Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

А.И. Белоусов, П.А. Власов

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.И. Белоусов, П.А. Власов

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Методические указания
к выполнению домашнего задания

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2012

УДК 519.1
ББК 22.141
Б43

Рецензент *Р.С. Исмагилов*

Белоусов А.И.

Б43 Элементы комбинаторики : метод. указания к выполнению домашнего задания / А.И. Белоусов, П.А. Власов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 53, [3] с. : ил.

Методические указания содержат краткий теоретический материал, необходимый для выполнения домашнего задания по курсу «Дискретная математика». Рассмотрены примеры решения задач, приведены задачи для самостоятельной работы.

Для студентов 2-го курса, обучающихся по специальности ИУ-7.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 519.1
ББК 22.141

Учебное издание

Белоусов Алексей Иванович
Власов Павел Александрович

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Методические указания к выполнению домашнего задания

Редактор *В.М. Царев*
Корректор *Н.А. Фетисова*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 16.03.2011. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,26. Тираж 300 экз. Изд. № 29.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

1. КОМБИНАТОРНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Комбинаторика – раздел математики, изучающий конфигурации конечных множеств. Под словом «*конфигурация*» понимается некоторая совокупность элементов конечного множества, обладающая заданными свойствами. Например, наборы элементов данного множества, составленные с учетом порядка входящих в него элементов или без него; содержащие произвольное или, наоборот, заданное число элементов; содержащие или не содержащие заранее определенные элементы. К основным задачам комбинаторики относят подсчет числа конфигураций, обладающих определенными свойствами, а также описание алгоритма их перечисления. С учетом этого словосочетание «*комбинаторный объект*» будем использовать в качестве синонима термина «*конфигурация*».

1.1. Основные понятия

Пусть M – множество, состоящее из n элементов. Без ограничения общности будем считать, что $M = \{1, 2, \ldots, n\}$; в противном случае элементы M можно перенумеровать и рассматривать не сами объекты, а их номера.

Размещением с повторениями из n ***по*** m будем называть кортеж (упорядоченный набор)

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,, \tag{1.1}$$

где $x_i \in M$, $i = \overline{1;m}$. Число размещений с повторениями из n по m будем обозначать $\tilde{A}_n^m$. Легко видеть, что множество всех таких размещений является m-й декартовой степенью множества M и, следовательно,

$$\tilde{A}_n^m = |M^m| = |M|^m = n^m. \qquad (1.2)$$

Стоит специально отметить, что два размещения считаются равными в том и только том случае, когда имеют одинаковую длину и у них совпадают соответствующие компоненты. При этом, если поменять местами две компоненты, получим, вообще говоря, другое размещение.

Размещением без повторений из n ***по*** m будем называть кортеж

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,, \qquad (1.3)$$

где $x_i \in M$, $i = \overline{1;m}$, и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Последнее условие означает, что все компоненты соответствующего набора должны быть различны. Очевидно, что размещение без повторений существует лишь в случае $m \leqslant n$; при $m = n$ кортеж (1.3) будем называть ***перестановкой длины*** n. Можно показать, что число размещений без повторений из n по m дается формулой

$$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1), \qquad (1.4)$$

из которой следует, что число перестановок длины n

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!.$$

Замечание 1.1. В основе доказательства соотношений (1.2) и (1.4) лежит следующий очень простой прием, удобный для запоминания. Поскольку множество M состоит из n элементов, каждую из m компонент кортежа (1.3) можно заполнить одним из n способов, следовательно, число способов составить кортежи (1.2)

$$\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{m\ \text{раз}} = n^m.$$

В случае размещения без повторений на первую позицию кортежа (1.3) можно поставить любой из n элементов множества M, на вторую (которая должна отличаться от первой) – любой из оставшихся $n-1$ элементов, на третью – любой из $n-2$ и т. д. Таким образом, число размещений без повторений составит

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1). \ \#$$

Сочетанием без повторений из n ***по*** m называется любое m-элементное подмножество множества A. В определении предполагается, что в отличие от размещений входящие в сочетание элементы не упорядочены каким-либо образом, и сочетание полностью определяется лишь их составом. Можно показать, что число сочетаний без повторений из n по m дается формулой[1]

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1.1. *а.* Преподаватель пришел на экзамен в плохом настроении и решил в группе из 20 человек поставить пять «двоек». Сколькими способами он может выбрать своих жертв?

Р е ш е н и е. Очевидно, что набор жертв полностью определяется составом студентов; при этом порядок, в котором они покинут экзаменационную аудиторию, не имеет значения. Следовательно, каждый такой набор можно интерпретировать как сочетание без повторений из 20 по 5. Таким образом, число возможных способов сформировать группу двоечников

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{5!(20-5)!} = 15\,504.$$

б. Найти число способов, которыми можно рассадить 11 человек на одну лавку.

Р е ш е н и е. Каждый из интересующих нас способов однозначно определяется кортежем $(x_1, \ldots, x_{11})$, где x_i – номер человека, сидящего на i-м месте, $i, x_i = \overline{1;11}$. По смыслу задачи указанный кортеж является размещением (порядок, в котором рассажены люди, имеет значение) без повторний (один человек не может сесть более чем на одно место) из 11 по 11. Таким образом, число способов рассадить 11 человек на лавке $P_{11} = 11! = 39\,916\,800$.

в. В мешке Деда Мороза находится 20 различных подарков. Сколькими способами можно раздать подарки 17 детям при условии, что каждый ребенок получает ровно один подарок?

Р е ш е н и е. Для решения задачи удобно перенумеровать детей числами $1, \ldots, 17$, а подарки – числами $1, \ldots, 20$. В этом

[1] Числа C_n^m являются коэффициентами при одночленах $a^m b^{n-m}$ в разложении бинома $(a+b)^m$, поэтому их называют ***биномиальными коэффициентами.***

случае каждый из способов раздать подарки можно описать кортежем $(x_1, \ldots, x_{17})$, где $x_i \in \{1, \ldots, 20\}$ – номер подарка, получаемого i-м ребенком. По содержанию задачи этот кортеж является размещением (порядок важен, так как он определяет, какому ребенку достанется тот или иной подарок) без повторений (все подарки различны) из 20 по 17. Таким образом, искомое число $A_{20}^{17} = 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 4 = 405\,483\,668\,029\,440\,000$ $\#$.

Пример 1.2. *а.* Найти число способов, которыми можно составить хоровод из 11 девушек.

Р е ш е н и е. Аналогично задаче 1.1, *б* можно попробовать описать хоровод кортежем $(x_1, \ldots, x_{11})$, однако в отличие от лавки хоровод замкнут (не имеет начала и конца). Это означает, что при циклической перестановке элементов $x_1, \ldots, x_{11}$ мы можем получить другое размещение, которое, однако, будет описывать тот же хоровод. Таким образом, при указанном подходе соответствие между хороводами и размещениями не является однозначным.

Для исправления ситуации удобно выбрать одну из девушек (например, самую высокую или самую красивую) и считать, что она всегда стоит в «начале» хоровода. В этом случае каждый способ составить хоровод можно однозначно описать кортежем $(x_1, \ldots, x_{10})$, учитывающим порядок, в котором остальные девушки следуют за выбранной ведущей. По смыслу задачи этот кортеж является перестановкой длины 10, и, следовательно, интересующее нас число способов $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$.

Стоить также заметить, что в проделанных рассуждениях для однозначного описания хоровода необходимо договориться, в каком направлении (по часовой стрелке или против) замыкается «хвост» хоровода, однако выбор того или иного способа не сказывается на результате.

б. Найти число способов, которыми можно составить бусы из 11 разных камешков. В задаче предполагается, что камешки нанизаны на замкнутую нить, имеющую форму окружности.

Р е ш е н и е. На первый взгляд, эта задача полностью аналогична предыдущей, однако бусы в отличие от хоровода можно перевернуть «вверх ногами» и у нас останутся те же самые бусы. В контексте рассуждений предыдущей задачи это означает, что, закручивая «хвост» хоровода по часовой стрелке и против, мы получаем разные хороводы, а в случае с бусами оба направления приводят к одному и тому же результату. Таким образом, число способов составить бусы вдвое меньше числа способов составить хоровод: $P_{10}/2 = 10!/2 = 1\,814\,400$ #.

Пример 1.3. Два соперника играют на бильярде n различными шарами. Забивая шар, игрок выставляет его на свою полку справа от уже забитых (будем считать, что первый игрок занимает верхний ряд, второй – нижний). Сколькими способами могут быть заполнены полки, если предполагается, что все шары различны?

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что общее число шаров, выставленных на обеих полках, будет $n-1$ (последний шар, который остается на столе, забить будет нечем). Если предположить, что на верхней полке располагается m шаров, то на нижней будет находиться $n-m-1$ шар. Таким образом, для данного m описать расположение шаров на полках можно с помощью кортежей

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m), \qquad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{n-m-1}),$$

которые по смыслу задачи являются размещениями без повторений из n по m и по $n-m-1$ соответственно, а также удовлетворяют дополнительному условию $x_i \neq y_j$. Заметим, что кортеж $\boldsymbol{x}$ можно составить A_n^m способами, а кортеж $\boldsymbol{y}$ – $N_{\boldsymbol{y}} = (n-m) \cdot \ldots \cdot 2$ способами[2]. Поскольку на каждый способ сформировать кортеж $\boldsymbol{x}$ приходится $N_{\boldsymbol{y}}$ способов сформировать кортеж $\boldsymbol{y}$, то общее число способов заполнить полки для данного m

$$A_n^m N_{\boldsymbol{y}} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)(n-m)(n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 = n!.$$

Суммируя полученный результат по всевозможным значениям m, получаем ответ задачи:

$$\sum_{m=0}^{n-1} n! = n! \sum_{m=0}^{n-1} 1 = nn!.$$

Заметим, что крайние значения $m = 0$ и $m = n-1$ отвечают случаям, когда одна из полок пуста. #

Замечание 1.2. Проведенные в ходе решения задачи 1.3 рассуждения можно существенно сократить. Предполагая, что один из шаров остался

[2]Здесь используются рассуждения из замечания 1.1: поскольку в кортеже $\boldsymbol{x}$ задействованы m шаров, то первую компоненту кортежа $\boldsymbol{y}$ можно заполнить $n-m$ способами, вторую – $(m-n-1)$ способом и т. д.

на столе, состав шаров на полках можно описать общим кортежем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ длины $n-1$. При этом для того чтобы отделить забитые первым игроком шары от шаров, забитых вторым, будем использовать *разделитель*, который по смыслу задачи может располагаться в одной из n позиций: либо между элементами кортежа, либо перед первым его элементом (этот случай соответствует ситуации, когда первый игрок ничего не забил), либо после последнего элемента (второй игрок ничего не забил). Поскольку оставшийся на столе шар может быть выбран n способами, кортеж из $n-1$ шара можно составить $(n-1)!$ способами, а *разделитель* поставить в одну из n позиций, получаем ответ:

$$n(n-1)!n = n!n.$$

Рассуждения можно еще более упростить, если в качестве разделителя использовать оставшийся на столе шар. Тогда общий кортеж длины n может быть составлен $n!$ способами и n способами из него можно выбрать шар-разделитель. $\#$

Пример 1.4. *а*. Найти число ломаных, ведущих из точки $O(0,0)$ в точку $Q(m,n)$, $m,n \in \mathbb{N}_0$, если каждая вершина ломаной имеет целые неотрицательные координаты, а каждое звено имеет длину 1 и направлено либо вправо, либо вверх.

Р е ш е н и е. Для решения задачи удобно представить, что мы выстраиваем ломаную по клеткам, двигаясь из точки (0, 0) в точку с координатами (m,n). При этом на каждом шаге можем продолжить линию либо вправо, либо вверх. Нетрудно заметить, что каждая из указанных ломаных будет состоять из $m+n$ звеньев (в целом нужно сделать m шагов вправо и n шагов вверх), а однозначно описать такую линию можно кортежем

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}), \tag{1.5}$$

где $x_i = 1$, если звено с номером i направлено вправо и $x_i = 0$, если соответствующее звено направлено вверх. В каждом из кортежей (1.5) будет стоять ровно m единиц, отвечающих горизонтальным звеньям. Поскольку каждый из указанных кортежей однозначно определяется номерами $i_1, \ldots, i_m$ позиций, в которых стоят единицы, общее число котрежей равно числу способов выбрать m позиций из $m+n$ возможных. Таким образом, число интересующих нас ломаных

$$C_{m+n}^{m} = \frac{(n+m)!}{m!\,n!}.$$

б. Найти число ломаных, удовлетворяющих условию предыдущей задачи и проходящих через точку $S(k,l)$ $\quad (k,l \in \mathbb{N}_0,$ $0 \leqslant k \leqslant m,\ 0 \leqslant l \leqslant n)$.

