приведены вспомогательные преобразования.

2) Снова делаем замену переменных, возвращаясь к прежней переменной x.

<u>*Ответ:*</u> $\frac{2}{3}\sqrt{2+\sin 3x} + C$.

Пример 3. Найти $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4+9x^8}}$.

Решение. В этом интеграле тоже надо сделать замену переменных

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4+9x^8}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2^2+\left(3x^4\right)^2}} = \left\| \begin{array}{l} t = 3x^4 \\ dt = 12x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{12} dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{12} dt}{\sqrt{2^2 + t^2}} =$$

$$= \frac{1}{12} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2+t^2}} = \frac{1}{12} \ln\left| t + \sqrt{2^2+t^2} \right| + C = \frac{1}{12} \ln\left| 3x^4 + \sqrt{4+9x^8} \right| + C.$$

<u>*Ответ:*</u> $\frac{1}{12} \ln\left| 3x^4 + \sqrt{4+9x^8} \right| + C$.

Пример 4. Найти $\int \frac{(4x-3)dx}{2x^2-2x+1}$.

Решение. $$\int \frac{(4x-3)dx}{2x^2-2x+1} = \left\| \begin{array}{l} \left(2x^2-2x+1\right)' = 4x-2 \\ 4x-2 = 4t \\ x - \frac{1}{2} = t \\ x = t + \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{\left(4\left(t+\frac{1}{2}\right)-3\right)dt}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(t+\frac{1}{2}\right)+1} = \int \frac{(4t+2-3)dt}{2\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)-2t-1+1} =$$

$$= \int \frac{4t-1}{2t^2+\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{4t-1}{t^2+\frac{1}{4}} dt = \frac{1}{2} \left(\int \frac{4tdt}{t^2+\frac{1}{4}} - \int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}} \right) = 2 \int \frac{tdt}{t^2+\frac{1}{4}} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\left\|\begin{array}{l} t^2+\frac{1}{4}=z \\ dz=2t\,dt \\ t\,dt=\frac{1}{2}dz \end{array}\right\|=2\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z}-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{2}}=$$

$$=\int\frac{dz}{z}-\operatorname{arctg}2t=\ln|z|-\operatorname{arctg}2t+C=\ln\left|t^2+\frac{1}{4}\right|-\operatorname{arctg}2t+C=$$

$$=\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)-\operatorname{arctg}2\left(x-\frac{1}{2}\right)+C=$$

$$=\ln\left(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$=\ln\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$=\ln\frac{2x^2-2x+1}{2}-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$=\ln\left(2x^2-2x+1\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C-\ln 2=$$

$$=\ln\left(2x^2-2x+1\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C_1.$$

Ответ: $\ln\left(2x^2-2x+1\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C$.

Заметим, что аналогичным способом можно находить интеграл вида $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, в котором также производную функции $\left(ax^2+bx+c\right)$ обозначают через kt, где в качестве k можно брать любую константу.

Пример 5. Найти $\int x^2e^{-x}dx$.

Решение. В этом случае необходимо применить формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv-\int v du$.

$$\int x^2 e^{-x}dx \overset{1)}{=}$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = \left\| \begin{matrix} -x = t \\ dt = -dx \end{matrix} \right\| = \int e^t(-dt) = -e^t = -e^{-x} \end{matrix} \right\| =$$

$$= x^2 \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int \left(-e^{-x}\right) \cdot 2xdx = = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx \overset{2)}{=}$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{matrix} \right\| = -x^2 e^{-x} +$$

$$+ 2\left(x\left(-e^{-x}\right) - \int \left(-e^{-x}\right)dx\right) = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C.$$

Пояснения к решению:

1) Применили формулу интегрирования по частям. Это дало возможность понизить показатель степени степенной функции x^2.

2) Еще раз применили формулу интегрирования по частям.

<u>*Ответ:*</u> $-e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C$.

Пример 6. Найти $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int x arctg 2x dx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} 2x & du = \dfrac{2}{1 + (2x)^2}dx \\ dv = xdx & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x -$$

$$-\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{1 + (2x)^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \int \frac{x^2}{1 + 4x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x -$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{\left(4x^2+1\right)-1}{4x^2+1}\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{4x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\left(\int dx-\int\frac{dx}{1+4x^2}\right)=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\int dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+(2x)^2}=\left\|\begin{matrix} t=2x \\ dt=2\,dx \\ dx=\frac{1}{2}\,dt\end{matrix}\right\|=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\int\frac{\frac{1}{2}dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}t+C=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C=$$

$$=\frac{4x^2+1}{8}\operatorname{arctg}2x-\frac{x}{4}+C.$$

Ответ: $\dfrac{4x^2+1}{8}\operatorname{arctg}2x-\dfrac{x}{4}+C$.

Задачи для контрольных работ.

601 - 610. Найти неопределенные интегралы:

601. а) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$;

в) $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$; г) $\displaystyle\int\sin^3 x\,dx$.

602. а) $\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$;

в) $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$; г) $\displaystyle\int\frac{2dx}{x^2+2x}$.

603. а) $\displaystyle\int\frac{(1+ctgx)\,dx}{\sin^2 x}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$;

в) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}dx$; г) $\displaystyle\int\sin^2 3x\,dx$.

604. а) $\int \frac{x\,dx}{2+3x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4}$;

в) $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$; г) $\int \cos^3 x dx$.

605. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int xe^{5x} dx$; г) $\int \frac{2+3\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$.

606. а) $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$;

в) $\int \ln\left(1+x^2\right) dx$; г) $\int \cos 3x \sin 4x dx$.

607. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}$; б) $\int \frac{6}{x^2-9x} dx$;

в) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$; г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$.

608. а) $\int \frac{\left(1-tg^2 x\right) dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-7}}$;

в) $\int x \sin 4x dx$; г) $\int \frac{\left(4-2x\right) dx}{x^2+4x}$.

609. а) $\int \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}$; б) $\int \sqrt{x} \ln x dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; г) $\int \sin^2 2x dx$.

610. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-4x^4}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$;

в) $\int \frac{\ln 2x}{x^3} dx$; г) $\int tg^3 x dx$.

Тема 7. Определенный интеграл

Литература. [1], гл. 8.

Основные вопросы.

1. Определение определенного интеграла и условия его существования. (§§ 1-3)
2. Основные свойства определенного интеграла. (§§ 4, 5)
3. Формула Ньютона-Лейбница. (§ 7)
4. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. (§§ 8-9)
5. Некоторые геометрические и физические приложения определенного интеграла. (§10)
6. Несобственные интегралы. (§ 11)

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

С помощью определенного интеграла можно находить площади плоских фигур, объемы тел, длины дуг кривых, а также решать многие другие задачи.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

Решение. Найдем сначала неопределенный интеграл

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \left\| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$=-\frac{1}{2t}+C=-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+C.$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_1^3 \frac{xdx}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2(1+x^2)}\Bigg|_1^3=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+3^2}-\frac{1}{1+1^2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\right)=0{,}2.$$

<u>*Ответ:*</u> $0{,}2$.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} x\cos^2 xdx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi/4} x\cos^2 xdx\overset{1)}{=}\int_0^{\pi/4} x\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(x+x\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x\cos 2xdx\overset{2)}{=}\left\|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos 2xdx & v=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin 2xdx\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi^2}{64}-0+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\cos 0\right)=\frac{\pi^2}{64}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}\left(\pi^2+4\pi-8\right).$$

Поясним решение

1) Применили тригонометрическую формулу

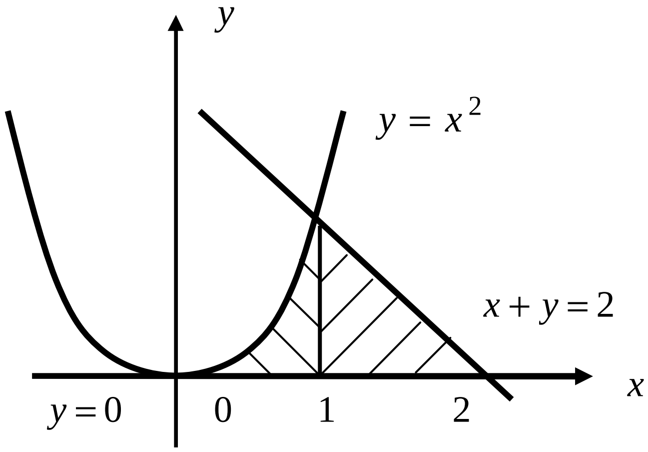
$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, что дало возможность разложить интеграл на сумму двух интегралов.

2) Ко второму интегралу применили формулу интегрирования по частям для определенного интеграла: $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

<u>*Ответ:*</u> $\dfrac{1}{64}\left(\pi^2 + 4\pi - 8\right)$.

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$.

Решение. Сделаем чертеж фигуры:



Применим формулу $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ сначала на отрезке $[0;1]$ к функции $y = x^2$, затем - на отрезке $[1;2]$ к функции $y = 2 - x$.

Тогда

$$V_1 = \pi\int_0^1 (x^2)^2\,dx = \pi\int_0^1 x^4 dx = \pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{5},$$

$$V_2 = \pi\int_1^2 (2-x)^2\,dx = \pi\int_1^2 (x-2)^2 dx = \left\| \begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right\| = \pi\int_{-1}^0 t^2 dt = \pi\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^0 =$$

$$= \frac{\pi}{3}(0-(-1)^3) = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, искомый объем будет равен

$$V = V_1 + V_2 = = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{8}{15}\pi.$$

Заметим, что объем V_2 можно было найти по известной формуле из элементарной математики, как объем конуса.

<u>*Ответ:*</u> $\frac{8}{15}\pi$ (ед.^{3}).

Задачи для контрольных работ

701. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = x + 2$.
702. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{x}{4}$ и $x = 1$.
703. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$ и $y = 2 - x$.
704. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ и $x = 4$.
705. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.

706. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ и $y=0$.

707. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=2x$.

708. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=\sqrt{2x}$ и $y=x$.

709. Найти длину дуги линии $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ от точки с абсциссой $x=0$ до точки с абсциссой $x=1$.

710. Найти длину дуги линии $y=2x\sqrt{x}$ от точки с абсциссой $x=0$ до точки с абсциссой $x=4$.

СОДЕРЖАНИЕ

Кажан Вера Александровна

Математика

Методические указания и контрольные задания
для студентов - заочников

Направление подготовки: 270800 «Строительство»
Квалификация (степень) – бакалавр

Часть I

Московский государственный университет
природообустройства (МГУП)

Зак №   Тираж