Р е ш е н и е. Опираясь на результат предыдущего примера, нетрудно найти число ломаных, ведущих из точки O в точку S $(N_1 = C_{k+l}^k)$ и из точки S в точку Q $(N_2 = C_{m+n-k-l}^{m-k})$. Кроме того, на каждый способ построить ломаную из точки O в точку S приходится ровно N_2 способов достроить ее из точки S до точки Q. Таким образом, искомое число ломаных

$$N_1 N_2 = C_{k+l}^k C_{m+n-k-l}^{m-k} = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \frac{(m+n-k-l)!}{(m-k)!(n-l)!}. \ \#$$

В завершение рассмотрим еще одну комбинаторную схему, называемую ***схемой упорядоченных разбиений***. Пусть имеется n различных шаров и k различных урн (можно считать, что они перенумерованы или каждая выкрашена в отличный от остальных цвет). Требуется разложить шары по урнам так, чтобы в i-й находилось m_i шаров, $i = \overline{1,k}$, $m_1 + \ldots + m_k = n$. Можно показать, что число возможных решений этой задачи дается формулой[3]

$$C_n(m_1, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}.$$

Пример 1.5. Принимая экзамен в группе из $n = 20$ человек, преподаватель для себя решил, что поставит $m_1 = 4$ «пятерки», $m_2 = 8$ «четверок», $m_3 = 5$ «троек» и $m_4 = 3$ «двойки». Сколько существует разных вариантов сдачи экзамена группой?

Р е ш е н и е. Представим, что у преподавателя есть четыре урны, отвечающие возможным экзаменационным оценкам, и 20 шаров, каждый из которых символизирует одного студента экзаменуемой группы. В этом случае каждый из вариантов сдачи группой экзамена однозначно определяется разбиением множества шаров на четыре подмножества, соответствующие имеющимся урнам. Таким образом, число возможных результатов экзамена в группе совпадает с числом способов разложить шары по урнам

[3] Числа $C_n(m_1, \ldots, m_k)$ являются коэффициентами при одночленах $x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_k}$, $0 \leqslant m_j \leqslant n$, $j = \overline{1;k}$, $m_1 + \ldots + m_k = n$, в разложении $(x_1 + \ldots + x_k)^n$ и поэтому называются ***мультиномиальными коэффициентами.***

так, чтобы в «отличной» урне было m_1 шаров, в «хорошей» m_2, в «удовлетворительной» m_3 и в «неудовлетворительной» m_4. В соответствии со схемой упорядоченных разбиений получаем ответ задачи:

$$C_n(m_1, m_2, m_3, m_4) = C_{20}(4, 8, 5, 3) = \frac{20!}{4!\,8!\,5!\,3!} =$$
$$= 3\,491\,888\,400. \ \#$$

1.2. Формула включений и исключений

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные множества. Можно показать, что в этом случае справедлива следующая ***формула включений и исключений***:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|, \tag{1.6}$$

где $|A|$ обозначает число элементов множества A.

Доказательство формулы (1.6) может быть проведено с использованием метода математической индукции. Ограничимся обсуждением случая $n = 2$ (базис $n = 1$ тривиален), в котором формула (1.6) принимает вид

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

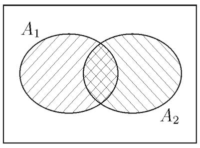


Рис. 1.1

Можно заметить, что элементы, принадлежащие общей части множеств A_1 и A_2, в сумме $|A_1| + |A_2|$ учитываются дважды (рис. 1.1). Именно поэтому, вычитая из правой части последнего равенства величину $|A_1 \cap A_2|$, получаем число элементов множества $A_1 \cup A_2$.

Как показывают следующие примеры, формула (1.6) оказывается удобной для решения целого класса задач.

Пример 1.6. Найти количество натуральных чисел, которые не превосходят 700 и делятся хотя бы на одно из чисел 4, 9, 13.

Р е ш е н и е. Пусть A – множество чисел, обладающих указанными свойствами. Множество чисел, не превосходящих 700 и делящихся на 4, обозначим A_1, не превосходящих 700 и делящихся на 9 – A_2 и, наконец, не превосходящих 700 и делящихся на 13 – A_3. В этом случае $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ и в соответствии с формулой (1.6)

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \\ - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \,. \qquad (1.7)$$

Очевидно, что количество натуральных чисел, не превосходящих 700 и делящихся на 4, составляет $[700/4] = 175$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа), поэтому

$$|A_1| = 175, \qquad |A_2| = \left[\frac{700}{9}\right] = 77, \qquad |A_3| = \left[\frac{700}{13}\right] = 53.$$

По смыслу введенных обозначений множество $A_1 \cap A_2$ состоит из всех натуральных чисел, не превосходящих 700 и делящихся одновременно на 4 и 9. Принимая во внимание взаимную простоту этих чисел, легко убедиться в том, что натуральное число делится на каждое из них в том и только том случае, когда оно делится на их произведение $4 \cdot 9 = 36$. Таким образом, можно утверждать, что

$$|A_1 \cap A_2| = [700/36] = 19.$$

Проведя аналогичные рассуждения для пар 4, 13 и 9, 13, а также тройки 4, 9, 13, найдем

$$|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{700}{4 \cdot 13}\right] = 13, \qquad |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{700}{9 \cdot 13}\right] = 5,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{700}{4 \cdot 9 \cdot 13}\right] = 1.$$

Подставив найденные значения в (1.7), получим ответ задачи:

$$|A| = 175 + 77 + 53 - 19 - 13 - 5 + 1 = 269. \qquad \#$$

Пример 1.7. Найти количество натуральных чисел, не превосходящих 3000 и не делящихся ни на одно из чисел 24, 63, 98.

Р е ш е н и е. Пусть N_1 – количество натуральных чисел, не превосходящих 3000 и *делящихся хотя бы на одно* из чисел 24, 63, 98. Тогда, очевидно, количество чисел, о которых идет речь в условии задачи, составляет $N = 3000 - N_1$.

Для нахождения числа N_1 воспользуемся методом, разобранным в примере 1.6. Обозначив символами A_1, A_2, A_3 множества натуральных чисел, которые не превосходят 3000 и делятся на 24, 63, 98 соответственно, и воспользовавшись формулой включений и исключений (1.6), получим

$$N_1 = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\,, \qquad (1.8)$$

где $|A_1| = \left[\dfrac{3000}{24}\right] = 125$, $|A_2| = \left[\dfrac{3000}{63}\right] = 47$, $|A_3| = \left[\dfrac{3000}{98}\right] =$ $= 30$.

Для нахождения остальных величин, входящих в правую часть равенства (1.8), рассмотрим канонические разложения чисел 24, 63, 98:

$$24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^0, \quad 63 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^1, \quad 98 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 7^2.$$

Нетрудно убедиться, что натуральное число делится одновременно на 24 и на 63 в том и только том случае, когда оно делится на число[4]

$$2^{\max\{3,0\}} \cdot 3^{\max\{1,2\}} \cdot 7^{\max\{0,1\}} = 8 \cdot 9 \cdot 7 = 504$$

(пользуемся тем, что входящие в разложения сомножители взаимно просты), поэтому

$$|A_1 \cap A_2| = [3000/504] = 5.$$

Проведя аналогичные рассуждения для пар 24, 98 и 63, 98, а также тройки 24, 63, 98, получим

$$|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{3000}{2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^2}\right] = \left[\frac{3000}{1176}\right] = 2,$$
$$|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{3000}{2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^2}\right] = \left[\frac{3000}{882}\right] = 3,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{3000}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2}\right] = \left[\frac{3000}{3528}\right] = 0.$$

[4]Это наименьшее общее кратное чисел 24 и 63.

Подставляя найденные значения в выражение (1.8), вычислим

$$N_1 = 125 + 47 + 30 - 5 - 2 - 3 + 0 = 192,$$

откуда $N = 3000 - 192 = 2808$. #

Пример 1.8. Найти число ломаных, ведущих из точки $O(0,0)$ в точку $Q(10,10)$, проходящих через точку $B(3,5)$ и хотя бы одну из точек $K_1(2,1)$, $K_2(4,8)$, $K_3(9,6)$, $K_4(8,9)$ (рис. 1.2). Вершины ломаных находятся в точках с целыми координатами, а каждое звено имеет длину 1 и направлено либо вправо, либо вверх[5].

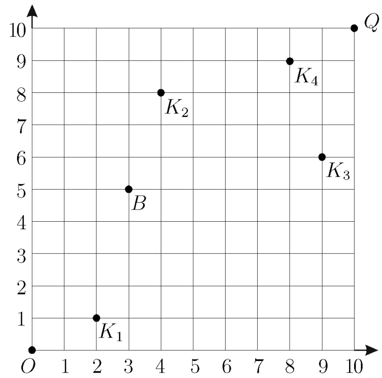


Рис. 1.2

Р е ш е н и е. Пусть A – множество ломаных, о которых идет речь в условии задачи, а A_i, $i = \overline{1;4}$ – множество ломаных, ведущих из точки O в точку Q и проходящих через точку B и точку K_i. Тогда, очевидно,

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

и в соответствии с формулой включений и исключений

$$|A| = \Big(|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|\Big) -$$

$$-\Big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| +$$

[5]Всюду в рамках настоящего примера под словом «ломаные» будем понимать лишь те ломаные линии, которые обладают указанным свойством.

$$+|A_3 \cap A_4|\Big) + \Big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| +$$
$$+|A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|\Big) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\,. \quad (1.9)$$

Для нахождения величины $|A_1|$ можно воспользоваться рассуждениями, аналогичными рассуждениям в примере 1.4, *б*. Нетрудно убедиться, что число ломаных, ведущих из точки O в точку Q и проходящих через точки B и K_1, составляет (см. рис. 1.2)

$$|A_1| = |A_{O\to K_1}| \cdot |A_{K_1\to B}| \cdot |A_{B\to Q}|\,,$$

где символом $A_{P\to S}$ обозначено множество ломаных, ведущих из точки P в точку S. С использованием полученного в примере 1.4, *а* результата можно утверждать, что

$$|A_{O\to K_1}| = C_{1+2}^2 = 3, \quad |A_{K_1\to B}| = C_{1+4}^1 = 5,$$

$$|A_{B\to Q}| = C_{7+5}^7 = 792$$

и, следовательно,

$$|A_1| = 3 \cdot 5 \cdot 792 = 11\,800.$$

Аналогичным образом найдем

$$|A_2| = C_{3+5}^3 C_{1+3}^1 C_{6+2}^6 = 6\,272, \quad |A_3| = C_{3+5}^3 C_{6+1}^6 C_{1+4}^1 = 1\,960,$$
$$|A_4| = C_{3+5}^3 C_{5+4}^5 C_{2+1}^2 = 21\,168.$$

Множество $|A_1 \cap A_2|$ состоит из всех ломаных, ведущих из точки O в точку Q и проходящих через точки B, K_1 и K_2, поэтому

$$|A_1 \cap A_2| = |A_{O\to K_1}| \cdot |A_{K_1\to B}| \cdot |A_{B\to K_2}|\,|A_{K_2\to Q}| =$$
$$= C_{2+1}^2 C_{1+4}^1 C_{1+3}^1 C_{6+2}^6 = 420.$$

Далее получим

$$|A_1 \cap A_3| = C_{2+1}^2 C_{1+4}^1 C_{6+1}^6 C_{1+4}^1 = 525,$$
$$|A_1 \cap A_4| = C_{2+1}^2 C_{1+4}^1 C_{5+4}^5 C_{2+1}^2 = 5\,670,$$
$$|A_2 \cap A_3| = 0,$$
$$|A_2 \cap A_4| = C_{3+5}^3 C_{1+3}^1 C_{4+1}^1 C_{2+1}^2 = 3\,360,$$
$$|A_3 \cap A_4| = 0.$$

Стоит отметить, что в силу взаимного расположения точек K_2 и K_3 (точек K_3 и K_4) не существует ни одной ломаной, удовлетворяющей основному условию (каждое звено направлено вправо или вверх) и проходящей одновременно через обе эти точки, поэтому соответствующая величина равна нулю.

Наконец, аналогичные рассуждения позволяют найти

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = C_{2+1}^2 C_{1+4}^1 C_{1+3}^1 C_{4+1}^4 C_{2+1}^2 = 900,$$
$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 0,$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0.$$

Подставляя найденные значения в (1.9), получаем ответ: $|A| = 32\,205$. #

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. В читальном зале института иностранных языков находятся 30 студентов, изучающих английский язык, 20 – немецкий и 15 – французский. Из присутствующих 18 студентов изучают не менее двух языков и пять студентов — все три языка. Найти общее количество студентов в читальном зале.
2. Найти количество натуральных чисел, которые:
   а) не превосходят 3500 и делятся хотя бы на одно из чисел 5, 7, 9, 11;
   б) не превосходят 1000 и делятся хотя бы на одно из чисел 11, 16, 26;
   в) не превосходят 5000 и делятся хотя бы на одно из чисел 12, 28, 42;
   г) не превосходят 5000 и не делятся ни на одно из чисел 3, 11, 17;
   д) не превосходят 1000 и не делятся ни на одно из чисел 14, 16, 23;

е) не превосходят 2000 и не делятся ни на одно из чисел 12, 28, 42;

ж) не превосходят 2300 и взаимно просты с числом 700;

з) не превосходят 7000 и взаимно просты с числом 12 600;

и) не превосходят 1000 и взаимно просты с числами 11, 17, 21;

к) не превосходят 10 000 и не являются взаимно простыми с числом 588.

3. В следующих задачах предполагается, что вершины ломаных имеют целые неотрицательные координаты, а каждое звено направлено либо вверх, либо вправо. Найти число ломаных, ведущих из точки $A(0,0)$ в точку $D(10,10)$, которые:

   а) проходят через точку $B(3,4)$ и не проходят ни через одну из точек $C_1(1,3)$, $C_2(5,5)$, $C_3(6,8)$;

   б) проходят через точку $B(3,4)$, а также проходят хотя бы через одну из точек $C_1(1,3)$, $C_2(5,5)$, $C_3(6,8)$;

   в) проходят через точку $B(3,4)$, а также проходят в точности через одну из точек $C_1(1,3)$, $C_2(5,5)$.

2. ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Основные понятия

Рекуррентным соотношением порядка r называется соотношение вида

$$x_n = f(n, x_{n-1}, \dots, x_{n-r}), \tag{2.1}$$

где f – некоторая функция; x_n – последовательность; n – переменная, принимающая целые неотрицательные значения. Параметр $r \in \mathbb{N}_0$ также называют глубиной рекурсии.

Последовательность $x_n = x(n)$ называется ***решением*** (***частным***) соотношения (2.1), если при ее подстановке в соотношение последнее обращается в верное тождество относительно n. ***Общим решением*** соотношения (2.1) будем называть множество всех его частных решений.

Можно заметить, что удовлетворяющие соотношению (2.1) последовательности полностью определяются своими первыми r членами, поэтому для однозначного выделения какого-либо частного решения соотношение (2.1) обычно дополняют так называемыми ***начальными условиями***

$$x_1 = q_1, \quad \ldots, \quad x_r = q_r. \tag{2.2}$$

В настоящих методических указаниях ограничимся рассмотрением частного случая рекуррентных соотношений, в которых функция f определена на множестве $(r + \mathbb{N}) \times \mathbb{R}^r$, принимает вещественные значения и, кроме того, линейна. Более точно, будем рассматривать рекуррентные соотношения вида

$$x_n + c_1 x_{n-1} + \ldots + c_{n-r} x_{n-r} = b_n, \tag{2.3}$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, r}$, а последовательности x_i, $i \geqslant 1$, и b_i, $i \geqslant r + 1$ принимают вещественные значения. Соотношение (2.3) называется ***линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами***; в случае $b_n \equiv 0$ оно называется ***однородным***, в противном случае – ***неоднородным***.

Пример 2.1. *а*. Составить рекуррентное соотношение для числа цепочек длины n в алфавите $\{a, b, c\}$, которые *не содержат* подцепочку abc. Дополнить соотношение начальными условиями.

Р е ш е н и е. Пусть x_n – число цепочек длины n, удовлетворяющих условию задачи (такие цепочки будем называть правильными). Число правильных цепочек длины n, начинающихся символом a (b или c) обозначим A_n (соответственно B_n или C_n). Очевидно, $x_n = A_n + B_n + C_n$.

Если в начале правильной цепочки стоит символ b или c, то за ним должна следовать любая правильная цепочка длины $n - 1$, поэтому $B_n = C_n = x_{n-1}$.

Если в начале цепочки находится символ a, то ситуация оказывается несколько более сложной. Так, число правильных цепочек длины n, в которых вторым после a символом снова стоит a, очевидно, составляет A_{n-1} единиц (отбрасывая первый символ a, получаем начинающуюся на a правильную цепочку длины $n - 1$). Если вторым является символ c, то за ним может следовать любая правильная цепочка длины $n - 2$, поэтому число таких цепочек равно x_{n-2}. Для случая, когда вторым символом после a является b, рассмотрим три следующих подслучая. Если третьим после b символом является a, то число правильных цепочек длины n, имеющих указанную структуру, составляет A_{n-2} штук. Если третьим после b символом является b, то за ним может следовать любая правильная цепочка длины $n-3$, число таких цепочек x_{n-3}. Если же третьим после b символом является c, то цепочка не является правильной и ее не нужно учитывать. Таким образом, $A_n = A_{n-1} + x_{n-2} + A_{n-2} + x_{n-3}$ и, следовательно, общее число цепочек, о которых идет речь в условии задачи, удовлетворяет соотношениям

$$x_n = A_n + 2x_{n-1},$$
$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + x_{n-2} + x_{n-3}.$$

Из первого соотношения получаем $A_n = x_n - 2x_{n-1}$ и, следовательно, $A_{n-1} = x_{n-1} - 2x_{n-2}$ и $A_{n-2} = x_{n-2} - 2x_{n-3}$. С учетом этих представлений второе соотношение принимает вид

$$x_n - 3x_{n-1} + x_{n-3} = 0. \tag{2.4}$$

Таким образом, число правильных цепочек длины n, не содержащих подцепочку abc, удовлетворяет линейному однородному рекуррентному соотношению с постоянными коффициентами (2.4). Для дополнения этого соотношения начальными условиями необходимо непосредственно подсчитать число правильных цепочек длины 0, 1 и 2. Так, $x_0 = 1$ (пустая цепочка является правильной), $x_1 = 3$ (цепочки a, b и c), $x_2 = 9$ (число размещений с повторениями из 3 по 2; все цепочки длины 2 — правильные).

б. Составить рекуррентное соотношение для числа цепочек длины n в алфавите $\{a, b, c\}$, которые *содержат* подцепочку abc. Дополнить соотношение начальными условиями.

Р е ш е н и е. Пусть y_n – число цепочек длины n, удовлетворяющих условию задачи. Нетрудно убедиться, что общее число цепочек длины n в алфавите $\{a, b, c\}$ составляет 3^n (число размещений с повторениями из 3 по n); при этом каждая из цепочек либо содержит подцепочку abc, либо нет. Таким образом, $y_n = 3^n - x_n$, где величина x_n определена в ходе решения предыдущего примера. Выражая x_n через y_n и подставляя в выражение (2.4), приходим к соотношению

$$y_n - 3y_{n-1} + y_{n-3} = 3^{n-3}$$

с начальными условиями $y_0 = 3^0 - x_0 = 0$, $y_1 = 3^1 - x_1 = 0$ и $y_2 = 3^2 - x_2 = 0$. Заметим, что полученное соотношение является неоднородным. #

Пример 2.2. Составить рекуррентное соотношение для числа цепочек длины n в алфавите $\{a, b, c\}$, в которых есть рядом стоящие символы b и c. Дополнить соотношение начальными условиями.

Р е ш е н и е. Аналогично предыдущему примеру, обозначим символом x_n число цепочек, о которых идет речь в условии задачи (такие цепочки также будем называть правильными), а символами A_n, B_n и C_n – количество правильных цепочек длины n, начинающихся с a, b или c соответственно. Тогда, очевидно, $x_n = A_n + B_n + C_n$.

Если правильная цепочка длины n начинается символом a, то следом за ним должна идти правильная цепочка длины $n - 1$, поэтому $A_n = x_{n-1}$.

Случай, когда первым символом правильной цепочки является b, распадается на три подслучая. В первом из них, когда во второй позиции стоит a, слово должно закончиться правильной цепочкой длины $n - 2$ (количество таких цепочек равно x_{n-2}). Число правильных цепочек, начинающихся на bb (второй подслучай), можно найти следующим образом. Отделив первый символ b от остальной цепочки, получим цепочку, которая начинается на b и является правильной цепочкой длины $n-1$. Следовательно, число таких цепочек равно B_{n-1}. В третьем случае, когда во второй позиции стоит символ c, в нашей цепочке уже встретилось вхождение подцепочки bc и все слово может закончиться любой цепочкой длины $n-2$ (их количество составляет 3^{n-2} – число размещений с повторениями из 3 по $n-2$). Таким образом, $B_n = x_{n-2} + B_{n-1} + 3^{n-2}$.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что число правильных цепочек, начинающихся на c, совпадает с числом правильных цепочек, начинающихся на b, т. е. $C_n = B_n$. Окончательно приходим к системе

$$\begin{cases} x_n = A_n + 2B_n, \\ A_n = x_{n-1}, \\ B_n = x_{n-2} + B_{n-1} + 3^{n-2}, \end{cases}$$

которая после исключения из нее неизвестного A_n принимает вид

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2B_n, \\ B_n = x_{n-2} + B_{n-1} + 3^{n-2}. \end{cases}$$

Выразив из первого равенства неизвестное B_n и подставив его во второе[1], придем к линейному неоднородному соотношению

$$x_n - 2x_{n-1} - x_{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2}. \qquad (2.5)$$

Непосредственным подсчетом несложно установить, что полученное соотношение необходимо дополнить начальными условиями $x_0 = x_1 = 0$. #

Пример 2.3. Составить рекуррентное соотношение для числа способов разбить отрезок длины n отрезками длины 1, 2 и 3 так, чтобы в разбиении не было трех рядом стоящих отрезков длины 1. Дополнить соотношение начальными условиями.

Р е ш е н и е. Пусть x_n – число правильных (т. е. удовлетворяющих условию задачи) разбиений отрезка длины n.

Если разбиение начинается с отрезка длины 2 (длины 3), то оставшася часть отрезка длины $n-2$ (соответственно $n-3$) должна быть разбита правильно. Таким образом, число правильных разбиений, начинающихся отрезками длины 2 и 3, составляет $x_{n-2} + x_{n-3}$.

Случай, когда разбиение начинается отрезком длины 1, распадается на три подслучая. В первых двух из них, когда вторым в разбиении стоит отрезок длины 2 (длины 3), оставшая часть длины $n - 3$ (соответственно $n - 4$) должна быть разбита правильно, следовательно, этим двум случаям отвечают $x_{n-3} + x_{n-4}$ правильных разбиений. Если вторым элементом в разбиении стоит отрезок длины 1, то для правильного разбиения за ним должен следовать отрезок длины 2 (длины 3), и оставшаяся часть цепочки длины $n-4$ (соответственно $n-5$) должна быть разбита правильно. Следовательно, число разбиений, отвечающих третьему подслучаю, составляет $x_{n-4} + x_{n-5}$.

Таким образом, общее число разбиений удовлетворяет линейному однородному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами

$$x_n = x_{n-2} + 2x_{n-3} + 2x_{n-4} + x_{n-5}. \ \#$$

[1]Заметим, что поскольку $B_n = (x_n - x_{n-1})/2$, то $B_{n-1} = (x_{n-1} - x_{n-2})/2$.

2.2. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное рекуррентное соотношение

$$x_n + c_1 x_{n-1} + \ldots + c_r x_{n-r} = 0. \tag{2.6}$$

Аналогично линейным однородным дифференциальным уравнениям может быть доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Общее решение рекуррентного соотношения (2.6) образует линейное пространство размерности r.*

В соответствии со сделанными в п. 2.1 ограничениями речь в теореме 2.1 идет о вещественном линейном пространстве с почленными операциями сложения последовательностей и умножения последовательности на число. Кроме того, сформулированная теорема эквивалентна следующим трем утверждениям, которые будут использоваться ниже при решении задач:

а) если последовательности a_n и b_n являются частными решениями соотношения (2.6), то последовательность $a_n + b_n$ также является его частным решением;

б) если последовательность a_n – частное решение соотношения (2.6), а $c \in \mathbb{R}$ – некоторое число, то последовательность ca_n также является его частным решением;

в) существуют r линейно независимых частных решений соотношения (2.6)

$$\varphi_n^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(r)};$$

при этом любое частное решение соотношения (2.6) можно представить в виде

$$x_n = C_1 \varphi_n^{(1)} + \ldots + C_r \varphi_n^{(r)}$$

при некоторых подходящих значениях числовых множителей $C_1, \ldots, C_r$.

Последнее также означает, что для нахождения общего решения соотношения (2.6) достаточно найти лишь r линейно независимых частных решений $\varphi_n^{(1)}$, …, $\varphi_n^{(r)}$, которые, согласно общей теории линейных пространств, образуют базис в пространстве решений. Аналогично случаю линейных однородных дифференциальных уравнений построение указанного базиса можно свести к исследованию корней некоторого алгебраического уравнения.

Более точно, алгебраическое уравнение

$$\lambda^r + c_1\lambda^{r-1} + \ldots + c_{r-1}\lambda + c_r = 0 \qquad (2.7)$$

называется ***характеристическим уравнением*** соотношения (2.6). Предположим, что найдены все r корней этого уравнения, включая комплексные (при этом каждый корень учитывается столько раз, какова его кратность). Для построения базиса в пространстве решений можно использовать следующие правила.

1. Если $\lambda = \alpha$ – вещественный корень кратности s уравнения (2.7), то ему отвечают s линейно независимых частных решений:

$$\varphi_n^{(1)} = \alpha^n, \quad \varphi_n^{(2)} = n\alpha^n, \quad \ldots, \quad \varphi_n^{(s)} = n^{s-1}\alpha^n.$$

2. Если $\lambda = \alpha \pm i\beta$ – пара комплексно сопряженных корней уравнения (2.7) кратности s каждый, то им отвечают $2s$ линейно независимых частных решений

$$\varphi_n^{(1)} = \rho^n\cos(n\theta),\ \varphi_n^{(3)} = n\rho^n\cos(n\theta),\ \ldots,\ \varphi_n^{(2s-1)} = n^{s-1}\rho^n\cos(n\theta),$$
$$\varphi_n^{(2)} = \rho^n\sin(n\theta),\ \varphi_n^{(4)} = n\rho^n\sin(n\theta),\ \ldots,\ \varphi_n^{(2s)} = n^{s-1}\rho^n\sin(n\theta),$$

где $\rho = |\alpha + i\beta|$, $\theta = \arg(\alpha + i\beta)$.

Пример 2.4. Найти общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения

$$x_n - 5x_{n-1} + 3x_{n-2} + 9x_{n-3} = 0. \qquad (2.8)$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$$

для соотношения (2.8) имеет корни $\lambda_1 = -1$ кратности $s_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ кратности $s_2 = 2$ (проверьте!). Согласно сформулированному выше правилу, последовательности $\varphi_n^{(1)} = (-1)^n$, $\varphi_n^{(2)} = 3^n$, $\varphi_n^{(3)} = n3^n$ образуют базис в пространстве решений и, следовательно, общее решение имеет вид

$$x_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n + C_3 n3^n,$$

где $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные. #

Пример 2.5. Найти частное решение линейного однородного рекуррентного соотношения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} x_n - 9x_{n-1} + 18x_{n-2} - 28x_{n-3} = 0, \qquad n \geqslant 3; \\ x_0 = 0, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = -51. \end{cases} \tag{2.9}$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda - 28 = 0$$

для рекуррентного соотношения (2.9) имеет вещественный корень $\lambda_1 = 7$ кратности $s_1 = 1$ и пару комплексно сопряженных корней $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}i$ кратности $s_2 = 1$ каждый. Согласно сформулированному выше правилу, корню λ_1 отвечает базисная последовательность $\varphi_n^{(1)} = 7^n$. Поскольку $\left|1 + \sqrt{3}i\right| = 2$ и $\arg(1 + \sqrt{3}i) = \pi/3$, паре комплексных корней будут отвечать базисные последовательности $\varphi_n^{(2)} = 2^n \cos(\pi n/3)$ и $\varphi_n^{(3)} = 2^n \sin(\pi n/3)$. Таким образом, общее решение рекуррентного соотношения (2.9) имеет вид

$$x_n = C_1 7^n + 2^n \left(C_2 \cos \frac{\pi n}{3} + C_3 \sin \frac{\pi n}{3} \right). \tag{2.10}$$

Для нахождения частного решения задачи (2.9) вычислим коэффициенты C_1, C_2 и C_3. Подстановка $n = 0,\ 1,\ 2$ в выражение (2.10) с использованием начальных условий (2.9) приводит к линейной системе

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 0, \\ &7C_1 + C_2 + C_3\sqrt{3} = -6, \\ &49C_1 - 2C_2 + 2C_3\sqrt{3} = -51, \end{aligned}$$

из которой находим $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Таким образом, решением задачи (2.9) является последовательность $x_n = -7^n + 2^n \cos(\pi n/3)$. #

2.3. Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Аналогично линейным неоднородным уравнениям (алгебраическим или дифференциальным) может быть доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Общее решение рекуррентного соотношения* (2.3) *можно представить в виде*

$$x_n = x_n^{\text{оо}} + x_n^{\text{чн}},$$

где $x_n^{\text{оо}}$ *– общее решение однородного рекурентного соотношения, соответствующего* (2.3)*, а* $x_n^{\text{чн}}$ *– частное решение неоднородного соотношения* (2.3).

Из теоремы 2.2 следует, что для получения общего решения неоднородного линейного рекуррентного соотношения достаточно найти его частное решение (какое-нибудь одно, любое) и общее решение соответствующего однородного соотношения. Как и в случае линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, если правая часть b_n является квазиполиномом, частное решение соотношения (2.3) можно подобрать с использованием метода неопределенных коэффициентов.

При решении задач для нахождения частного решения удобно использовать следующие правила.

1. Если $b_n = \alpha^n P_k(n)$, где $P_k(n)$ – многочлен степени k, то частное решение соотношения (2.3) следует искать в виде

$$x_n = n^s \alpha^n \tilde{P}_k(n),$$

где $\tilde{P}_k(n)$ – многочлен степени k с неопределенными коэффициентами; s – кратность корня $\lambda = \alpha$ характеристического уравнения для соответствующего однородного соотношения ($s = 0$, если оно не имеет корня $\lambda = \alpha$).

2. Если $b_n = \rho^n\big(P_k(n)\cos(n\theta) + Q_l(n)\sin(n\theta)\big)$, где $P_k(n)$, $Q_l(n)$ – многочлены степени k и l соответственно, то частное решение соотношения (2.3) следует искать в виде

$$x_n = n^s \rho^n \left(\tilde{P}_N(n)\cos(n\theta) + \tilde{Q}_N(n)\sin(n\theta)\right),$$

где $\tilde{P}_N(n), \tilde{Q}_N(n)$ – многочлены степени N с неопределенными коэффициентами, $N = \max\{k, l\}$; s – кратность каждого из корней $\lambda = \rho\,(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ характеристического уравнения для соответствующего однородного соотношения ($s = 0$, если оно не имеет корней $\lambda = \rho\,(\cos\theta \pm i\sin\theta)$).

Пример 2.6. *а*. Найти общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения

$$x_n + x_{n-1} - 6x_{n-2} = n2^{n+1}. \tag{2.11}$$

Р е ш е н и е. Согласно теореме 2.2, для построения общего решения достаточно найти общее решение $x_n^{\text{оо}}$ соответствующего однородного соотношения

$$x_n + x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0, \tag{2.12}$$

а затем с использованием сформулированных выше правил подобрать какое-нибудь частное решение $x_n^{\text{чн}}$ соотношения (2.11).

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \tag{2.13}$$

для однородного соотношения (2.12) имеет пару вещественных корней $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 2$ кратности 1 каждый. В соответствии со сформулированными в предыдущем пункте правилами общее решение соотношения (2.12) имеет вид

$$x_n^{\text{оо}} = C_1(-3)^n + C_2 2^n.$$

Правая часть $b_n = n2^{n+1} = 2n2^n = P_1(n)2^n$ соотношения (2.11) является квазиполиномом первого типа, поэтому в соответствии с правилом **1** частное решение соотношения (2.11) следует искать в виде

$$x_n^{\text{чн}} = n^s \tilde{P}_1(n)2^n,$$

где $\tilde{P}_1(n) = An + B$ – многочлен первой степени с неопределенными коэффициентами; $s = 1$ – кратность корня $\lambda = 2$ характеристического уравнения (2.13).

Подставив представление $x_n^{\text{чн}} = n(An + B)2^n$ в соотношение (2.11), придем к равенству

$$\begin{gathered}\left[An^2 + Bn\right]2^n + \left[A(n-1)^2 + B(n-1)\right]2^{n-1} - \\ -6\left[A(n-2)^2 + B(n-2)\right]2^{n-2} = 2n2^n,\end{gathered}$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных при степенях n примет вид

$$5An + \left(\frac{-11}{2}A + \frac{5}{2}B\right) = 2n.$$

Полученное тождество приводит к системе

$$5A = 2, \qquad \frac{-11}{2}A + \frac{5}{2}B = 0$$

относительно неопределенных коэффициентов A и B, из которой находим $A = 2/5$, $B = 22/25$. Таким образом, частное решение соотношения (2.11) имеет вид

$$x_n^{\text{чн}} = \left(\frac{2}{5}n^2 + \frac{22}{25}n\right)2^n,$$

а его общее решение можно записать в виде

$$x_n^{\text{он}} = x_n^{\text{оо}} + x_n^{\text{чн}} = C_1(-3)^n + C_2 2^n + \left(\frac{2}{5}n^2 + \frac{22}{25}n\right)2^n. \quad (2.14)$$

б. Найти частное решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения (2.11), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_0 = 5, \qquad x_1 = 64/25. \quad (2.15)$$

Р е ш е н и е. В части *а* настоящего примера было получено общее решение соотношения (2.11). Для нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, необходимо подобрать произвольные постоянные C_1 и C_2. Полагая в равенстве (2.14) $n = 0$ и $n = 1$, с учетом равенств (2.15) приходим к следующей системе относительно неизвестных C_1, C_2:

$$\begin{aligned} &x_0 = C_1 + C_2 = 5, \\ &x_1 = -3C_1 + 2C_2 + 64/25 = 64/25, \end{aligned}$$

откуда находим $C_1 = 2$, $C_2 = 3$. Таким образом, искомое частное решение соотношения (2.11), удовлетворяющее начальным данным (2.15), имеет вид

$$x_n = 2(-3)^n + 3 \cdot 2^n + \left(\frac{2}{5}n^2 + \frac{22}{25}n\right)2^n.$$

Стоит специально отметить, что для получения частного решения неоднородного соотношения с начальными условиями необходимо сначала найти общее решение, а затем из начальных условий подобрать значения произвольных постоянных (в нашем примере C_1 и C_2). Иногда при решении подобных примеров студенты допускают грубую ошибку, используя начальные данные для нахождения неопределенных коэффициентов частного решения (в настоящем примере A и B). Дело в том, что полученная таким образом последовательность, как правило, не является частным решением рассматриваемого соотношения (проверьте!). $\#$

Пример 2.7. Записать в общем виде (с неопределенными коэффициентами) общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения

$$x_n - 8x_{n-1} + 12x_{n-2} + 144x_{n-4} - 192x_{n-5} - 256x_{n-6} - \\ -1024x_{n-7} = (5n+2)3^n + 4^n n\cos\frac{2\pi n}{3} + 4^n n^2 + \\ +2^n\left[\cos\frac{2\pi n}{3} + n\sin\frac{2\pi n}{3}\right] + (-7)^n. \qquad (2.16)$$

Р е ш е н и е. Как и в примере 2.6, a, сначала найдем общее решение $x_n^{\text{оо}}$ соответствующего однородного соотношения, затем подберем некоторое частное решение $x_n^{\text{чн}}$ соотношения (2.16), тогда их сумма будет представлять общее решение интересующего нас неоднородного соотношения.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^7 - 8\lambda^6 + 12\lambda^5 + 144\lambda^3 - 192\lambda^2 - 256\lambda - 1024 = 0 \qquad (2.17)$$

соответствующего однородного соотношения имеет вещественный корень $\lambda_1 = 4$ кратности $s_1 = 3$ и пару комплексных корней $\lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$ кратности $s_{2,3} = 2$ каждый. В соответствии со сформулированными в предыдущем пункте правилами вещественному корню отвечают базисные решения

$$\varphi_n^{(1)} = 4^n, \quad \varphi_n^{(2)} = n4^n, \quad \varphi_n^{(3)} = n^2 4^n.$$

Поскольку $\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2$ и $\arg\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2\pi/3$, то паре комплексных корней отвечают такие базисные последовательности:

$$\varphi_n^{(4)} = 2^n\cos\frac{2\pi n}{3}, \quad \varphi_n^{(5)} = 2^n\sin\frac{2\pi n}{3},$$

$$\varphi_n^{(6)} = 2^n n\cos\frac{2\pi n}{3}, \quad \varphi_n^{(7)} = 2^n n\sin\frac{2\pi n}{3},$$

следовательно, общее решение соответствующего однородного соотношения можно записать в виде

$$x_n^{\text{оо}} = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2)4^n + \\ + \left[(C_4 + C_6 n)\cos\frac{2\pi n}{3} + (C_5 + C_7 n)\sin\frac{2\pi n}{3}\right]2^n. \qquad (2.18)$$

Правая часть

$$b_n = b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + b_n^{(3)} + b_n^{(4)} + b_n^{(5)}$$

соотношения (2.16) представляет собой сумму квазиполиномов

$$b_n^{(1)} = (5n+2)3^n, \qquad b_n^{(2)} = 4^n n\cos\frac{2\pi n}{3}, \qquad b_n^{(3)} = 4^n n^2,$$
$$b_n^{(4)} = 2^n\left[\cos\frac{2\pi n}{3} + n\sin\frac{2\pi n}{3}\right], \qquad b_n^{(5)} = (-7)^n,$$

для каждого из которых в соответствии со сформулированным правилом можно подобрать частное решение. Аналогично случаю дифференциальных уравнений для линейных неоднородных рекуррентных соотношений может быть доказан принцип суперпозиции частных решений: *если* $x_n^{\text{чн}\,(k)}$ – *частное решение неоднородного соотношения* $L[x_n] = b_n^{(k)}$*, то последовательность* $y_n = \sum x_n^{\text{чн}\,(k)}$ *является частным решением соотношения* $L[x_n] = \sum b_n^{(k)}$ (здесь через $L[x_n]$ обозначена левая часть соотношения). Таким образом, подобрав для каждого из $b_n^{(k)}$ частное решение, а затем составив их сумму, получим частное решение соотношения (2.16).

В соответствии со сформулированными правилами частное решение, отвечающее квазиполиному $b_n^{(1)} = P_1(n)3^n$, следует искать в виде $x_n^{\text{чн}\,(1)} = n^s\tilde{P}_1(n)3^n$, где $s = 0$, так как характеристическое уравнение (2.17) не имеет корня $\lambda = 3$. Таким образом,

$$x_n^{\text{чн}\,(1)} = (A_1 n + B_1)3^n. \qquad (2.19)$$

Частное решение $x_n^{\text{чн}\,(2)}$, отвечающее слагаемому

$$b_n^{(2)} = 4^n\left[P_1(n)\cos\frac{2\pi n}{3} + Q_{-\infty}(n)\sin\frac{2\pi n}{3}\right]$$

(многочлен степени $-\infty$ тождественно равен нулю), следует искать в виде

$$x_n^{\text{чн}\,(2)} = n^s 4^n \left[\tilde{P}_N(n)\cos\frac{2\pi n}{3} + Q_N(n)\sin\frac{2\pi n}{3}\right],$$

где $s=0$, так как уравнение (2.17) не имеет корня $\lambda=4\Big[\cos(2\pi/3)+$ $+i\sin(2\pi/3)\Big]$, $N=\max\{1,-\infty\}=1$. Таким образом,

$$x_n^{\text{чн}\,(2)} = 4^n\left[(A_2 n + B_2)\cos\frac{2\pi n}{3} + (A_3 n + B_3)\sin\frac{2\pi n}{3}\right]. \quad (2.20)$$

Еще раз подчеркнем, что при составлении общего вида частного решения степени многочленов с неопределенными коэффициентами при синусе и косинусе выбирались одинаковыми.

Частное решение, отвечающее квазиполиному $b_n^{(3)} = 4^n P_2(n)$, следует искать в виде $x_n^{\text{чн}\,(3)} = n^s 4^n \tilde{P}_2(n)$, где $s=3$ – кратность корня $\lambda = 4$ характеристического уравнения. Таким образом,

$$x_n^{\text{чн}\,(3)} = n^3 4^n (A_4 n^2 + A_5 n + B_4). \quad (2.21)$$

Частное решение $x_n^{\text{чн}\,(4)}$, отвечающее слагаемому

$$b_n^{(4)} = 2^n\left[P_0(n)\cos\frac{2\pi n}{3} + Q_1(n)\sin\frac{2\pi n}{3}\right],$$

следует искать в виде $x_n^{\text{чн}\,(2)} = n^s\Big[\tilde{P}_1(n)\cos(2\pi n/3) + \tilde{Q}_1(n)\times$ $\times\sin(2\pi n/3)\Big]2^n$, где $s=2$ – кратность корня $\lambda = 2\Big[\cos(2\pi/3)+$ $+\ i\sin(2\pi/3)\Big]$ характеристичского уравнения (2.17). Таким образом,

$$x_n^{\text{чн}\,(4)} = n^2 2^n\left[(A_6 + B_5)\cos\frac{2\pi n}{3} + (A_7 + B_6)\sin\frac{2\pi n}{3}\right]. \quad (2.22)$$

Частное решение $x_n^{\text{чн}\,(5)}$, соответствующее квазиполиному $b_n^{(5)} = P_0(n)(-7)^n$, следует искать в виде $x_n^{\text{чн}\,(5)} = n^s\tilde{P}_0(n)(-5)^n$, где $n=0$, так как характеристическое уравнение (2.17) не имеет корня $\lambda=-5$. Таким образом,

$$x_n^{\text{чн}\,(5)} = B_7(-5)^n. \quad (2.23)$$

Окончательно общее решение соотношения (2.16) имеет вид

$$x_n^{\text{он}} = x_n^{\text{оо}} + x_n^{\text{чн}\,(1)} + \ldots + x_n^{\text{чн}\,(5)},$$

где слагаемые в правой части определены равенствами (2.18)–(2.19). Подчеркнем, что неопределенные коэффициенты A_k и B_j могут быть найдены подстановкой полученного представления в соотношение (2.16), чего не делаем в целях экономии времени и места. #

Пример 2.8. Найти число цепочек длины n в алфавите $\{a, b, c\}$, которые содержат стоящие рядом символы b и c.

Р е ш е н и е. В ходе решения примера 2.2 было получено рекуррентное соотношение (2.5) для числа x_n цепочек, обладающих указанными свойствами.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ соответствующего однородного соотношения имеет пару вещественных корней $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ и $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ кратности 1 каждый. В соответствии с изложенными в п. 2.2 правилами общее решение однородного соотношения можно представить в виде

$$x_n^{\text{оо}} = C_1(1 + \sqrt{2})^n + C_2(1 - \sqrt{2})^n,$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные.

Правая часть $b_n = 2 \cdot 3^{n-2} = 2/9 \cdot 3^n$ соотношения (2.5) является квазиполиномом 1-го типа, которому отвечает частное решение вида $x_n^{\text{чн}} = A \cdot 3^n$, где A – неопределенный коэффициент (мы пользуемся также тем, что характеристическое уравнение для соответствующего однородного соотношения не имеет корня $\lambda = 3$). Для его нахождения подставим это представление в соотношение (2.5):

$$A\big(3^n - 2 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-2}\big) = \frac{2}{9} \cdot 3^n,$$

отсюда следует, что $A = 1$. Таким образом, общее решение соотношения (2.5) имеет вид

$$x_n^{\text{он}} = C_1(1 + \sqrt{2})^n + C_2(1 - \sqrt{2})^n + 3^n. \qquad (2.24)$$

Для завершения решения задачи необходимо найти произвольные постоянные C_1, C_2 из полученных в ходе решения примера 2.2 начальных условий $x_0 = x_1 = 0$. Полагая в равенстве (2.24)

$n = \overline{1;2}$, приходим к линейной системе относительно коэффициентов C_k:

$$C_1 + C_2 = -1,$$
$$C_1(1+\sqrt{2}) + C_2(1-\sqrt{2}) = -3,$$

из которой находим $C_1 = -(1+\sqrt{2})/2$, $C_2 = -(1-\sqrt{2})/2$. Таким образом, общее число цепочек длины n, удовлетворяющих условию задачи, имеет вид

$$x_n = -\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right] + 3^n.$$

Полученный результат полезно проверить, непосредственно подсчитав значения x_2 и x_3. Так, в соответствии с полученной формулой $x_2 = 2$ (цепочки bc и cb), а $x_3 = 10$ (шесть цепочек вида xbc и xcb, где $x \in \{a, b, c\}$, а также четыре цепочки bca, cba, bcc и cbb). $\#$

Пример 2.9. Найти формулу для вычисления

$$S_n = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что интересующая нас величина S_n удовлетворяет линейному неоднородному рекуррентному соотношению 1-го порядка с начальным условием

$$\begin{cases} S_n - S_{n-1} = \cos n\alpha, \qquad n \geqslant 2, \\ S_1 = \cos\alpha. \end{cases} \tag{2.25}$$

Соответствующее однородное соотношение имеет общее решение $S_n^{\text{оо}} = C$ (проверьте!). Правая часть соотношения (2.25) является квазиполиномом второго типа при $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, которому в соответствии с изложенными выше правилами отвечает частное решение вида

$$S_n^{\text{чн}} = A\cos n\alpha + B\sin n\alpha. \tag{2.26}$$

Подставив представление (2.26) в соотношение (2.25), получим тождество

$$\big[A(1-\cos\alpha) + B\sin\alpha\big]\cos n\alpha +$$
$$+\big[-A\sin\alpha + B(1-\cos\alpha)\big]\sin n\alpha \equiv \cos n\alpha,$$

которое приводит к паре уравнений относительно неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} A(1-\cos\alpha)+B\sin\alpha=1,\\ -A\sin\alpha+B(1-\cos\alpha)=0. \end{cases}$$

Определитель матрицы этой системы $\Delta = 2(1-\cos\alpha)$ отличен от нуля при условии, что α не кратно 2π. В этом случае система имеет единственное решение

$$A=\frac{1}{2},\qquad B=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, общее решение соотношения (2.25) имеет вид

$$S_n^{\text{он}} = C+\frac{1}{2}\cos n\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha.$$

Используя начальное условия (2.25), можно найти произвольную постоянную $C = -1/2$ (проверьте!). Таким образом, при $\alpha \neq 2\pi k$ ответ задачи имеет вид

$$S_n=\frac{1}{2}(\cos n\alpha+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha-1)=\frac{\sin\left(\alpha/2+n\alpha\right)}{\sin\left(\alpha/2\right)}-1.$$

В случае $\alpha = 2\pi k$ каждое слагаемое в условии задачи равно 1 и, следовательно, $S_n = n$. $\#$

2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общее решение рекуррентного соотношения:
   а) $x_n = x_{n-1} + 3x_{n-2}$;
   б) $x_n = 6x_{n-1} + 12x_{n-2} + 2^n$;
   в) $x_n = x_{n-2} + \cos\dfrac{\pi n}{2}$;
   г) $x_n = -x_{n-2} + \cos\dfrac{\pi n}{2}$.
2. Найти частное решение рекуррентного соотношения, удовлетворяющее начальным данным:
   а) $x_n = 7x_{n-1} - 12x_{n-2}$ при $n \geqslant 2$; $x_0 = 2$, $x_1 = 4$;
   б) $x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3} + 2^n$ при $n \geqslant 3$; $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

3. Записать в общем виде (без вычисления коэффициентов) общее решение линейного рекуррентного соотношения:

   а) $x_n - 6x_{n-1} + 16x_{n-2} - 24x_{n-3} + 16x_{n-4} = 2^n(n^2+1) + 2^n n \sin\frac{\pi n}{3}$;

   б) $x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} - x_{n-6} + 4x_{n-7} - 4x_{n-8} = 2^n + n^3 \cos\frac{\pi n}{6} - n\sin\frac{\pi n}{6}$.

4. Найти явную формулу для вычисления суммы $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЙА

Теория Пойа является одним из разделов перечислительной комбинаторики, развитие которого связано с работами венгерского математика Дьёрдя Пойа (1887–1985). Появление прилагательного «перечислительный» не является случайным: в комбинаторике, как и в математике в целом, помимо вопросов существования (или определения количественных характеристик) каких-либо объектов ставится вопрос их конструктивного описания. Так, в первом разделе настоящих указаний мы лишь определяли число тех или иных комбинаторных объектов (например, сочетаний без повторений), оставляя за рамками внимания далеко не всегда тривиальную задачу их перечисления. Как увидим ниже, с использовнием принадлежащих Пойа результатов можно не только отвечать на вопрос о числе объектов, но и составлять их «перечни».

3.1. Группа автоморфизмов неориентированного графа

Одним из приложений теории Пойа является подсчет количества и перечисление раскрасок неориентированного графа, инвариантных к некоторым подстановкам множества его вершин. В настоящем подразделе рассмотрим ряд понятий теории графов, которые будут использованы ниже.

Неориентированным графом (далее просто графом) G будем называть пару множеств (V, E), где V – конечное множество, элементы которого называются ***вершинами*** графа G, а E – множество (некоторых) двухэлементных подмножеств множества V. Элементы множества E называют ***ребрами*** графа G; вершины u и v, образующие ребро $\{u, v\}$, – его ***концами***. Число ребер, для которых вершина v является концом, называется ***степенью*** этой вершины и обозначается $\operatorname{dg} v$. Кроме того, образующие ребро вершины будем называть ***смежными***.

Дополнением графа $G = (V, E)$ называется граф $\overline{G} = (V, E_1)$ с тем же множеством V вершин и множеством E_1 ребер, определенным правилом

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (u \neq v) \wedge (\{u, v\} \notin E)\,.$$

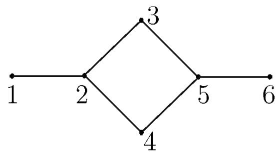


Рис. 3.1

Во многих случаях графам удобно давать графическую интерпретацию. При этом вершины изображают точками на плоскости, и если граф имеет ребро $\{u, v\}$, то точки, отвечающие вершиам u и v, соединяют линией. Например, рис. 3.1 отвечает графу (V, E), у которого

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ E = \Big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\Big\}.$$

Разумеется, взаимное расположение точек-вершин на плоскости, а также форма соединяющих их линий-ребер непринципиальны.

Автоморфизмом графа $G = (V, E)$ называется биективное отображение f множества его вершин на себя, для которого

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E.$$

Другими словами, автоморфизмом графа является всякая подстановка множества его вершин, которая переводит смежные вершины в смежные, а несмежные – в несмежные. Очевидно, автоморфизм сохраняет степени вершин, т. е.

$$\forall v \in V \quad \operatorname{dg} f(v) = \operatorname{dg} v.$$

Множество всех автоморфизмов графа G будем обозначать $\operatorname{Aut} G$; оно образует группу относительно композиции (проверьте!), которая называется ***группой автоморфизмов графа*** G. Очевидно, группа автоморфизмов n-вершинного графа является подгруппой симметрической группы $\mathcal{S}_n$.

Пример 3.1. Найти группу $H = \operatorname{Aut} G$ автоморфизмов графа, изображенного на 3.1.

Р е ш е н и е. Заметим, что поскольку автоморфизм биективен и сохраняет степени, вершины 2 и 5 могут перейти одна в другую либо остаться на месте. В первом случае вершины 1 и 6, смежные с вершинами 2 и 5 соответственно, также должны перейти одна в другую. Нетрудно проверить, что отвечающая этим преобразованиям подстановка $h_1 = (1\ 6)(2\ 5)$ является автоморфизмом. Рассуждая аналогичным образом, можно получить еще один элемент искомой группы – подстановку $h_2 = (3\ 4)$. Композиция $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1 = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$ и, конечно, тождественная подстановка также являются автоморфизмами.

Непосредственной проверкой для каждой из вершин возможности перейти в какую-либо вершину (с учетом, разумееется, сохранения отношения смежности вершин) можно убедиться, что рассматриваемый граф не имеет других автоморфизмов. Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{Aut} G = \big\{&(1)(2)(3)(4)(5)(6),\ (1)(2)(3\ 4)(5)(6),\\ &(1\ 6)(2\ 5)(3)(4),\ (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)\big\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

(для удобства дальнейшего использования полученного результата подстановки записаны в виде канонических разложений в произведения независимых циклов). #

Заметим, что алгоритм построения группы автоморфизмов произвольного неориентированного графа неизвестен[1]. Вообще говоря, для решения этой задачи достаточно найти систему образующих группы и вычислить ее замыкание. В частности, можно использовать факт разбиения группы на левые (или правые) смежные классы какой-либо ее подгруппы.

Пусть даны некоторая подгруппа $H_0 \subset H = \operatorname{Aut}(G)$ и некоторый автоморфизм $a_1 \notin H_0$. В этом случае все элементы класса a_1H_0, порожденного автоморфизмом a_1, будут отличны от автоморфизмов подгруппы H_0. Далее, если удастся подобрать автоморфизм $a_2 \notin H_0 \cup a_1H_0$, то все автоморфизмы класса a_2H_0 будут

[1]В качестве такого алгоритма можно предложить процедуру проверки свойства «быть автоморфизмом» для всех элементов симметрической группы S_n (n – число вершин графа), однако заведомо отказываемся от такого алгоритма ввиду его вычислительной сложности.

отличны от найденных ранее. Указанная процедура повторяется до тех пор, пока возможно подобрать автоморфизм, не принадлежащий ни одному из построенных ранее классов, затем полагаем

$$\mathrm{Aut}(G) = H_0 \cup a_1 H \cup a_2 H \cup \ldots$$

Часто для нахождения "нового" автоморфизма удобно рассмотреть подстановки a_1^{-1}, a_2^{-1}, $a_1 a_2$, $(a_1 a_2)^{-1}$ и т. д. Заметим, что "новый" автоморфизм может принадлежать множеству $a_i H_0 a_j H_0$, $i, j = 1, 2, \ldots$ (i и j могут совпадать), но если подгруппа H_0 выбрана так, что $a_j H_0 = H_0 a_j$ (в частности, если H_0 является нормальной), то $a_i H_0 a_j H_0 = a_i a_j H_0$ и достаточно вычислить смежный класс, порожденный произведением $a_i a_j$.

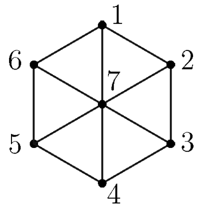


Рис. 3.2

Учитывая специфику рассматриваемой задачи, заметим, что выбрать в качестве H_0 нормальную подгруппу часто удается из геометрических соображений. Кроме того, следует иметь в виду, что в некоторых случаях вместо непосредственного вычисления группы $\mathrm{Aut}(G)$ проще найти группу $\mathrm{Aut}(\overline{G})$ автоморфизмов дополнения графа G, которая, очевидно, совпадает с искомой. $\#$

Пример 3.2. Найти группу автоморфизмов графа, изображенного на 3.2.

Р е ш е н и е. В настоящем примере в качестве подгруппы H_0 удобно взять подгруппу поворотов, порожденную подстановкой $h = (1\,2\,3\,4\,5\,6)(7)$, тогда

$$H_0 = \langle h \rangle = \big\{(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7),\ (1\,2\,3\,4\,5\,6)(7),\\ (1\,3\,5)(2\,4\,6)(7),\ (1\,4)(2\,5)(3\,6)(7),\ (1\,5\,3)(2\,6\,4)(7),\\ (1\,6\,5\,4\,3\,2)(7)\big\}.$$

Автоморфизм $a = (1\,4)(2\,3)(5\,6)(7)$, который отвечает отражению графа относительно прямой, проходящей через середины сторон $2-3$ и $5-6$, не попадает в подгруппу H_0, поэтому группе $\mathrm{Aut}(G)$ будут принадлежать еще шесть автоморфизмов класса

$$aH_0 = \big\{(1\,4)(2\,3)(5\,6)(7),\ (1\,5)(2\,4)(3)(6)(7),\ (1\,6)(2\,5)(3\,4)(7),\\ (1)(2\,6)(3\,5)(4)(7),\ (1\,2)(3\,6)(4\,5)(7),\ (1\,3)(2)(4\,6)(5)(7)\big\}.$$

Каждая из подстановок смежного класса aH_0 имеет порядок 2, поэтому, во-первых, этот класс содержит обратные ко всем своим элементам и, во-вторых, $aH_0 = H_0a$. Кроме того, подстановка $(1\,4)(2\,5)(3\,6)(7)$, отвечающая отражению графа относительно вершины 7, совпадает с одним из поворотов и содержится в подгруппе H_0. Нетрудно заметить, что этот класс также содержит все автоморфизмы, отвечающие отражениям относительно прямых, проведенных через середины противоположных сторон шестиугольника. Поскольку новых автоморфизмов нет, то $\mathrm{Aut}(G) = H_0 \cup aH_0$. #

Разобранные выше примеры показывают, что в общем случае построение группы автоморфизмов неориентированного графа является нетривиальной задачей. В примере 3.2 был использован ряд приемов, применение которых позволяет найти некоторое множество автоморфизмов, однако оставляет открытым вопрос о том, найдена ли группа $\mathrm{Aut}(G)$ полностью. В настоящем подразделе опишем один из возможных методов определения порядка искомой группы, зная который, можно убедиться, что она найдена полностью.

Пусть S – непустое конечное множество, а G – действующая на нем группа, т. е. некоторая подгруппа симметрической группы $\mathcal{S}_S$. Элементы $s,\ s' \in S$ назовем эквивалентными, если для некоторой подстановки $\sigma \in G$ выполняется $s' = \sigma(s)$. Легко проверить, что тем самым действительно определено отношение эквивалентности на S. Класс эквивалентности, порожденный элементом s по этому отношению[2], будем обозначать $[s]$ и называть ***орбитой*** элемента s.

Для произвольного фиксированного элемента $s \in S$ рассмотрим множество G_s всех подстановок из G, для которых s является неподвижной точкой, т. е. положим

$$G_s = \{\sigma \in G\ :\ \sigma(s) = s\}\,.$$

Можно без труда показать, что G_s является подгруппой в G; она называется ***стабилизатором*** элемента s.

В теории групп доказывается, что индекс подгруппы G_s в группе G равен числу элементов в орбите элемента s, т. е.

[2]Разумеется, само отношение и порожденные им классы эквивалентности зависят от того, какая именно подгруппа $G \subseteq \mathcal{S}_s$ фиксирована.

$|G : G_s| = \big|[s]\big|$. Указанное соотношение вкупе с теоремой Лагранжа лежит в основе излагаемого метода. Так, в соответствии с теоремой Лагранжа $|G| = |G : G_s|\,|G_s|$, откуда, согласно первому соотношению, следует, что

$$|G| = |[s]|\,|G_s|\,. \tag{3.2}$$

Таким образом, порядок группы автоморфизмов графа может быть вычислен как произведение порядка подгруппы-стабилизатора какой-нибудь вершины на число вершин в ее орбите.

Соотношение (3.2) удобно использовать в случае, когда для некоторой вершины s графа несложно найти ее орбиту и стабилизатор. Так, в примере 3.2 орбита любой вершины шестиугольника состоит из шести элементов (так как, очевидно, любая вершина может быть переведена в любую посредством некоторого поворота), а подгруппа-стабилизатор состоит из двух преобразований (тождественного и отражения относительно прямой, проходящей через данную вершину и вершину, ей противоположную). Таким образом, в соответствии с (3.2) порядок группы автоморфизмов шестиугольника должен быть равен 12, что совпадает с полученным выше результатом.

3.2. Цикловой индекс группы

Пусть H – конечная группа. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что H является подгруппой группы подстановок $\mathcal{S}_n$ для некоторого n (это следует из теоремы Кэли для конечных групп). Из курса алгебры известно, что произвольная подстановка $h \in \mathcal{S}_n$ может быть представлена в виде произведения

$$h = c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_k \tag{3.3}$$

независимых циклических подстановок c_i (называемых далее просто циклами), которое единственно с точностью до перестановки сомножителей. При этом подразумевается, что тождественная подстановка раскладывается в произведение n циклов длины 1.

Цикловым индексом группы H называется многочлен

$$p_H(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

где k_i – число циклов длины i в разложении (3.3).

Пример 3.3. Найти цикловой индекс группы $H = \mathcal{S}_3$ подстановок длины 3.

Р е ш е н и е. Непосредственно строя разложение (3.3) для каждой из подстановок группы S_3, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2\,3),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3)(2), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2),$$

откуда с использованием определения циклового индекса находим

$$p_{\mathcal{S}_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}\left[x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right].\ \#$$

Пример 3.4. Найти цикловой индекс группы автоморфизмов графа, изображенного на рис. 3.1.

Р е ш е н и е. В ходе решения примера 3.1 была найдена группа автоморфизмов указанного графа. В соответствии с (3.1) и определением циклового индекса имеем

$$p_{\operatorname{Aut} G}(x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{4}\left[x_1^6 + x_1^2x_2^2 + x_1^4x_2 + x_2^3\right].\ \# \tag{3.4}$$

3.3. Характерные задачи теории Пойа

В настоящем подразделе рассмотрим формулировки двух задач, которые могут быть быстро и красиво решены с использованием теории Пойа.

Предположим, что в распоряжении ювелира имеются камни k разных цветов (запас камней каждого вида не ограничен, а камни одного цвета неразличимы между собой). Сколько различных ожерелий (см. пример 1.2, *б*) длины n может составить ювелир? Сколько различных ожерелий длины n он может составить, использовав ровно m_c камней цвета c? В последнем вопросе предполагается, что выполнено условие

$$\sum_c m_c = n. \tag{3.5}$$

Пусть входящие в ожерелья оправы для камней каким-то образом перенумерованы. В этом случае каждый конкретный способ заполнения их камнями может быть описан кортежем $(c_1, \ldots, c_n)$, где c_i – номер цвета камня, заполняющего i-ю оправу. По смыслу задачи этот кортеж является размещением с повторениями из k по n. Непосредственный подсчет числа таких размещений не дает окончательного ответа задачи, так как при этом необходимо учесть, что при повороте или отражении (см. пример 1.2, *б*) получается то же ожерелье, которому, однако, будет отвечать другое размещение. Ситуация оказывается еще более сложной, когда требуется найти число ожерелий, в которых использовано заданное число камней каждого цвета.

Рассмотренная задача является частным случаем следующей более общей задачи. Пусть заданы неориентированный граф $G = (V, E)$ и конечное множество R цветов. ***Раскраской*** графа G назовем отображение $C : V \to R$, которое каждой вершине $v \in V$ ставит в соответствие некоторый цвет $C(v)$. Такое отображение можно задать кортежем

$$\big(C(v_1), \ldots, C(v_n)\big),$$

где $n = |V|$. Две раскраски C и D назовем ***эквивалентными***, если одна из них переходит в другую под действием некоторого автоморфизма графа G, т. е.

$$C \sim D \Leftrightarrow (\exists h \in \operatorname{Aut} G)\Big(\big(C(v_1), \ldots, C(v_n)\big) = \\ = \big(D(h(v_1)), \ldots, D(h(v_n))\big)\Big).$$

Например, в случае $R = \{к, з\}$ (красный и зеленый цвета) раскраски трехвершинного графа, изображенные на 3.3, *а, б*, эквивалентны, но не эквивалентны раскраске, изображенной на 3.3, *в*. Заданное таким образом бинарное отношение действительно является эквивалентностью на множестве R^V всех раскрасок (проверьте!).

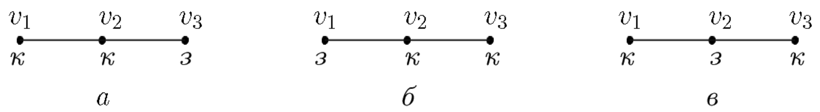


Рис. 3.3

В формулируемой задаче ставятся два следующих вопроса. Во-первых, сколько всего существует неэквивалентных раскрасок данного графа цветами из множества R? Во-вторых, сколько существует различных неэквивалентных раскрасок, в которых ровно m_c вершин имеют цвет c?

Замечание 3.1. *а.* Заметим, что число неэквивалентных раскрасок графа совпадает с числом классов эквивалентности (по отношению $\sim$) множества всех отображний из V в R. Таким образом, для ответа на первый вопрос задачи необходимо найти величину $\left|R^V/\sim\right|$.

б. Для удобства дальнейшего изложения будем называть ***типом раскраски*** кортеж $(m_1, \ldots, m_k)$, где m_i равно числу вершин графа, помеченных цветом i, $k = |R|$, и, разумеется, $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = n$. Таким образом, второй вопрос задачи звучит так: сколько существует неэквивалентных раскрасок данного типа? $\#$

Ниже дадим общую абстрактную формулировку обеих рассмотренных задач, введем некоторые дополнительные понятия и сформулируем основные результаты теории Пойа.

3.4. Основная теорема

Пусть S – некоторое конечное множество (например, множество оправ для камней в ожерелье или множество вершин графа), $H \subseteq \mathcal{S}_S$ – подгруппа симметрической группы множества S (например, группа преобразований поворота и отражений ожерелья или группа автоморфизмов графа), R – конечное множество цветов или меток. Как и выше, всякое отображение $C : S \to R$ будем называть ***раскраской*** множества S. Если предположить, что элементы множества S пронумерованы, то каждую раскраску можно задать кортежем $C = (C(1), \ldots, C(n))$. Две раскраски C и D будем называть ***эквивалентными***, если одна из них переводится в другую некоторой подстановкой $h \in H$. Как было сказано выше, нас интересует: во-первых, чему равно число $\left|R^S/\sim\right|$ неэквивалентных раскрасок и, во-вторых, чему равно число раскрасок данного типа.

Предположим, что каждому цвету $c \in R$ поставлена в соответствие переменная $w(c)$, которую будем называть ***весом цвета*** *c*. ***Перечнем запаса*** (перечнем цветов) будем называть сумму весов всех цветов[3]:

$$\mathrm{Invt}(R) = \sum_{c \in R} w(c).$$

Например, если $R = \{к, з\}$, то красному цвету можно поставить в соответствие вес r, зеленому – вес g (т. е. $w(к) = r$ и $w(з) = g$), и перечень запаса будет иметь вид $\mathrm{Invt}(R) = r + g$.

Весом раскраски $C = \big(C(1), \ldots, C(n)\big)$ назовем произведение

$$w(C) = w(C(1)) \cdot \ldots \cdot w(C(n))$$

весов ее значений. ***Перечнем раскрасок***[4] будем называть сумму весов всех возможных раскрасок:

$$\mathrm{Invt}\left(R^S\right) = \sum_{C \in R^S} w(C).$$

Например, каждой из раскрасок изображенного на рис. 3.3 трехвершинного графа отвечает один и тот же вес $r^2 g$ (две вершины выкрашены красным и одна зеленым цветом). Кроме того, можно заметить, что раскраски одного типа имеют одинаковый вес, а их перечень является многочленом от $|R|$ переменных, отвечающих цветам множества R.

Можно показать, что в общем случае

$$\mathrm{Invt}\left(R^S\right) = \big[\mathrm{Invt}(R)\big]^{|S|} = \left[\sum_{c \in R} w(c)\right]^{|S|}. \tag{3.6}$$

Пример 3.5. Найти перечень всех двухцветных раскрасок для графа, изображенного на рис. 3.3.

Р е ш е н и е. Предполагая, что $R = \{к, з\}$, $w(к) = r$, $w(з) = g$ и $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, в соответствии с формулой (3.6) имеем

$$\mathrm{Invt}\left(R^S\right) = (r+g)^3 = r^3 + 3r^2 g + 3rg^2 + g^3.$$

Из полученного выражения следует, что для изображенного на рис. 3.3 графа существуют по одной одноцветной раскраске (слагаемые r^3 и b^3, отвечающие случаям, когда все вершины имеют

---

[3]Это выражение, а также все приводимые ниже «перечни» будем рассматривать как многочлены над полем рациональных чисел относительно переменных $w(c)$, $c \in R$.

[4]Речь идет о *всех* раскрасках, не обязательно неэквивалентных.

один цвет, или, что то же самое, раскраскам типов $(3,0)$ и $(0,3)$). Кроме того, существуют по три раскраски типов $(2,1)$ и $(1,2)$, когда две вершины выкрашены в один цвет, а третья – в другой (слагаемые r^2g и rg^2). В справедливости полученного результата нетрудно убедиться, выписав все возможные раскраски этого графа (проверьте!). $\#$

Перечнем неэквивалентных раскрасок (перечнем классов эквивалентности, перечнем фактор-множества $R^S/\sim$) будем называть сумму весов всех попарно неэквивалентных раскрасок:

$$\operatorname{Invt}\left(R^S/\sim\right) = \sum_{[C]\,\in\, R^S/\sim} w(C)$$

(в указанной сумме каждому классу эквивалентности отвечает ровно одно слагаемое). Заметим, что с использованием последнего перечня можно ответить на оба вопроса поставленной выше задачи. Так, коэффициент при некотором весе в многочлене $\operatorname{Invt}\left(R^S/\sim\right)$ равен числу неэквивалентных раскрасок данного типа, а сумма всех коэффициентов равна общему числу неэквивалентных раскрасок.

Основной результат теории Пойа состоит в обосновании "механического" и алгоритмически простого способа построения многочлена $\operatorname{Invt}\left(R^S/\sim\right)$, не требующего привлечения содержательных комбинаторных рассуждений.

Теорема 3.1 (Пойа). *Пусть $p_H(x_1,\ldots,x_n)$ – цикловой индекс группы H. Тогда: 1) общее число неэквивалентных раскрасок множества S*

$$\left|R^S/\sim\right| = p_H(|R|,\ldots,|R|);$$

2) перечень классов эквивалентности можно представить в виде

$$\operatorname{Invt}\left(R^S/\sim\right) = p_H\Big(\sum_{c\in R} w(c), \sum_{c\in R} w(c)^2, \ldots, \sum_{c\in R} w(c)^n\Big).$$

Пример 3.6. Найти перечень неэквивалентных двухцветных раскрасок графа, изображенного на рис. 3.3.

Р е ш е н и е. Группа H автоморфизмов рассматриваемого графа содержит две подстановки: $(v_1)(v_2)(v_3)$ и $(v_1\ v_3)(v_2)$, поэтому ей отвечает цикловой индекс

$$p_{\mathrm{Aut}\,G}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\left[x_1^3 + x_1 x_2\right].$$

В соответствии с теоремой 3.1 находим перечень неэквивалентных раскрасок[5]

$$\mathrm{Invt}\left(R^V/\sim\right) = p_{\mathrm{Aut}\,G}(r+g, r^2+g^2, r^3+g^3) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(r+g)^3 + (r+g)(r^2+g^2)\right] = r^3 + g^3 + 2r^2 g + 2rg^2,$$

из чего следует, что общее число неэквивалентных раскрасок составляет $\left|R^S/\sim\right| = 1+1+2+2 = 6$ шт. (этот результат можно также получить с использованием первого утверждения теоремы: $\left|R^S/\sim\right| = p_{\mathrm{Aut}(G)}(2,2,2) = (2^3 + 2\cdot 2)/2 = 6$). Кроме того, можно заметить, что, скажем, число неэквивалентных раскрасок типа $(2,1)$ равно 2 (коэффициент при $r^2 g$ в перечне). Обе эти раскраски изображены на 3.3, *а*, *в*. #

Пример 3.7. Найти перечни неэквивалентных двухцветных и трехцветных раскрасок графа, изображенного на рис. 3.1, и указать общее число неэквивалентных раскрасок, при которых всем цветам отвечает одинаковое число вершин.

Р е ш е н и е. С использованием полученного в ходе решения примера 3.4 циклового индекса группы автоморфизмов рассматриваемого графа и теоремы 3.1 находим перечень неэквивалентных двухцветных раскрасок

$$\mathrm{Invt}\left(R^V/\sim\right) = p_{\mathrm{Aut}\,G}(r+g, r^2+g^2, \ldots, r^6+g^6) =$$
$$= \frac{1}{4}\Big[(r+g)^6 + (r+g)^2(r^2+g^2)^2 + (r+g)^4(r^2+g^2) +$$
$$+(r^2+g^2)^3\Big] = r^6 + 3r^5 g + 7r^4 g^2 + 8r^3 g^3 + 7r^2 g^4 + 3rg^5 + g^6.$$

Из полученного результата следует, что общее число неэквивалентных двухцветных раскрасок графа на рис. 3.1 равно 30. Кроме того, число раскрасок, при которых каждым цветом выкрашено по три вершины (раскраски типа $(3,3)$, которым отвечает вес $r^3 g^3$), равно 8.

---

[5]Здесь также используются предположения, сделанные в примере 3.5.

Для нахождения перечня трехцветных раскрасок предположим, что $R = \{к, з, с\}$ и $w(с) = b$ (третий цвет синий). В соответствии с основной теоремой для составления перечня достаточно в многочлене 3.4 выполнить подстановку $x_k = r^k + g^k + b^k$, $k = \overline{1;6}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Invt}\left(R^V/\sim\right) &= p_{\operatorname{Aut} G}(r+g+b, r^2+g^2+b^2, \ldots, r^6+g^6+b^6) = \\
&= \frac{1}{4}\left[(r+g+b)^6 + (r+g+b)^2(r^2+g^2+b^2)^2 + \right.\\
&\left. + (r+g+b)^4(r^2+g^2+b^2) + (r^2+g^2+b^2)^3\right] = \\
&= r^6 + g^6 + b^6 + 3r^5g + 3r^5b + 3rg^5 + 3g^5b + 3rb^5 + 3gb^5 + \\
&+ 7r^4g^2 + 7r^4b^2 + 7r^2g^4 + 7g^4b^2 + 7r^2b^4 + 7g^2b^4 + 11r^4gb + \\
&+ 11rg^4b + 11rgb^4 + 8r^3g^3 + 8r^3b^3 + 8g^3b^3 + 30r^2g^2b^2 + \\
&+ 20r^3g^2b + 20r^3gb^2 + 20r^2g^3b + 20rg^3b^2 + 20r^2gb^3 + 20rg^2b^3,
\end{aligned}$$

а общее число неэквивалентных раскрасок

$$p_{\operatorname{Aut} G}(3, \ldots, 3) = \frac{1}{4}\left[3^6 + 3^2 3^2 + 3^4 3^2 + 3^3\right] = 270.$$

Поскольку коэффициент при весе $r^2g^2b^2$ равен 30, заключаем, что существуют 30 неэквивалентных раскрасок, при которых каждым цветом выкрашено по две вершины.

Замечание 3.2. Можно заметить, что во всех рассмотренных примерах перечни являются симметрическими многочленами, т. е. не изменяются при любой перестановке переменных. Этот факт не является случайным, поскольку очевидно, что изменение порядка цветов в палитре не сказывается на числе раскрасок данного веса. #

Пример 3.8. Найти перечень неэквивалентных двухцветных раскрасок графа, изображенного на рис. 3.2, и указать общее число неэквивалентных раскрасок, при которых ровно одна вершина выкрашена в отличный от остальных цвет.

Р е ш е н и е. В ходе решения примера 3.2 была найдена группа автоморфизмов рассматриваемого графа. Ее цикловой индекс имеет вид

$$p_{\operatorname{Aut} G}(x_1, \ldots, x_7) = \frac{1}{12}\left[x_1^7 + 3x_1^3x_2^2 + 4x_1x_2^3 + 2x_1x_3^2 + 2x_1x_6\right].$$

Предполагая, что $R = \{к, з\}$, $w(к) = r$, $w(з) = g$, в соответствии с основной теоремой находим перечень неэквивалентных раскрасок

$$\operatorname{Invt}(R^S/\sim) = p_{\operatorname{Aut} G}(r+g, \ldots, r^7+g^7) =$$
$$= r^7 + 2r^6 g + 4r^5 g^2 + 6r^4 g^3 + 6r^3 g^4 + 4r^2 g^5 + 2rg^6 + g^7$$

и их общее число $\left|R^S/\sim\right| = p_{\operatorname{Aut} G}(2, \ldots, 2) = 26$.

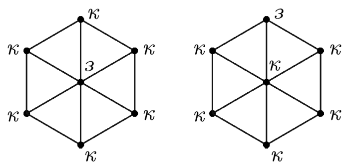
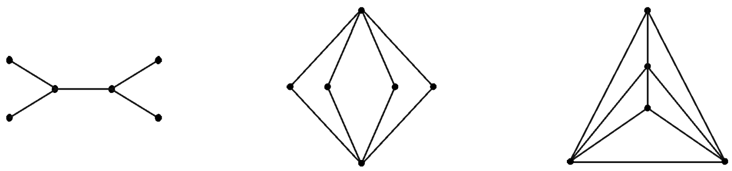


Рис. 3.4

Поскольку в полученном перечне $\operatorname{Invt}(R^S/\sim)$ коэффициенты при одночленах $r^6 g$ и rg^6 равны 2, заключаем, что существуют четыре неэквивалентные раскраски, при которых ровно одна вершина имеет отличный от остальных цвет. Этот результат легко поддается проверке: обе неэквивалентные раскраски веса $r^6 g$ изображены на рис. 3.4, и, очевидно, других раскрасок такого веса для данного графа не существует. #

3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти перечень неэквивалентных двухцветных раскрасок:
   а) правильного пятиугольника;
   б) девятиклеточной доски (имеется в виду граф-решетка 3×3);
   в) прямоугольника, не являющегося квадратом;
   г) графа, изображенного на рис. 3.5, *а*.
2. Найти перечни неэквивалентных трехцветных раскрасок графов, изображенных на рис.3.1, рис. 3.5, *б* и *в*.



а *б* *в*

Рис. 3.5

Приложение

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО КОМБИНАТОРИКЕ

Задача № 1. Формула включений и исключений

Найти число ломаных, ведущих из точки $A(0,0)$ в точку $D(10,10)$ и проходящих через точку B и хотя бы через одну из точек C_1, C_2 , C_3, C_4 (табл. 1). Вершины ломаной имеют целые неотрицательные координаты, каждое звено ломаной направлено либо вверх, либо вправо.

Таблица 1

Вариант	B	C_1	C_2	C_3	C_4
1	(3, 4)	(5, 3)	(6, 4)	(7, 5)	(7, 6)
2	(4, 3)	(1, 1)	(0, 2)	(7, 7)	(8, 3)
3	(2, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(6, 5)	(8, 3)
4	(3, 5)	(1, 9)	(2, 2)	(6, 8)	(7, 5)
5	(5, 2)	(5, 3)	(3, 1)	(8, 7)	(9, 7)
6	(8, 8)	(3, 3)	(5, 4)	(7, 7)	(9, 4)
7	(7, 8)	(2, 8)	(2, 5)	(3, 6)	(9, 9)
8	(8, 7)	(2, 3)	(4, 4)	(5, 2)	(9, 7)
9	(8, 6)	(3, 2)	(3, 7)	(4, 4)	(5, 5)
10	(2, 3)	(3, 4)	(5, 3)	(1, 2)	(8, 9)
11	(8, 8)	(3, 3)	(4, 5)	(7, 7)	(4, 7)
12	(8, 7)	(8, 2)	(9, 8)	(6, 3)	(8, 6)
13	(7, 8)	(3, 2)	(4, 4)	(5, 5)	(2, 5)

Вариант	B	C_1	C_2	C_3	C_4
14	(6, 8)	(2, 3)	(7, 3)	(4, 9)	(8, 9)
15	(3, 2)	(4, 3)	(3, 3)	(4, 7)	(9, 8)
16	(4, 3)	(3, 0)	(7, 6)	(8, 7)	(5, 7)
17	(3, 4)	(0, 2)	(3, 1)	(7, 7)	(3, 8)
18	(5, 2)	(6, 4)	(7, 4)	(5, 6)	(6, 7)
19	(5, 3)	(1, 0)	(1, 3)	(8, 6)	(5, 7)
20	(2, 5)	(9, 7)	(9, 5)	(7, 8)	(8, 9)
21	(2, 3)	(1, 1)	(4, 1)	(5, 4)	(6, 8)
22	(8, 9)	(1, 3)	(4, 6)	(5, 4)	(6, 5)
23	(7, 7)	(4, 2)	(2, 3)	(3, 5)	(7, 9)
24	(7, 9)	(0, 1)	(3, 2)	(4, 5)	(9, 9)
25	(7, 8)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 3)	(8, 7)
26	(8, 7)	(1, 1)	(2, 8)	(4, 4)	(9, 9)
27	(5, 5)	(1, 0)	(3, 4)	(5, 5)	(9, 9)
28	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 4)	(9, 8)
29	(6, 6)	(0, 3)	(0, 1)	(8, 9)	(6, 3)
30	(2, 2)	(6, 4)	(7, 4)	(7, 7)	(2, 3)

Задача № 2. Линейные рекуррентные соотношения

1. Найти частное решение однородного линейного рекуррентного соотношения с начальными условиями

$$\begin{cases} x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = 0, \qquad n \geqslant 3; \\ x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2 \end{cases}$$

(табл. 2).

2. Найти общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = c_n, \qquad n \geqslant 3$$

(см. табл. 2).

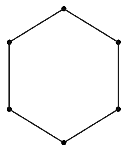
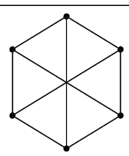
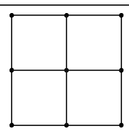
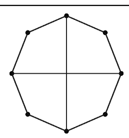
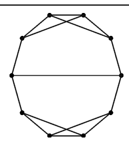
Таблица 2

Вариант	a_1	a_2	b_1	b_2	c_n
1	–1	–2	0	–1	$3n2^n$
2	–2	–15	1	0	$(n+1)3^n$
3	–1	–3/4	1	0	$5 \cdot 2^{-n}$
4	–1	–6	2	1	$2n^2+n$
5	–1	–12	1	–2	$(2n-1)2^{2n}$
6	–2	–8	1	2	$3n(-2)^n$
7	2	–24	2	1	$n5^n$
8	–2	–5/4	1	3	n^2+1
9	–2	–3/4	1	0	$2n(-2)^{-n}$
10	3	–7/4	1	1	$3n7^n$
11	1	–2	1	–3	$3n-1$
12	–2	1	–3	1	n
13	–1	–12	1	1	$3n(-3)^n$
14	–3	–10	1	1	$2n^2-1$
15	–4	–5	1	–1	n^25^n
16	4	3	–1	1	$2n+3$
17	5	–4	2	0	n^2
18	–1	–20	0	9	$n3^n$
19	–1	–30	2	1	$(n+1)4^n$
20	3	2	1	2	$-n^2+10$
21	4	–12	–2	1	$(n+1)2^n$
22	5	6	2	–1	$(n-1)6^n$
23	–3	–4	1	2	$5n^2+2$
24	2	24	0	1	$(2n+1)2^{2n}$
25	–7	12	1	0	$(n-3)3^n$
26	–9	–10	1	–1	$n10^n$
27	1	–6	4	–1	$(3n-1)2^n$
28	2	1	1	–5	$n(-1)^n$
29	6	9	7	0	$2(-3)^n$
30	4	4	3	–1	n^2+n

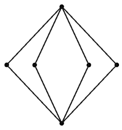
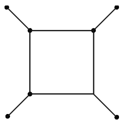
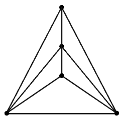
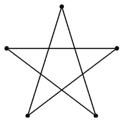
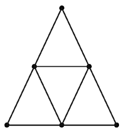
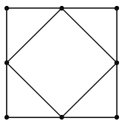
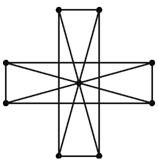
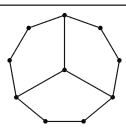
Задача № 3. Теорема Пойа

Для данного графа G найти перечень и общее число неэквивалентных относительно группы $H \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ преобразований m-цветных раскрасок (табл. 3), приняв множество цветов $R = \{r, b\}$ в случае $m = 2$ и $R = \{r, b, w\}$ в случае $m = 3$. Найти коэффициент при $r^k b^{n-k}$ (или при $r^k b^l w^{n-k-l}$), где n – число вершин графа, и дать его содержательную интерпретацию. При решении этой задачи рекомендуется использовать вычислительную технику, особенно математические пакеты, в которых реализованы аналитические преобразования.

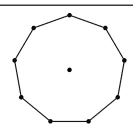
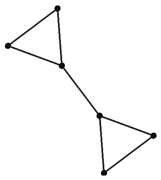
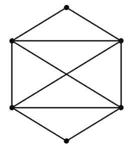
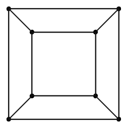
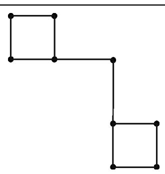
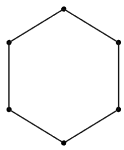
Таблица 3

Вариант	Граф G	Параметры
1		$m = 2$, $k = 2$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
2		$m = 2$, $k = 3$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
3		$m = 2$, $k = 4$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
4		$m = 2$, $k = 5$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
5		$m = 2$, $k = 5$, $H = \mathrm{Aut}(G)$

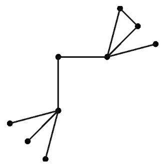
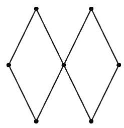
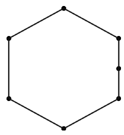
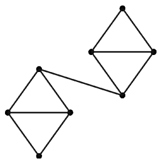
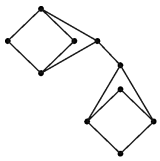
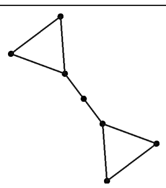
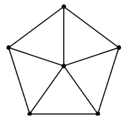
Продолжение табл. 3

Вариант	Граф G	Параметры
6		$m = 2$, $k = 1$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
7		$m = 2$, $k = 3$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
8		$m = 2$, $k = 2$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
9		$m = 2$, $k = 4$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
10		$m = 2$, $k = 5$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
11		$m = 2$, $k = 4$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
12		$m = 2$, $k = 7$, H строится с ограничением, что прямоугольники не являются квадратами
13		$m = 2$, $k = 4$, $H = \mathrm{Aut}(G)$

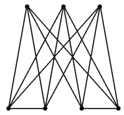
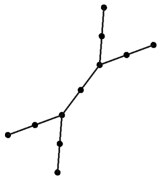
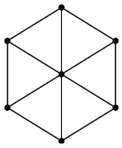
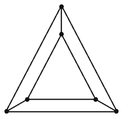
Продолжение табл. 3

Вариант	Граф G	Параметры
14		$m = 2$, $k = 2$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
15		$m = 2$, $k = 2$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
16		$m = 3$, $k = 1$, $l = 3$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
17		$m = 3$, $k = 3$, $l = 2$, H порождается вращениями и отражениями графа как плоской фигуры и симметрией внутреннего и внешнего квадратов
18		$m = 3$, $k = 3$, $l = 3$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
19		$m = 3$, $k = 2$, $l = 2$, $H = \mathrm{Aut}(G)$

Продолжение табл. 3

Вариант	Граф G	Параметры
20		$m = 3,\ k = 5,\ l = 2,$ $H = \mathrm{Aut}(G)$
21		$m = 3,\ k = 1,\ l = 3,$ $H = \mathrm{Aut}(G)$
22		$m = 3,\ k = 2,\ l = 2,$ $H = \mathrm{Aut}(G)$
23		$m = 2,\ k = 2,\ l = 1,$ $H = \mathrm{Aut}(G)$
24		$m = 2,\ k = 3,\ l = 3,$ $H = \mathrm{Aut}(G)$
25		$m = 3,\ k = 2,\ l = 2,$ $H = \mathrm{Aut}(G)$
26		$m = 3,\ k = 1,\ l = 3,$ $H = \mathrm{Aut}(G)$

Окончание табл. 3

Вариант	Граф G	Параметры
27		$m = 3$, $k = 3$, $l = 1$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
28		$m = 3$, $k = 3$, $l = 5$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
29		$m = 3$, $k = 1$, $l = 1$, $H = \mathrm{Aut}(G)$
30		$m = 3$, $k = 3$, $l = 1$, $H = \mathrm{Aut}(G)$

ЛИТЕРАТУРА

Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.

Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. М.: Наука, 1992.

Исмагилов Р.С., Калинкин А.В., Станцо В.В. Комбинаторика и булевы функции. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. КОМБИНАТОРНЫЕ ОБЪЕКТЫ 3
1.1. Основные понятия 3
1.2. Формула включений и исключений 10
1.3. Задачи для самостоятельного решения 15
2. ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ 16
2.1. Основные понятия 16
2.2. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами 21
2.3. Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами 23
2.4. Задачи для самостоятельного решения 32
3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЙА 33
3.1. Группа автоморфизмов неориентированного графа 33
3.2. Цикловой индекс группы 38
3.3. Характерные задачи теории Пойа 39
3.4. Основная теорема 41
3.5. Задачи для самостоятельного решения 46
Приложение 47
Литература 55